Journal

95880

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

von

L. Fuchs.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 119.

In vier Heften.

Berlin,
S.W. Anhaltstrasse 12.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1898.

Inhaltsverzeichniss des Bandes 119.

Seite

Baur, L. Ueber die Verzweigung der dreiblätterigen *Riemann*schen Flächen. 171—174

Brückel, Ph. Zusammenstellung der Formeln des Herrn *S. Gundelfinger* zum Hauptaxenproblem der Flächen zweiter Ordnung und zweiter Klasse bei Zugrundelegung von projectiven Coordinaten. . . . . {210—233 {313—329

Fuchs, R. Ueber die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale als Functionen eines Verzweigungspunktes. . . . . 1— 24

Günther, P. Nachtrag zu der Abhandlung „Ueber lineare Differentialgleichungen, deren Integrale nur einen singulären Punkt im Endlichen besitzen und im Unendlichen sich regulär verhalten“ (dieses Journal Band 105 S. 1 ff.). . . . . 330—338

Gutzmer, A. Zum Existenzbeweise des Integrals einer linearen homogenen Differentialgleichung von *Paul Günther*. . . . . 82— 85

Hancock, H. Canonical forms for the unique representation of *Kronecker*'s modular systems. . . . . 148—170

Heffter, L. Ueber *Abel*sche Gruppen. . . . . 261—266

Hensel, K. Ueber die Zurückführung der Divisorensysteme auf ihre reducirte Form. (Zweite Abhandlung.) . . . . . 114—130

— — Ueber die elementaren arithmetischen Eigenschaften der reinen Modulsysteme zweiter Stufe. . . . . 175—185

Heymann, W. Ueber die Differentialgleichung $\varphi(x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\psi(x)y\frac{dy}{dx}$ $+\chi(x)y^2+\theta(x)=0$. . . . . 253—258

Horn, J. Ueber das Verhalten der Integrale von Differentialgleichungen bei der Annäherung der Veränderlichen an eine Unbestimmtheitsstelle. . . {196—209 {267—290

Igel, B. Zur Theorie der Zweitheilung elliptischer Functionen. . . . . 50— 64

Jahnke, E. Ueber ein allgemeines aus Thetafunctionen von zwei Argumenten gebildetes Orthogonalsystem und seine Verwendung in der Mechanik. . 234—252

Seite

Königsberger, L. Ueber die Principien der Mechanik. (Fortsetzung der Arbeit aus Band 118 Seite 275—350.) . . . . . 25— 49

Kühne, H. Die Uebertragung eines geometrischen Lehrsatzes auf Mannigfaltigkeiten von gerader Ordnung als Beispiel der Anwendung einer schiefen Determinante. . . . . 186—195

Mangoldt, H. v. Ueber eine Anwendung der *Riemann*schen Formel für die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze. . . . . 65— 71

Pincherle, S. Sur la transformée d'*Euler*. (Extrait d'une lettre de M. *S. Pincherle* à Bologne à M. *L. Schlesinger* à Clausembourg.) . . . . . 347—349

Saalschütz, L. Ueber rationale Auflösungen der Functionalgleichung $C\psi(n)\psi(n+1)+(A''n+B'')\psi(n+1)-(A'(n+1)+B')\psi(n)+(A'-A'')=0$. 291—312

Schottky, F. Ueber die neun Schnittpunkte zweier ebenen Curven dritter Ordnung. . . . . 72— 81

Stäckel, P. Ueber die Existenz von Integralen bei Systemen partieller Differentialgleichungen. . . . . 339—346

Thomé, L. W. Ueber lineare Differentialgleichungen mit mehrwerthigen algebraischen Coefficienten. (Zweite Abhandlung.) . . . . . 131—147

Wallenberg, G. Ueber nichtlineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung. . . . . 87—113

Francesco Brioschi †. 259

Ernst Christian Julius Schering †. 86

Preisaufgabe der Fürstlich *Jablonowski*schen Gesellschaft zu Leipzig für das Jahr 1901. 260

Ueber die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale als Functionen eines Verzweigungspunktes.

(Von Herrn *Richard Fuchs.*)

Einleitung.

Es sei $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung

$$\text{(A.)} \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n y = 0,$$

wo $p_1, p_2, \ldots, p_n$ rationale Functionen von x sind.

Bildet man dann die Determinante der n Functionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

so sind bekanntlich die Unterdeterminanten $(n-1)$-ter Ordnung, welche aus den $n-1$ ersten Zeilen von Δ hervorgehen, wenn man sie noch durch Δ dividirt, Integrale der adjungirten Differentialgleichung von (A.).

In seinen Abhandlungen „zur Theorie der linearen Differentialgleichungen“*) hat mein Vater im Falle $n = 2m$ diejenigen Unterdeterminanten von Δ betrachtet, welche aus den m ersten Zeilen gebildet werden können, und nachgewiesen, dass dieselben einer gewissen linearen homogenen Differentialgleichung genügen, welche sich ausgezeichneter Eigenschaften erfreut, von denen er in späteren noch näher zu bezeichnenden Arbeiten mannigfache Anwendungen gegeben hat. Es erweist sich daher

*) *L. Fuchs*, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1888 S. 1115 ff. und S. 1273 ff.

als nützlich, allgemein die Unterdeterminanten von Δ ins Auge zu fassen, und dies ist in der That geschehen*).

Spaltet man von der Determinante Δ die ersten λ Zeilen ab und bildet aus dieser Matrix von λ Zeilen und n Colonnen alle Determinanten λter Ordnung, so genügen diese einer linearen homogenen Differentialgleichung $\binom{n}{\lambda}$-ter Ordnung, die wir mit Herrn ***Ludwig Schlesinger*****) die $(n-\lambda)$-te Associirte von (A.) nennen wollen. In der zweiten der oben erwähnten Arbeiten***) hat mein Vater eine Kategorie von Differentialgleichungen ins Auge gefasst, deren Substitutionsgruppe von einem in den Coefficienten der Differentialgleichung auftretenden Parameter unabhängig ist. Wenn die Ordnung einer zu dieser Kategorie gehörigen Differentialgleichung, die überdies der sogenannten ***Fuchs***schen Klasse angehört, eine gerade Zahl $n = 2m$ ist, so muss ihre $m$te Associirte reductibel sein†).

Zu den Differentialgleichungen der bezeichneten Kategorie gehören diejenigen, welchen die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen und überhaupt der ***Abel***schen Integrale Genüge leisten††). Für das Geschlecht $p = 2$ der zu Grunde gelegten ***Riemann***schen Fläche wird diese Differentialgleichung von der vierten Ordnung. Mein Vater betrachtet in diesem Falle†††) in Uebereinstimmung mit seinen früheren Untersuchungen die zweite Associirte, wobei sich ergiebt, dass die Reductibilität dieser Differentialgleichung sechster Ordnung sich darin kundgiebt, dass sie durch ein rationales Integral befriedigt wird.

Die Wichtigkeit dieses Resultates geht schon aus dem Umstande hervor, dass sich aus demselben*†) die von ***Weierstrass****††) und ***Riemann****†††)

---

*) ***A. R. Forsyth,*** Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 179, p. 419 ff. — ***L. Schlesinger,*** Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Bd. II, 1, S. 125 ff.

) ***L. Schlesinger,* Handbuch u. s. w. Bd. II, 1, S. 127. Wir bemerken, dass Herr ***Forsyth*** (a. a. O.) die Bezeichnung „associate equation" als eine Uebersetzung von „adjungirte Gleichung" in dem Falle anwendet, wo der Coefficient der $(n-1)$-ten Ableitung von y in der Gleichung (A.) verschwindet. In diesem Falle ist nämlich die erste Associirte von (A.) identisch mit der adjungirten Differentialgleichung.

***) Sitzungsberichte, 1888, S. 1279.

†) a. a. O. S. 1285, Satz V:

††) a. a. O. S. 1285 No. 14 u. dieses Journal, Bd. 71, S. 91 ff.; Bd. 73, S. 324.

†††) Sitzungsberichte 1889, S. 714.

*†) a. a. O. S. 717.

*††) Programm des Braunsberger Gymnasiums 1848/49.

*†††) Dieses Journal Bd. 54, S. 144.

aufgestellten Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale ergeben.

Ich beabsichtige für die Differentialgleichungen, welchen die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale, für ein beliebiges Geschlecht p der zu Grunde gelegten *Riemann*schen Fläche genügen, die analoge Untersuchung anzustellen, indem ich die $(2p-2)$-ten Associirten derselben ins Auge fasse. Es gelingt mir in der That auf Grund der Umlaufsrelationen, welche mein Vater*) für die Periodicitätsmoduln aufgestellt hat, nachzuweisen, dass diese $(2p-2)$-te Associirte ein rationales Integral besitzt, und zu gleicher Zeit dasselbe in expliciter Form anzugeben.

Indem ich die Untersuchungen weiter verfolgte, wurde ich dazu geführt, für eine beliebige lineare Differentialgleichung die Beziehungen, welche zwischen den Associirten verschiedener Stufen bestehen, näher zu ergründen. Hierbei ergab sich der Satz:

Wenn die $(n-k)$-te Associirte der Differentialgleichung (A.) ein rationales Integral besitzt, so genügen der $(n-k-\alpha)$-ten Associirten (α eine positive ganze Zahl) Integrale einer Differentialgleichung, welche mit der $(n-\alpha)$-ten Associirten zu derselben Art**) gehört.

Von diesem allgemeinen Satze habe ich dann Anwendungen gemacht auf die Differentialgleichungen $(2p)$-ter Ordnung, welcher die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale genügen, indem ich nachwies, dass alle Associirten derselben von der zweiten bis zur $(2p-2)$-ten reductibel sind und zwar so, dass alle geraden Associirten ein rationales Integral besitzen, während die ungeraden durch die Integrale einer Differentialgleichung befriedigt werden, welche mit der ursprünglichen zu derselben Art gehört.

1.

In seiner Abhandlung in diesem Journal Bd. 71, S. 91 hat mein Vater gezeigt, dass die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale als Functionen eines Verzweigungspunktes, einer linearen homogenen Diffe-

---

*) Dieses Journal, Bd. 71, S. 100.

**) Unter „Art“ wird hier im Anschluss an Herrn *Poincaré*, der die Bezeichnung espèce (Acta Mathematica Bd. V S. 212) anwendet, dasselbe verstanden, was mein Vater (Sitzungsberichte 1888, S. 1275) „Klasse“ nennt. Vgl. *L. Schlesinger*, Handbuch u. s. w. Bd. II, 1, die Fussnote S. 366.

rentialgleichung der *Fuchs*schen Klasse genügen. Bedeutet p das Geschlecht der zu Grunde gelegten *Riemann*schen Fläche, so ist die Ordnung dieser Differentialgleichung im allgemeinen die $(2p)$-te*) und die Coefficienten der zu den singulären Punkten gehörigen Umlaufsrelationen sind ganze Zahlen**). Es folgt daraus, dass die $p$te Associirte reductibel sein muss***). Im Falle $p = 2$, wo die Ordnung der Differentialgleichung die vierte wird, die Integrale der $p = 2$ten Associirten also Determinanten zweiten Grades werden, hat mein Vater die Reductibilität dieser zweiten Associirten genauer untersucht und gefunden, dass sie durch ein rationales Integral befriedigt wird†).

Wir wollen zunächst untersuchen, ob sich dasselbe allgemein für die Differentialgleichung der Determinanten zweiten Grades, also für die $(2p-2)$-te Associirte aussagen lässt.

Betrachten wir das hyperelliptische Integral erster Gattung

$$(1.) \qquad J = \int \frac{dz}{\sqrt{\psi(z)(z-x)}},$$

wo $\psi(z) = (z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_{2p})$ ist, und $a_1, a_2, \ldots, a_{2p}$ feste constante Werthe bedeuten und setzen

$$(2.) \qquad y_i = \int_x^{a_i} \frac{dz}{\sqrt{\psi(z)(z-x)}}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p)$$

so sind $y_1, y_2, \ldots, y_{2p}$ die Hälften von Periodicitätsmoduln des Integrales (1.) und bilden als Functionen von x aufgefasst ein Fundamentalsystem einer linearen homogenen Differentialgleichung, welche die Gestalt hat††):

$$(3.) \qquad \psi(x)y^{(2p)} + \varepsilon_1\psi'(x)y^{(2p-1)} + \cdots + \varepsilon_{2p}\psi^{(2p)}(x)y = 0,$$

wo die oberen Accente Ableitungen nach x und die Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{2p}$ constante rationale Zahlen bedeuten.

Die singulären Stellen von (3.) sind $a_1, a_2, \ldots, a_{2p}, \infty$; bezeichnen wir das, was aus einer Function von x bei einem Umlaufe um $x = a_i$ wird, durch dasselbe Functionszeichen mit einem darüber gesetzten Strich, so er-

---

*) A. a. O. S. 108.

**) A. a. O. S. 100.

***) *L. Fuchs*, Sitzungsberichte der Akademie zu Berlin, 1888, S. 1285 No. 14 und Nr. 13, Satz V.

†) Sitzungsberichte 1889, S. 713—715.

††) Dieses Journal, Bd. 71, S. 118.

giebt*) sich:

$$(4.)\qquad \begin{cases} \bar{y}_i = y_i, \\ \bar{y}_k = y_k - 2y_i, & \text{wenn} \quad k < i, \\ \bar{y}_k = y_k + 2y_i, & \text{wenn} \quad k > i. \end{cases}$$

Der $(2p-2)$-ten Associirten von (3.) genügen, wenn wir die Bezeichnung (Vgl. Sitzungsberichte 1889, S. 714 Gleichung 4):

$$(5.)\qquad (\lambda\mu) = \begin{vmatrix} y_\lambda & y_\mu \\ y'_\lambda & y'_\mu \end{vmatrix}$$

einführen, die Determinanten

$$(6.)\qquad \begin{cases} (12), \\ (13), \quad (23), \\ (14), \quad (24), \quad (34), \\ (15), \quad (25), \quad (35), \quad (45), \\ (16), \quad (26), \quad (36), \quad (46), \quad (56), \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ (1,2p), \quad (2,2p), \quad (3,2p), \quad (4,2p), \quad (5,2p), \quad \ldots, \quad (2p-1,\ 2p) \end{cases}$$

und bilden auch ein Fundamentalsystem derselben**).

Bedeutet

$$(7.)\qquad \begin{cases} [\lambda] = -1, & \text{wenn} \quad \lambda < i, \\ [\lambda] = \ \ 0, & \text{wenn} \quad \lambda = i, \\ [\lambda] = +1, & \text{wenn} \quad \lambda > i, \end{cases}$$

so folgt aus den Gleichungen (4.) nach einem Umlaufe um $x = a_i$:

$$(\overline{\lambda\mu}) = \begin{vmatrix} y_\lambda + 2[\lambda]y_i, & y_\mu + 2[\mu]y_i \\ y'_\lambda + 2[\lambda]y'_i, & y'_\mu + 2[\mu]y'_i \end{vmatrix}$$

oder

$$(8.)\qquad (\overline{\lambda\mu}) = (\lambda\mu) + 2[\lambda](i\mu) + 2[\mu](\lambda i).$$

Bilden wir nun den Ausdruck

$$(9.)\qquad w = \sum_{\lambda,\mu} (-1)^{\lambda+\mu}(\lambda,\ \mu),$$

wo λ, μ alle Werthe der Zahlenreihe 1, 2, ..., $2p$ durchlaufen und zwar

---

*) a. a. O. S. 100.

**) Sitzungsberichte, 1888, S. 1119, Nr. 3, Satz I.

so, dass $\lambda < \mu$ ist, dann folgt aus (8.):

$$\bar{w} = w + 2P, \tag{10.}$$

wo

$$P = \sum_{\lambda<\mu=1}^{2p} (-1)^{\lambda+\mu}[\lambda](i\mu) + \sum_{\lambda<\mu=1}^{2p} (-1)^{\lambda+\mu}[\mu](\lambda i). \tag{11.}$$

Nun ist klar, dass man in (9.) die Summation auch so vornehmen kann, dass $\lambda \leqq \mu$ ist, da ja Glieder $(\lambda\lambda)$ identisch verschwinden. Daher ist, wenn man im zweiten Theile von P noch die Bezeichnung der Summationsindices umkehrt:

$$P = \sum_{\lambda\leqq\mu} (-1)^{\lambda+\mu}[\lambda](i\mu) + \sum_{\lambda\geqq\mu} (-1)^{\lambda+\mu}[\lambda](\mu i)$$

oder

$$P = \sum_{\mu=1}^{2u} (-1)^{\mu}(i\mu) P_\mu,$$

wo

$$P_\mu = \sum_{\lambda=1}^{\mu} (-1)^{\lambda}[\lambda] - \sum_{\lambda=\mu}^{2p} (-1)^{\lambda}[\lambda];$$

in einer der beiden Summen der letzten Gleichung wird λ einmal den Werth i annehmen. Geschieht dies etwa in der ersten Summe — der andere Fall erledigt sich genau ebenso — so können wir, da $[i] = 0$, schreiben

$$P_\mu = \sum_{\lambda=1}^{i-1} (-1)^{\lambda}[\lambda] + \sum_{\lambda=i+1}^{\mu} (-1)^{\lambda}[\lambda] - \sum_{\lambda=\mu}^{2p} (-1)^{\lambda}[\lambda].$$

Nun ist zu Folge (7.) in der ersten Summe $[\lambda] = -1$, in der zweiten und dritten dagegen $[\lambda] = +1$, also haben wir

$$P_\mu = -\sum_{\lambda=1}^{i-1} (-1)^{\lambda} + \sum_{\lambda=i+1}^{\mu} (-1)^{\lambda} - \sum_{\lambda=\mu}^{2p} (-1)^{\lambda}.$$

Setzen wir endlich in der zweiten Summe $\lambda = \lambda_1 + 1$ und bezeichnen wieder λ_1 durch λ, so kommt

$$P_\mu = -\sum_{\lambda=1}^{2p} (-1)^{\lambda} = 0.$$

Hieraus ergiebt sich aber, dass auch $P = 0$ ist. Es bleibt also zu Folge (10.) der Ausdruck

$$(12.) \quad \left\{ \begin{array}{lllll} w = & -(12) & & & \\ & +(13) & -(23) & & \\ & -(14) & +(24) & -(34) & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & -(1,\ 2p) & +(2,\ 2p) & -(3,\ 2p) & +\cdots -(2p-1,\ 2p) \end{array} \right.$$

bei allen Umläufen von x um die singulären Stellen $a_1, a_2, \ldots, a_{2p}$ ungeändert. Es kann sich also w bei keinem Umlaufe von x ändern und ist folglich eine eindeutige Function von x. Da aber die Differentialgleichung (3.) der *Fuchs*schen Klasse angehört und die $y_1, y_2, \ldots, y_{2p}$, wie die $y_1', y_2', \ldots, y_{2p}'$ daher nur von endlicher Ordnung unendlich werden können, so muss w folglich eine rationale Function von x sein.

Es bestätigt sich also der folgende Satz:

I. Die $(2p-2)$-te Associirte der Gleichung (3.) *besitzt ein rationales Integral.*

2.

Es dürfte von Interesse sein noch den expliciten Ausdruck in x für das rationale Integral der Gleichung (3.) voriger Nummer anzugeben.

Sei

$$(1.) \qquad u_k = \int_x^{a_k} \frac{f(z)\,dz}{\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_{n-1})(z-x)}}, \qquad (k=1, 2, \ldots, n-1)$$

wo $f(z)$ eine ganze rationale Function von z ist, deren Coefficienten ebenso wie $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ von x unabhängige Grössen sein mögen, dann lehren die Untersuchungen meines Vaters*), dass die u_k an der Stelle $x = a_i$ zu positiven ganzen Exponenten gehören, wobei die Null nicht ausgeschlossen ist.

Um die Exponenten, zu denen die u_k für $x = \infty$ gehören, zu untersuchen, substituiren wir in u_k $z = \frac{1}{\zeta}$, $x = \frac{1}{\xi}$, dann wird:

$$z - a_i = \frac{1-\zeta a_i}{\zeta} = -\frac{a_i}{\zeta}\left(\zeta - \frac{1}{a_i}\right),$$

$$z - x = \frac{1-\zeta x}{\zeta} = -\frac{x}{\zeta}(\zeta - \xi),$$

also:

$$(2.) \quad \begin{cases} u_k = \displaystyle\int_\xi^{\frac{1}{a_k}} \frac{(-1) f\left(\frac{1}{\zeta}\right) \frac{1}{\zeta^2} \zeta^{\frac{n+1}{2}}\, d\zeta}{\sqrt{(-1)^n \left(a_1 . a_2 \cdots \frac{1}{\xi}\right) \zeta \left(\zeta - \frac{1}{a_1}\right) \cdots \left(\zeta - \frac{1}{a_{n-1}}\right)(\zeta - \xi)}} \\ \text{oder:} \\ u_k = \dfrac{\xi^{\frac{1}{2}} v_k}{(-1)^{\frac{n-2}{2}} (a_1 . a_2 \ldots a_{n-1})^{\frac{1}{2}}}, \end{cases}$$

*) Siehe dieses Journal, Bd. 71, S. 119—121.

wenn wir

$$(3.)\qquad v_k = \int_{\xi}^{\frac{1}{a_k}} \frac{f\left(\frac{1}{\zeta}\right)\zeta^{\frac{n+1}{2}-2}}{\sqrt{\zeta\left(\zeta-\frac{1}{a_1}\right)\left(\zeta-\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(\zeta-\frac{1}{a_{n-1}}\right)(\zeta-\xi)}}$$

setzen.

Nehmen wir an, dass $n=2p+1$ eine ungerade Zahl, wie in (1.) voriger Nummer, ist, und bedeutet ε den Grad von $f(z)$, so wird

$$f\left(\frac{1}{\zeta}\right)\zeta^{\frac{n+1}{2}-2}$$

dann und nur dann eine ganze rationale Function von ζ werden, wenn

$$\varepsilon \leqq \frac{n+1}{2}-2$$

oder

$$\varepsilon \leqq p-1$$

ist, d. h. wenn die u_k Integrale erster Gattung sind. In diesem Falle haben die Integrale v_k (3.) aber wieder genau die Gestalt der u_k (1.). Die u_k gehören also, wie aus (2.) hervorgeht an der Stelle $\xi=0$ oder $x=\infty$ mindestens zum Exponenten $\frac{1}{2}$ und wir sehen daher, *dass die Periodicitätsmoduln der Integrale erster Gattung überall zu positiven Exponenten gehören, wobei im Unendlichen die Null ausgeschlossen ist.*

Wir kehren nun wieder zu dem Integrale (1.) voriger Nummer zurück. Die Gleichungen (4.) derselben Nummer lehren, dass sich y_i an der Stelle $x=a_i$ eindeutig verhält, und da wir eben gesehen haben, dass y_i als Periodicitätsmodul eines Integrales erster Gattung an der Stelle $x=a_i$ auch zu einem positiven Exponenten gehört, so wird es sich daselbst nach positiven ganzen Potenzen von $x-a_i$ entwickeln lassen. Man findet, wenn man sich y_i als die Hälfte eines Integrales über eine die Punkte x und a_i umgebende geschlossene Curve denkt, so dass man unter dem Integralzeichen unbedenklich differentiiren kann, leicht: (8.)

$$(4.)\qquad y_i = -\pi i\psi'(a_i)^{-\frac{1}{2}} + \frac{\pi i}{8}\psi'(a_i)^{-\frac{3}{2}}\psi^{(2)}(a_i)(x-a_i)+\cdots;$$

dabei bedeuten $\psi'(a_i)$, $\psi^{(2)}(a_i)$ u. s. w. diejenigen Werthe, die man erhält, wenn man in $\frac{d\psi(x)}{dx}$, $\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}$, u. s. w. $x=a_i$ setzt.

Wir suchen nun nach diesen Vorbereitungen, das Verhalten der rationalen Function w von x (Gleichung (12.) voriger Nummer) an der

Stelle $x = a_i$ zu bestimmen. Aus den Gleichungen (4.) voriger Nummer ergiebt sich daselbst*)

$$(5.) \qquad y_\alpha = \mathfrak{P}_{\alpha i} + \frac{[\alpha]}{\pi i} y_i \log(x - a_i),$$

wo $\mathfrak{P}_{\alpha i}$ eine nach positiven ganzen Potenzen von $(x - a_i)$ fortschreitende Reihe ist und $[\alpha]$ wieder die in Gleichung (7.) voriger Nummer angegebene Bedeutung hat.

Daraus folgt für $(i\alpha)$

$$(6.) \qquad (i\alpha) = \begin{vmatrix} y_i, & \mathfrak{P}_{\alpha i} + [\alpha]\frac{y_i}{\pi i}\log(x-a_i) \\ y_i', & \mathfrak{P}_{\alpha i}' + [\alpha]\frac{y_i}{\pi i}\frac{1}{x-a_i} + [\alpha]\frac{y_i'}{\pi i}\log(x-a_i) \end{vmatrix}$$

oder

$$(i\alpha) = [\alpha]\frac{y_i^2}{\pi i}\frac{1}{x-a_i} + (y_i\mathfrak{P}_{\alpha i}' - y_i'\mathfrak{P}_{\alpha i}),$$

also zufolge (4.)

$$(7.) \qquad (i\alpha) = [\alpha]\frac{\pi i \psi'(a_i)^{-1}}{x-a_i} + \varphi_{\alpha i},$$

wo $\varphi_{\alpha i}$ eine nach positiven ganzen Potenzen von $(x - a_i)$ fortschreitende Reihe bedeutet.

Weiter ergiebt sich für $\alpha \gtrless i$, $\beta \gtrless i$:

$$(8.) \qquad (\alpha\beta) = \begin{vmatrix} \mathfrak{P}_{\alpha i} + [\alpha]\frac{y_i}{\pi i}\log(x-a_i), & \mathfrak{P}_{\beta i} + [\beta]\frac{y_i}{\pi i}\log(x-a_i) \\ \mathfrak{P}_{\alpha i}' + [\alpha]\frac{y_i}{\pi i(x-a_i)} + [\alpha]\frac{y_i'}{\pi i}\log(x-a_i), & \mathfrak{P}_{\beta i}' + [\beta]\frac{y_i}{\pi i(x-a_i)} + [\beta]\frac{y_i'}{\pi i}\log(x-a_i) \end{vmatrix}$$

oder:

$$(9.) \qquad \begin{cases} (\alpha\beta) = [[\beta]\mathfrak{P}_{\alpha i} - [\alpha]\mathfrak{P}_{\beta i}]\frac{y_i}{\pi i}\frac{1}{x-a_i} \\ \qquad + [\mathfrak{P}_{\alpha i}\mathfrak{P}_{\beta i}' - \mathfrak{P}_{\alpha i}'\mathfrak{P}_{\beta i}] - [[\beta]\mathfrak{P}_{\alpha i}' - [\alpha]\mathfrak{P}_{\beta i}']\frac{y_i}{\pi i}\log(x-a_i) \\ \qquad + [[\beta]\mathfrak{P}_{\alpha i} - [\alpha]\mathfrak{P}_{\beta i}]\frac{y_i'}{\pi i}\log(x-a_i). \end{cases}$$

Wir sehen zunächst, dass w nur von erster Ordnung unendlich werden kann, denn die logarithmischen Glieder müssen sich ja, da w eine

*) Siehe die Gleichungen meines Vaters, Sitzungsberichte 1890, S. 21.

rationale Function von x ist, herausheben. Nur bei den Gliedern von w, welche i nicht in der Klammer haben, treten, wie aus (7.) und (9.) hervorgeht, Logarithmen auf. Alle diese Glieder fassen wir zusammen in einen Ausdruck

$$(10.)\quad \left\{\begin{aligned} P = {} & \frac{y_i}{\pi i}\frac{1}{x-a_i}\Sigma\pm[[\beta]\mathfrak{P}_{\alpha i}-[\alpha]\mathfrak{P}_{\beta i}]+\Sigma\pm[\mathfrak{P}_{\alpha i}\mathfrak{P}'_{\beta i}-\mathfrak{P}'_{\alpha i}\mathfrak{P}_{\beta i}] \\ & -\frac{y_i}{\pi i}\log(x-a_i)\Sigma\pm[[\beta]\mathfrak{P}'_{\alpha i}-[\alpha]\mathfrak{P}'_{\beta i}] \\ & +\frac{y'_i}{\pi i}\log(x-a_i)\Sigma\pm[[\beta]\mathfrak{P}_{\alpha i}-[\alpha]\mathfrak{P}_{\beta i}]. \end{aligned}\right.$$

Die Gleichung (5.) lehrt, dass

$$(11.)\qquad [\beta]\mathfrak{P}_{\alpha i}-[\alpha]\mathfrak{P}_{\beta i} = [\beta]y_\alpha-[\alpha]y_\beta$$

ist. Setzen wir also

$$(12.)\qquad u = \Sigma\pm[[\beta]y_\alpha-[\alpha]y_\beta],$$

so geht der Ausdruck P über in

$$P = \frac{y_i}{\pi i}\frac{u}{x-a_i}+\Sigma\pm[\mathfrak{P}_{\alpha i}\mathfrak{P}'_{\beta i}-\mathfrak{P}'_{\alpha i}\mathfrak{P}_{\beta i}]-\frac{y_i u'}{\pi i}\log(x-a_i)+\frac{y'_i u}{\pi i}\log(x-a_i).$$

Da in P alle mit Logarithmen behafteten Glieder von w aufgenommen sind, so wird der logarithmische Theil von P verschwinden müssen, also:

$$y'_i u-y_i u' = 0,$$

d. h.

$$(13.)\qquad u = cy_i,$$

wo c eine Constante ist. Aus (12.) und (13.) folgt

$$(14.)\qquad \Sigma\pm[[\beta]y_\alpha-[\alpha]y_\beta] = cy_i,$$

eine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten zwischen $y_1, \ldots, y_{2p}$. Da $y_1, \ldots, y_{2p}$ aber linear unabhängig sind, so müssen die Coefficienten von (14.) einzeln verschwinden. Da links y_i nicht vorkommt, so folgt

$$c = 0,$$

d. h. zufolge (13.)

$$u = 0.$$

Mithin lässt sich P nach positiven ganzen Potenzen von $(x-a_i)$ entwickeln.

Wenn wir also das Residuum von w für $x=a_i$ aufsuchen wollen, so brauchen wir uns dabei nur an die i enthaltenden Glieder zu halten.

Nun ist zufolge (7.)

$$\operatorname*{Res}_{x=a_i}(i\alpha) = [\alpha]\pi i\psi'(a_i)^{-1},$$

und da $(i\alpha) = -(\alpha i)$, so muss

$$\operatorname*{Res}_{x=a_i}(\alpha i) = -[\alpha]\pi i\psi'(a_i)^{-1}$$

sein. Die i enthaltenden Glieder von w sind nun

$$-(i-1,\ i)+(i-2,\ i)-\cdots\pm(1i)-(i,\ i+1)+(i,\ i+2)-\cdots\pm(i,\ 2p),$$

also wird

$$\operatorname*{Res}_{x=a_i} w = \pi i\psi'(a_i)^{-1}\{\underbrace{-1+1-\cdots\pm 1}_{i-1 \text{ Glieder}}\}+\pi i\psi'(a_i)^{-1}\{\underbrace{-1+1-\cdots\pm 1}_{2p-i \text{ Glieder}}\}.$$

Je nachdem i gerade oder ungerade ist, wird der Factor des ersten Theiles -1 und der des zweiten Theiles Null oder der des ersten Theiles Null und der des zweiten -1.

Demnach ist also allemal

$$\operatorname*{Res}_{x=a_i} w = -\pi i\psi'(a_i)^{-1}.$$

Es ist klar, dass die $(k\lambda)$ keine anderen Unendlichkeitsstellen haben können, als die y_k selbst. Also wird w die Gestalt haben

$$(15.)\quad w = -\pi i\left\{\frac{\psi'(a_1)^{-1}}{x-a_1}+\frac{\psi'(a_2)^{-1}}{x-a_2}+\cdots+\frac{\psi'(a_{2p})^{-1}}{x-a_{2p}}\right\}+G(x),$$

wo $G(x)$ eine ganze rationale Function von x ist.

Um die Function $G(x)$ zu bestimmen, untersuchen wir das Verhalten von w im Unendlichen. Macht x einen Umlauf um den unendlich fernen Punkt, so ergiebt sich*)

$$(16.)\qquad \bar{y}_\alpha = -y_\alpha+2\{y_2-y_1+y_4-y_3+\cdots+y_{2p}-y_{2p-1}\}.$$

Wenn wir also

$$y_2-y_1+y_4-y_3+\cdots+y_{2p}-y_{2p-1} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\mathfrak{Q}\left(\frac{1}{x}\right)$$

setzen, so werden wir erhalten

$$(17.)\qquad y_\alpha = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\mathfrak{P}_\alpha+\frac{1}{\pi i}\mathfrak{Q}\log\frac{1}{x}\right\},$$

wo $\mathfrak{P}_\alpha$ und $\mathfrak{Q}$ nach positiven ganzen Potenzen von $\frac{1}{x}$ fortschreitende Reihen

*) Siehe die Arbeit meines Vaters, dieses Journal Bd. 71, S. 101.

sein werden, da ja der Exponent zu welchem y_α im Unendlichen gehört, nach den Ergebnissen der Seiten 7 und 8, gleich $\frac{1}{2}$ vermehrt um eine positive ganze Zahl ist.

Aus der Gleichung (17.) folgt aber durch Differentiation unmittelbar, dass die ersten Ableitungen der y_α im Unendlichen zu positiven Exponenten gehören.

Demnach gehört aber auch w zu einem positiven Exponenten und wird also, da sich logarithmische Glieder herausheben, im Unendlichen verschwinden.

Die ganze rationale Function $G(x)$ (15.) wird daher den Werth Null haben müssen.

Wir erhalten also endlich

$$w = -\pi i \left\{ \frac{\psi'(a_1)^{-1}}{x-a_1} + \frac{\psi'(a_2)^{-1}}{x-a_2} + \cdots + \frac{\psi'(a_{2p})^{-1}}{x-a_{2p}} \right\}$$

oder

$$(18.) \qquad w = \frac{-\pi i}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{2p})}$$

und somit den Satz:

II. *Die $(2p-2)$-te Associirte wird durch den reciproken Werth von*

$$\psi(x) = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{2p})$$

befriedigt.

3.

Aus den Ergebnissen der ersten Nummer folgen die *Weierstrass*schen Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln der Integrale erster und zweiter Gattung in dem allgemeinen Falle im Wesentlichen ebenso, wie sie sich im Falle $p = 2$ (Sitzungsberichte, 1888, S. 1285; und 1889, S. 715—717) ergeben haben.

Nach einem allgemeinen Satze meines Vaters, welcher unmittelbar aus den Formeln im Journal für Mathematik, Bd. 73 S. 329 Gleichung (1.) durch Elimination von $2p-1$ der Grössen auf der rechten Seite folgt und der auch (Sitzungsberichte, 1888 S. 1286 Satz I) für hyperelliptische Integrale ausgesprochen ist*), genügen die Periodicitätsmoduln von *Abel*schen Integralen erster oder zweiter Gattung linearen homogenen Differentialgleichun-

*) Vgl. auch *L. Schlesinger*, dieses Journal, Bd. 117, S. 164.

gen, welche mit der Differentialgleichung, der die Periodicitätsmoduln eines speciellen Integrales erster Gattung genügen, zu derselben Art gehören.

Setzt man also

$$\eta = \varphi_0 y + \varphi_1 y' + \cdots + \varphi_{2p-1} y^{(2p-1)}, \tag{1.}$$

wo y ein Integral der Gleichung (3.) No. 1 ist und die $\varphi_\varkappa$ rationale Functionen von x bedeuten, so kann man bei geeigneter Wahl der $\varphi_\varkappa$ alle Periodicitätsmoduln von Integralen erster oder zweiter Gattung der *Riemann*schen Fläche

$$s^2 = \psi(z)(z-x) \tag{2.}$$

in der Form (1.) darstellen.

Sind $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{2p}$, sowie $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_{2p}$ die den $y_1, y_2, \ldots, y_{2p}$ der Gleichung (3.) No. 1 entsprechenden Periodicitätsmoduln zweier Integrale erster oder zweiter Gattung, so ist

$$\begin{cases} \eta_\alpha = \varphi_0 y_\alpha + \varphi_1 y'_\alpha + \cdots + \varphi_{2p-1} y_\alpha^{(2p-1)}, \\ \zeta_\alpha = \psi_0 y_\alpha + \psi_1 y'_\alpha + \cdots + \psi_{2p-1} y_\alpha^{(2p-1)}. \end{cases} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, 2p) \tag{3.}$$

Wir bilden nun (vgl. Sitzungsberichte, 1889, S. 715 No. 17, Gleichung (2.)) die Determinanten

$$\begin{vmatrix} \eta_\alpha & \eta_\beta \\ \zeta_\alpha & \zeta_\beta \end{vmatrix} = [\alpha\beta], \tag{d.}$$

dann wird:

$$[\alpha\beta] = \begin{vmatrix} \varphi_0 y_\alpha + \varphi_1 y'_\alpha + \cdots + \varphi_{2p-1} y_\alpha^{(2p-1)}, & \varphi_0 y_\beta + \varphi_1 y'_\beta + \cdots + \varphi_{2p-1} y_\beta^{(2p-1)} \\ \psi_0 y_\alpha + \psi_1 y'_\alpha + \cdots + \psi_{2p-1} y_\alpha^{(2p-1)}, & \psi_0 y_\beta + \psi_1 y'_\beta + \cdots + \psi_{2p-1} y_\beta^{(2p-1)} \end{vmatrix}, \tag{4.}$$

was sich in die Form bringen lässt

$$[\alpha\beta] = \sum_{\varkappa,\lambda} \begin{vmatrix} \varphi_\varkappa y_\alpha^{(\varkappa)} + \varphi_\lambda y_\alpha^{(\lambda)} & \varphi_\varkappa y_\beta^{(\varkappa)} + \varphi_\lambda y_\beta^{(\lambda)} \\ \psi_\varkappa y_\alpha^{(\varkappa)} + \psi_\varkappa y_\alpha^{(\lambda)} & \psi_\varkappa y_\beta^{(\varkappa)} + \psi_\lambda y_\beta^{(\lambda)} \end{vmatrix}, \tag{5.}$$

wo die Σ bedeutet, dass alle möglichen Zahlen der Reihe $0, 1, \ldots, 2p-1$ für $\varkappa, \lambda$ genommen werden sollen, so dass $\varkappa < \lambda$ ist. Oder nach dem Multiplicationstheorem der Determinanten:

$$[\alpha\beta] = \sum_{\varkappa,\lambda} \begin{vmatrix} \varphi_\varkappa & \varphi_\lambda \\ \psi_\varkappa & \psi_\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_\alpha^{(\varkappa)} & y_\beta^{(\varkappa)} \\ y_\alpha^{(\lambda)} & y_\beta^{(\lambda)} \end{vmatrix}. \tag{6.}$$

Nach einem Satze meines Vaters, der aus der Gleichung (3.) der Sitzungsberichte 1888 S. 1119 No. 4 folgt und den Herr *Ludwig Schlesinger* auf beliebige Unterdeterminanten ausgedehnt hat*), genügt eine Unterdeterminante

*) Handbuch u. s. w. Bd. II, 1, S. 127.

$$B = \begin{vmatrix} y_\alpha^{(\varkappa)} & y_\beta^{(\varkappa)} & \cdots & y_\vartheta^{(\varkappa)} \\ y_\alpha^{(\lambda)} & y_\beta^{(\lambda)} & \cdots & y_\vartheta^{(\lambda)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_\alpha^{(\sigma)} & y_\beta^{(\sigma)} & \cdots & y_\vartheta^{(\sigma)} \end{vmatrix}$$

der Determinante von $y_1, \ldots, y_{2p}$, wo $y_\alpha, y_\beta, \ldots, y_\vartheta$ eine beliebige Combination zu m Elementen der Functionen $y_1, y_2, \ldots, y_{2p}$ ist, einer Differentialgleichung, welche mit der $(n-m)$-ten Associirten zur selben Art gehört; so dass man also, wenn

$$A = \begin{vmatrix} y_\alpha & y_\beta & \cdots & y_\vartheta \\ y'_\alpha & y'_\beta & \cdots & y'_\vartheta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_\alpha^{(m-1)} & y_\beta^{(m-1)} & \cdots & y_\vartheta^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

gesetzt wird und $\nu = \binom{n}{m}$ die Ordnung der $(n-m)$-ten Associirten angiebt, die Gleichung hat

$$B = P_0 A + P_1 A' + \cdots + P_{\nu-1} A^{(\nu-1)}, \tag{7.}$$

wo $P_0, P_1, \ldots, P_{\nu-1}$ rationale Functionen von x sind, welche zwar von der Wahl der $\varkappa, \lambda, \ldots, \sigma$ nicht aber von der der $\alpha, \beta, \ldots, \vartheta$ abhängen. In dem vorliegenden Falle haben wir daher

$$\begin{vmatrix} y_\alpha^{(\varkappa)} & y_\beta^{(\varkappa)} \\ y_\alpha^{(\lambda)} & y_\beta^{(\lambda)} \end{vmatrix} = P_0^{(\varkappa\lambda)}(\alpha\beta) + P_1^{(\varkappa\lambda)}(\alpha\beta)' + \cdots + P_{\nu-1}^{(\varkappa\lambda)}(\alpha\beta)^{(\nu-1)}, \tag{8.}$$

wenn hier $\nu = \binom{m}{2}$ die Ordnung der $(2p-2)$-ten Associirten der Gleichung (3.) No. 1 bedeutet.

Aus (6.) und (8.) folgt:

$$[\alpha\beta] = A_0(\alpha\beta) + A_1(\alpha\beta)' + \cdots + A_{\nu-1}(\alpha\beta)^{(\nu-1)}, \tag{9.}$$

wo

$$A_i = \sum_{\varkappa,\lambda} \begin{vmatrix} \varphi_\varkappa & \varphi_\lambda \\ \psi_\varkappa & \psi_\lambda \end{vmatrix} P_i^{(\varkappa\lambda)} \tag{10.}$$

rationale von der Wahl von α, β unabhängige Grössen sind.

Die $[\alpha\beta]$ genügen somit einer Differentialgleichung, welche mit der $(2p-2)$-ten Associirten der Gleichung (3.) No. 1 zu derselben Art gehört. Da nun die $(2p-2)$-te Associirte, wie wir sahen ein rationales Integral besitzt, so wird auch die Differentialgleichung der $[\alpha\beta]$ durch ein solches befriedigt werden müssen. Man erhält dieses rationale Integral, wenn man

in w (S. 12. Gl. (12.)) die runden Klammern durch eckige ersetzt. Bezeichnet man nämlich den sich dabei ergebenden Ausdruck durch w_1, so hat man zufolge (9.)

$$(11.) \qquad w_1 = A_0 w + A_1 w' + \cdots + A_{\nu-1} w^{(\nu-1)}.$$

$$(12.) \quad \left\{ \begin{array}{llllll} w_1 = -[12] & & & & & \\ \quad +[13] & -[23] & & & & \\ \quad -[14] & +[24] & -[34] & & & \\ \quad \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \quad -[1,\ 2p]+[2,\ 2p] & -[3,\ 2p]+\cdots & -[2p-1,\ 2p] & & & \end{array} \right.$$

ist somit eine rationale Function von x.

In der Gleichung (12.) sind nun alle *Weierstrass*schen bilinearen Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln von Integralen erster und zweiter Gattung enthalten. Wir wollen diese Relationen insbesondere für die Integrale erster Gattung noch in die *Riemann*sche Form setzen.

Die Periodicitätsmoduln der Integrale erster Gattung können keine anderen Unendlichkeitsstellen haben, als $a_1, a_2, \ldots, a_{2p}, \infty$. Denken wir uns aber für eine Stelle $x = a_i$ oder $x = \infty$ die Entwickelungen der $\eta_\varkappa$ und $\zeta_\varkappa$ in w_1 eingesetzt, so müssen sich, da w_1 eine rationale Function von x ist, logarithmische Glieder herausheben. Da nun aber die $\eta_\varkappa$ und $\zeta_\varkappa$, wenn sie Periodicitätsmoduln von Integralen erster Gattung sind an einer Stelle $x = a_i$ oder $x = \infty$ (Vgl. S. 8) zu positiven Exponenten gehören, so kann folglich w_1 dann überhaupt nicht unendlich werden und ist also nach einem bekannten Satze der Functionentheorie eine Constante. Diese Constante hat aber den Werth Null, da die $\eta_\varkappa$ und $\zeta_\varkappa$ und daher auch w_1 im Unendlichen verschwinden (S. 8). (Vgl. *L. Schlesinger,* Handbuch u. s. w. Bd. II, 1, S. 505.)

Zwischen den Periodicitätsmoduln zweier Integrale erster Gattung besteht also zufolge (12.) die bilineare Relation:

$$(13.) \quad \left\{ \begin{array}{llllll} -[12] & & & & & \\ +[13] & -[23] & & & & \\ -[14] & +[24] & -[34] & & & \\ +[15] & -[25] & +[35] & -[45] & & \\ -[16] & +[26] & -[36] & +[46] & -[56] & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -[1,\ 2p]+[2,\ 2p] & -[3,\ 2p]+[4,\ 2p] & -[5,\ 2p]+\cdots & -[2p-1,\ 2p] & = 0. & \end{array} \right.$$

Um diese Relation in die *Riemann*sche Form zu bringen, denken wir uns die *Riemann*sche Fläche (2.) in der üblichen Weise in eine einfach zusammenhangende Fläche zerlegt.

Die Periodicitätsmoduln an den Querschnitten $\mathfrak{a}_\varkappa$, $\mathfrak{b}_\varkappa$ bezeichnen wir bezw. durch $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ für das Integral η und durch $A'_\varkappa$, $B'_\varkappa$ für das Integral ζ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, p)$. Dann ist:

$$(14.) \qquad \begin{cases} A_\varkappa = 2(\eta_{2\varkappa} - \eta_{2\varkappa-1} + \cdots + \eta_{2p} - \eta_{2p-1}), \\ A'_\varkappa = 2(\zeta_{2\varkappa} - \zeta_{2\varkappa-1} + \cdots + \zeta_{2p} - \zeta_{2p-1}) \end{cases} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p)$$

und

$$(15.) \qquad \begin{cases} B_\varkappa = 2(\eta_{2\varkappa-1} - \eta_{2\varkappa-2}), \\ B'_\varkappa = 2(\zeta_{2\varkappa-1} - \zeta_{2\varkappa-2}), \end{cases} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p)$$

wenn $\eta_0 = \zeta_0 = 0$ bedeutet.

Aus (14.) und (15.) ergiebt sich leicht:

$$(16.) \qquad \begin{cases} 2\eta_{2\varkappa-1} = B_1 + B_2 + \cdots + B_\varkappa + A_1 - A_\varkappa, \\ 2\eta_{2\varkappa} = B_1 + B_2 + \cdots + B_\varkappa + A_1 - A_{\varkappa+1}, \end{cases}$$

und ebenso

$$(17.) \qquad \begin{cases} 2\zeta_{2\varkappa-1} = B'_1 + B'_2 + \cdots + B'_\varkappa + A'_1 - A'_\varkappa, \\ 2\zeta_{2\varkappa} = B'_1 + B'_2 + \cdots + B'_\varkappa + A'_1 - A_{\varkappa+1}. \end{cases}$$

Denken wir uns nun die Gleichung (13.) mit 4 multiplicirt, so dass man statt η_α, ζ_α überall $2\eta_\alpha$, $2\zeta_\alpha$ geschrieben denken kann, so ergiebt die erste Verticalreihe daselbst, wenn man noch das identisch verschwindende Glied [11] hinzuzieht:

$$-\begin{vmatrix} 2\eta_1 & 2[-\eta_1 + \eta_2 - \eta_3 + \eta_4 - \cdots - \eta_{2p-1} + \eta_{2p}] \\ 2\zeta_1 & 2[-\zeta_1 + \zeta_2 - \zeta_3 + \zeta_4 - \cdots - \zeta_{2p-1} + \zeta_{2p}] \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante hat zufolge (14.) und (15.) den Werth:

$$-\begin{vmatrix} B_1 & A_1 \\ B'_1 & A'_1 \end{vmatrix}.$$

Die zweite und dritte Verticalreihe zusammengenommen ergeben, wenn man das identisch verschwindende [33] hinzunimmt:

$$-\begin{vmatrix} 2(\eta_3 - \eta_2) & 2(-\eta_3 + \eta_4 - \cdots - \eta_{2p-1} + \eta_{2p}) \\ 2(\zeta_3 - \zeta_2) & 2(-\zeta_3 + \zeta_4 - \cdots - \zeta_{2p-1} + \zeta_{2p}) \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} B_2 & A_2 \\ B'_2 & A'_2 \end{vmatrix}.$$

Allgemein die $(2\varkappa-2)$-te und $(2\varkappa-1)$-te Verticalreihe, wenn man das

identisch verschwindende $[2k-1, 2k-1]$ hinzunimmt:

$$-\begin{vmatrix} 2(\eta_{2\varkappa-1}-\eta_{2\varkappa-2}) & 2(-\eta_{2\varkappa-1}+\eta_{2\varkappa}-\cdots-\eta_{2p-1}+\eta_{2p}) \\ 2(\zeta_{2\varkappa-1}-\zeta_{2\varkappa-2}) & 2(-\zeta_{2\varkappa-1}+\zeta_{2\varkappa}-\cdots-\zeta_{2p-1}+\zeta_{2p}) \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} B_\varkappa & A_\varkappa \\ B'_\varkappa & A'_\varkappa \end{vmatrix}.$$

Man erhält also im ganzen aus (13.),

$$(18.) \qquad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A'_1 & B'_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A'_2 & B'_2 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} A_p & B_p \\ A'_p & B'_p \end{vmatrix} = 0,$$

welches die *Riemann*sche Form für die Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln der Integrale erster Gattung ist*). Solcher Relationen giebt es $\frac{p(p-1)}{2}$ entsprechend den p linear unabhängigen Integralen erster Gattung

4.

Es sei $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung

$$(A.) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n y = 0,$$

wo $p_1, p_2, \ldots, p_n$ rationale Functionen von x sind. Dann können wir auf Grund der Untersuchungen meines Vaters (Sitzungsberichte der Akademie 1888, S. 1117—1119) annehmen, dass im allgemeinen die $(n-\varkappa)$-te Associirte von (A.) wirklich von der $\binom{n}{\varkappa}$-ten Ordnung ist für jeden Werth von $\varkappa$. Unter dieser Voraussetzung erhält man (a. a. O. S. 1119 Satz I) ein Fundamentalsystem der $(n-\varkappa)$-ten Associirten auf folgende Weise:

Wir setzen analog der auf Seite 5 Gleichung (5.) eingeführten Bezeichnung allgemein:

$$(1.) \qquad \begin{vmatrix} y_\alpha & y_\beta & \cdots & y_\vartheta \\ y'_\alpha & y'_\beta & \cdots & y'_\vartheta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_\alpha^{(\varkappa-1)} & y_\beta^{(\varkappa-1)} & \cdots & y_\vartheta^{(\varkappa-1)} \end{vmatrix} = (\alpha, \beta, \ldots, \vartheta)$$

und nehmen in (1.) für $\alpha, \beta, \ldots, \vartheta$ alle möglichen Combinationen der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ zu $\varkappa$ Elementen ohne Wiederholung. Die sich ergebenden $\binom{n}{\varkappa}$ Determinanten bilden dann das gesuchte Fundamentalsystem und sind daher linear unabhängig.

*) Vgl. dieses Journal, Bd. 54 S. 144.

Nehmen wir nun an, die $(n-\varkappa)$-te Associirte besässe ein rationales Integral w, so wird sich dasselbe, wenn $\nu = \binom{n}{\varkappa}$ gesetzt wird, in der Form darstellen lassen müssen:

$$(2.)\quad \begin{cases} w = c_1(1,\ 2,\ \ldots,\ \varkappa-1,\ \varkappa)+c_2(1,\ 2,\ \ldots,\ \varkappa-1,\ \varkappa+1) \\ \qquad\qquad +\cdots+c_\nu(n-\varkappa+1,\ n-\varkappa+2,\ \ldots,\ n-1,\ n), \end{cases}$$

wo die $c_\varkappa$ wohl bestimmte nicht sämmtlich verschwindende Constanten bedeuten. Es sei z. B. c_1 von Null verschieden, dann wähle man unter den $n-\varkappa$ Zahlen $\varkappa+1,\ \varkappa+2,\ \ldots,\ n$ irgend eine Combination zu p Elementen aus, wo natürlich $p < n-\varkappa$ ist, und bezeichne dieselbe durch $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_p$, so dass $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ ein Integral der $(n-p)$-ten Associirten ist.

Nunmehr bilden wir ein Integral u_1 der $(n-\varkappa-p)$-ten Associirten, indem wir in w (2.) jedem Gliede noch die Zahlen $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_p$ in der Klammer vorsetzen, so dass wir von $(\alpha, \beta, \ldots, \vartheta)$ zu $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, \alpha, \beta, \ldots, \vartheta)$ übergehen. Wir erhalten so:

$$(3.)\quad \begin{cases} u_1 = c_1(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_p,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \varkappa-1,\ \varkappa) \\ \quad +c_2(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_p,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \varkappa-1,\ \varkappa+1)+\cdots \\ \quad +c_\nu(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_p,\ n-\varkappa+1,\ \ldots,\ n-1,\ n). \end{cases}$$

Der Ausdruck $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \alpha, \beta, \ldots, \vartheta)$ wird dann und nur dann verschwinden können, wenn eine der Zahlen $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_p$ einer der Zahlen $\alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \vartheta$ gleich wird, weil sonst eine der Determinanten (1.), wenn man dort, statt $\varkappa$, $p+\varkappa$ setzt, verschwinden würde und diese daher kein Fundamentalsystem der $(n-\varkappa-p)$-ten Associirten bilden würden. Es kann daher u_1 nicht identisch Null sein, da wenigstens c_1 und $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, 1, 2, \ldots, \varkappa-1, \varkappa)$ von Null verschieden sind und da zwischen den $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, \alpha, \beta, \ldots, \vartheta)$ keine homogene lineare Relation mit constanten Coefficienten bestehen kann.

Ordnen wir nun eine Determinante

$$\begin{vmatrix} y_{\lambda_1} & y_{\lambda^2} & \cdots & y_{\lambda_p}, & y_\alpha & y_\beta & \cdots & y_\vartheta \\ y'_{\lambda_1} & y'_{\lambda_2} & \cdots & y'_{\lambda_p}, & y'_\alpha & y'_\beta & \cdots & y'_\vartheta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y^{(p+\varkappa-1)}_{\lambda_1} & y^{(p+\varkappa-1)}_{\lambda_2} & \cdots & y^{(p+\varkappa-1)}_{\lambda_p}, & y^{(p+\varkappa-1)}_\alpha & y^{(p+\varkappa-1)}_\beta & \cdots & y^{(p+\varkappa-1)}_\vartheta \end{vmatrix}$$

zufolge des *Laplace*schen Determinantensatzes nach den ersten p Colonnen, so ergiebt sich, wenn wir den auf Seite 14 (7.) citirten Satz berücksichtigen,

$$(4.)\quad \begin{cases} (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, \alpha, \beta, \ldots, \vartheta) = \sum_{i=1}^{i=\binom{\varkappa+p}{p}} [P_{0i}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \\ +P_{1i}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)'+\cdots][Q_{0i}(\alpha, \beta, \ldots, \vartheta)+Q_{1i}(\alpha, \beta, \ldots, \vartheta)'+\cdots], \end{cases}$$

wo die $P_{i\varkappa}$ und $Q_{i\varkappa}$ rationale Functionen von x sind.

In derselben Weise entwickeln wir jede in u_1 vorkommende Determinante. Dann erhalten wir, da ja die $Q_{i\varkappa}$ von der Wahl der $\alpha, \beta, \ldots, \vartheta$ unabhängig sind:

$$(5.)\qquad u_1 = \sum_{i=1}^{\binom{\varkappa+p}{p}} (P_{0i}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)+P_{1i}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)'+\cdots)(Q_{0i}w+Q_{1i}w'+\cdots),$$

wo w das rationale Integral der $(n-\varkappa)$-ten Associirten (2.) ist. Oder endlich:

$$(6.)\qquad u_1 = A_0(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)+A_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)'+\cdots+A_{\varrho-1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)^{(\varrho-1)},$$

wenn $\varrho = \binom{n}{p}$ gesetzt wird, da man höhere als die $(\varrho-1)$-te Ableitung von $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ mittelst der $(n-p)$-ten Associirten herausschaffen kann. Die A_k sind rationale Functionen von x und können nicht alle identisch verschwinden, da sonst $u_1 = 0$ wäre, was, wie wir sahen, nicht angeht.

Die Gleichung (6.) lehrt, dass das Integral u_1 der $(n-\varkappa-p)$-ten Associirten gleichzeitig einer Differentialgleichung genügt, die mit der $(n-p)$-ten Associirten zu derselben Art gehört. Es ist ersichtlich, dass dieser selben Differentialgleichung alle die Integrale der $(n-\varkappa-p)$-ten Associirten genügen werden, die man erhält, wenn man für $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ alle diejenigen Combinationen zu p Elementen der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ wählt, die die Glieder von (3.) nicht sämmtlich verschwinden lassen. Wenn $c_1, c_2, \ldots, c_\nu$ alle von Null verschieden sind, kann man für $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ offenbar alle Combinationen zu p Elementen der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ nehmen.

Jedenfalls haben wir den Satz:

III. *Wenn die $(n-\varkappa)$-te Associirte von (A.) ein rationales Integral besitzt, so genügt der $(n-\varkappa-p)$-ten Associirten wenigstens ein Integral einer Differentialgleichung, welche mit der $(n-p)$-ten Associirten zu derselben Art gehört.*

Wenn der $(n-\varkappa-p)$-ten Associirten von (A.) deren Ordnung die $\binom{n}{\varkappa+p}$-te ist, Integrale einer Differentialgleichung genügen, welche mit der $(n-p)$-ten Associirten zu derselben Art gehört, also von nicht höherer als der

$\binom{n}{p}$-ten Ordnung ist, so muss zufolge der Definition der Reductibilität linearer Differentialgleichungen*) die $(n-\varkappa-p)$-te Associirte so lange reductibel sein, als

$$\binom{n}{\varkappa+p} > \binom{n}{p} \tag{7.}$$

ist, also

$$p < \frac{n-\varkappa}{2}. \tag{8.}$$

Da nun die Reductibilität der $(n-m)$-ten Associirten die der $m$ten unmittelbar zur Folge hat**), so ergiebt sich:

IV. *Wenn die $(n-\varkappa)$-te Associirte von $(A.)$ ein rationales Integral besitzt, so sind alle Associirten $(n-\varkappa-p)$-ter und $(\varkappa+p)$-ter Ordnung reductibel, wenn $p < \frac{n-\varkappa}{2}$.*

In dem Falle, wo $\varkappa < \frac{n}{2}$ ist, kann Satz IV auch so ausgesprochen werden:

Wenn die $(n-\varkappa)$-te Associirte von $(A.)$ ein rationales Integral besitzt, so sind alle Associirten von der $\varkappa$ten bis zur $(n-\varkappa)$-ten reductibel.

5.

Die Ergebnisse der No. 4 sollen nun wieder auf die Differentialgleichungen, denen die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale genügen, angewandt werden. In der No. 1 wurde bewiesen, dass die $(2p-2)$-te Associirte der Differentialgleichung (3.) durch ein rationales Integral befriedigt wird. In derselben Weise kann man für alle Differentialgleichungen, denen die Periodicitätsmoduln eines Integrales erster oder zweiter Gattung genügen, beweisen, dass ihre $(2p-2)$-ten Associirten durch ein rationales Integral befriedigt wird, da ja die Umlaufsrelationen (4.) No. 1, Seite 5 für alle diese Integrale dieselben sind. Aus Satz IV voriger Nummer können wir daher jetzt den Schluss ziehen:

V. *Für die Differentialgleichungen $(2p)$-ter Ordnung, denen die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale erster oder zweiter Gattung genügen, wenn p das Geschlecht der zu Grunde gelegten Riemannschen Fläche bedeutet, sind alle Associirten von der 2ten bis zur $(2p-2)$-ten reductibel.*

---

*) Siehe *Frobenius*, dieses Journal, Bd. 76, S. 236.

**) Siehe *L. Schlesinger*, Handbuch u. s. w. Bd. II, 1, S. 155.

Man kann aber über diese Reductibilität noch genaueres aussagen. Der $(2p-4)$-ten Associirten genügen nach Satz III voriger Nummer Integrale einer Differentialgleichung, welche mit der $(2p-2)$-ten Associirten zu derselben Art gehört. Es wäre nun von Interesse zu untersuchen, ob sich unter diesen Integralen auch das rationale Integral befindet und ob dann weiter auch die $(2p-6)$-te, $(2p-8)$-te u. s. w. Associirte durch ein rationales Integral befriedigt wird.

Um dieser Frage näher zu treten, betrachten wir, analog dem Gleichung (9.) No. 1 gemachten Ansatz den Ausdruck

$$(1.) \qquad w = \sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{2\varkappa}} (-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{2\varkappa}} (\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_{2\varkappa}),$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2\varkappa}$ alle Werthe der Zahlenreihe 1, 2, ..., $2p$ durchlaufen, so zwar, dass $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{2\varkappa}$. Natürlich kann auch hier wieder die Summation so vorgenommen werden, dass $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3 \leqq \cdots \leqq \lambda_{2\varkappa}$ ist, da ja $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2\varkappa})$ identisch verschwindet, wenn zwei oder mehrere der λ einander gleich werden. Wenn man die bei den Determinanten zweiten Grades gemachten Schlüsse hier wiederholt, so erkennt man, dass w bei einem Umlaufe um $x = a_i$ übergeht in

$$(2.) \qquad \bar{w} = w + 2P,$$

wo sich P auf die Form bringen lässt

$$(3.) \quad P = \sum_{\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots \leqq \lambda_{2\varkappa-1}} (-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{2\varkappa-1}} (i,\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_{2\varkappa-1}) P_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{2\varkappa-1}},$$

indem

$$(4.) \quad P_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{2\varkappa-1}} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda_1} (-1)^{\lambda}[\lambda] - \sum_{\lambda=\lambda_1}^{\lambda_2} (-1)^{\lambda}[\lambda] + \cdots - \sum_{\lambda=\lambda_{2\varkappa-1}}^{2p} (-1)^{\lambda}[\lambda]$$

ist. Es zeigt sich auch hier, dass $P_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{2\varkappa-1}}$ identisch verschwindet, woraus $P = 0$ folgt. Demnach bleibt w bei allen Umläufen von x ungeändert, ist also eine eindeutige und folglich auch eine rationale Function von x.

Somit erhalten wir den Satz:

VI. *Die $(2p-2\varkappa)$-te Associirte der Differentialgleichung* (3.) *No. 1 besitzt ein rationales Integral*

$$w = \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{2\varkappa}} (-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{2\varkappa}} (\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_{2\varkappa}),$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2\varkappa}$ alle Werthe der Zahlenreihe 1, 2, ..., $2p$ *durchlaufen, so zwar, dass $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{2\varkappa}$ ist.*

Dasselbe Verfahren lässt sich nun natürlich wieder auf jede Diffe-

rentialgleichung, der die Periodicitätsmoduln eines hyperelliptischen Integrales erster oder zweiter Gattung genügen, anwenden.

Wenn alle geraden Associirten rationale Integrale besitzen, so ergiebt sich unmittelbar aus Satz III voriger Nummer, ***dass alle ungeraden Associirten durch die Integrale von Differentialgleichungen befriedigt werden, die mit der ursprünglichen zu derselben Art gehören.***

Man könnte nun den Versuch machen, die rationalen Integrale der niedrigeren geraden Associirten in ähnlicher Weise zur Aufstellung von Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln zu benutzen, wie wir dies mit der $(2p-2)$-ten Associirten gethan haben. Allein es lässt sich zeigen, dass diese Relationen nur Umformungen der *Weierstrass*schen bilinearen Relationen sein würden. Wir wollen dies im Falle $p=4$ an dem rationalen Integrale der vierten Associirten zeigen.

Es ist, wie man leicht erkennt:

$$(5.) \qquad w = \sum_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4} (-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4}(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4) = \tfrac{1}{2}\sum_{\lambda_1,\lambda_2}(-1)^{\lambda_1+\lambda_2}u_{\lambda_1\lambda_2},$$

wo

$$(6.) \qquad \begin{cases} u_{\lambda_1\lambda_2} = -(\lambda_1,\ \lambda_2,\ 1,\ 2)+(\lambda_1,\ \lambda_2,\ 1,\ 3) \\ \qquad\qquad -(\lambda_1,\ \lambda_2,\ 1,\ 4)+\cdots-(\lambda_1,\ \lambda_2,\ 7,\ 8). \end{cases}$$

Seien nun $\xi, \eta, \zeta, \vartheta$ vier Integrale erster Gattung und $\xi_\varkappa, \eta_\varkappa, \zeta_\varkappa, \vartheta_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, 8)$ ihre Periodicitätsmoduln, dann bilden wir analog der No. 3 Gl. (d.) eingeführten Bezeichnung

$$(7.) \qquad \begin{vmatrix} \xi_\alpha & \xi_\beta & \xi_\gamma & \xi_\delta \\ \eta_\alpha & \eta_\beta & \eta_\gamma & \eta_\delta \\ \zeta_\alpha & \zeta_\beta & \zeta_\gamma & \zeta_\delta \\ \vartheta_\alpha & \vartheta_\beta & \vartheta_\gamma & \vartheta_\delta \end{vmatrix} = [\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta].$$

Setzen wir nun in (5.) und (6.) eckige Klammern an Stelle der runden, wobei $u_{\lambda_1\lambda_2}$ und w bezw. in U_{λ_1,λ_2} und W übergehen mögen, so ist

$$(8.) \qquad W = \tfrac{1}{2}\sum_{\lambda_1,\lambda_2}(-1)^{\lambda_1+\lambda_2}U_{\lambda_1,\lambda_2}.$$

Aber

$$(9.) \qquad U_{\lambda_1\lambda_2} = -[\lambda_1,\ \lambda_2,\ 1,\ 2]+[\lambda_1,\ \lambda_2,\ 1,\ 3]-\cdots-[\lambda_1,\ \lambda_2,\ 7,\ 8]$$

hat den Werth Null, wenn die *Weierstrass*schen bilinearen Relationen erfüllt sind, wie man unmittelbar einsieht, wenn man in allen Determinanten

zufolge des *Laplace*schen Determinantensatzes nach den beiden ersten Colonnen entwickelt. Demnach ist auch identisch $W = 0$, wenn die bilinearen Relationen erfüllt sind.

Auch die Reductibilität der ungeraden Associirten liefert so nichts Neues, wie wir noch im Falle $p = 3$ an der dritten Associirten zeigen wollen.

Die Rechnung, die hier noch verhältnissmässig leicht zu führen ist, zeigt, dass diese dritte Associirte kein rationales Integral besitzt. Dagegen genügen ihr sechs Integrale

$$(10.)\quad \begin{cases} u_1 = (123)-(124)+(125)-(126)+(134) \\ \qquad -(135)+(136)+(145)-(146)+(156), \\ u_2 = (123)-(124)+(125)-(126)+(234) \\ \qquad -(235)+(236)+(245)-(246)+(256), \\ u_3 = (123)-(134)+(135)-(136)+(234) \\ \qquad -(235)+(236)+(345)-(346)+(356), \\ u_4 = (124)-(134)+(145)-(146)+(234) \\ \qquad -(245)+(246)+(345)-(346)+(456), \\ u_5 = (125)-(135)+(145)-(156)+(235) \\ \qquad -(245)+(256)+(345)-(356)+(456), \\ u_6 = (126)-(136)+(146)-(156)+(236) \\ \qquad -(246)+(256)+(346)-(356)+(456), \end{cases}$$

die gleichzeitig die Integrale einer mit der ursprünglichen zu derselben Art gehörigen Differentialgleichung sind.

Bildet man aus u_1, wenn ξ, η, ζ drei Integrale erster Gattung sind

$$U_1 = [123]-[124]+\cdots+[156],$$

so erkennt man wieder unmittelbar, dass dieser Ausdruck den Werth Null hat, wenn die bilinearen *Weierstrass*schen Relationen erfüllt sind, indem man alle Determinanten nach der ersten Colonne entwickelt.

Die $p$te Associirte wird, wie sich aus dem Vorhergehenden ergiebt, nur dann ein rationales Integral besitzen müssen, wenn p eine gerade Zahl ist. Wenn p ungerade ist, hat die $p$te Associirte, wie uns der Fall $p = 3$ lehrte, im allgemeinen kein rationales Integral.

Wenn man also eine Differentialgleichung $(2m)$-ter Ordnung hat, deren Gruppe von in den Coefficienten auftretenden Parametern unabhängig

ist, so ist die $m$te Associirte, wie mein Vater (Sitzungsberichte 1888, Seite 1285 Satz V) gezeigt hat, reductibel, diese Reductibilität kann aber sehr verschieden ausfallen, wie das Beispiel der Differentialgleichungen, denen die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale genügen, gezeigt hat.

Zum Schlusse möchte ich auch an dieser Stelle meinem theuren und verehrten Vater *L. Fuchs* für die Anregung zu dieser Arbeit und seine liebevollen Rathschläge bei ihrer Ausarbeitung meinen herzlichsten Dank aussprechen.

Ueber die Principien der Mechanik.

(Von Herrn *Leo Königsberger* in Heidelberg.)

(Fortsetzung der Arbeit aus Band 118 Seite 275—350).

XII.

Anwendung der analytischen Transformation des kinetischen Potentials auf das *Weber*sche Gesetz.

Um den Fall, dass einzelne der *Lagrange*schen Bewegungsgleichungen in vollständige nach der Zeit genommene Differentialquotienten übergehen, oder, was in der Mechanik wägbarer Massen damit identisch ist, dass das kinetische Potential von einigen Coordinaten unabhängig ist, an einem Beispiel zu behandeln, wollen wir die Bewegung dreier materieller Punkte mit den Massen m_1, m_2, m_3 betrachten, deren Coordinaten der Bedingungsgleichung unterliegen

$$(1.) \qquad z_1 = f(x_1, y_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3),$$

und deren innere Kräfte durch eine Kräftefunction

$$U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3)$$

gegeben sein mögen.

Da das kinetische Potential

$$H = -T - U = -\frac{m_1}{2}(x_1'^2+y_1'^2+z_1'^2) - \frac{m_2}{2}(x_2'^2+y_2'^2+z_2'^2) - \frac{m_3}{2}(x_3'^2+y_3'^2+z_3'^2) - U$$

vermöge der Beziehung (1.) die Form annimmt

$$(2.) \quad \begin{cases} H = -\frac{m_1}{2}\left(1+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\right)x_1'^2 - \frac{m_1}{2}\left(1+\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)^2\right)y_1'^2 \\ \quad -\frac{1}{2}\left(m_2+m_1\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\right)x_2'^2 - \frac{1}{2}\left(m_2+m_1\left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right)^2\right)y_2'^2 \\ \quad -\frac{1}{2}\left(m_2+m_1\left(\frac{\partial f}{\partial z_2}\right)^2\right)z_2'^2 - \frac{1}{2}\left(m_3+m_1\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2\right)x_3'^2 \\ \quad -\frac{1}{2}\left(m_3+m_1\left(\frac{\partial f}{\partial y_3}\right)^2\right)y_3'^2 - \frac{1}{2}\left(m_3+m_1\left(\frac{\partial f}{\partial z_3}\right)^2\right)z_3'^2 - m_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial y_1}x_1'y_1' \\ \quad -m_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}x_1'x_2' - \cdots - U(x_1, y_1, f, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3), \end{cases}$$

so folgt, dass, wenn dasselbe von den Coordinaten x_1 und y_1 unabhängig

sein soll, eben dies für die Coefficienten aller Ableitungen der Coordinaten der Fall sein muss, und daher zunächst, wenn $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial f}{\partial y_1}$ von x_1 und y_1 unabhängig sind,

$$f = x_1\varphi(x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3)+y_1\psi(x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3)+\omega(x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3),$$

wonach, da auch $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$, $\frac{\partial f}{\partial y_2}$, ... von x_1 und y_1 frei sein müssen, die Function f, also die Bedingungsgleichung (1.) die Gestalt hat

$$(3.) \qquad z_1 = ax_1+by_1+\omega(x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3),$$

worin a und b Constanten bedeuten, und das kinetische Potential

$$(4.)\quad \begin{cases} H = -\frac{m_1}{2}(1+a^2)x_1'^2-\frac{m_1}{2}(1+b^2)y_1'^2 \\ -\frac{1}{2}\left(m_2+m_1\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_2}\right)^2\right)x_2'^2-\frac{1}{2}\left(m_2+m_1\left(\frac{\partial\omega}{\partial y_2}\right)^2\right)y_2'^2-\frac{1}{2}\left(m_2+m_1\left(\frac{\partial\omega}{\partial z_2}\right)^2\right)z_2'^2 \\ -\frac{1}{2}\left(m_3+m_1\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_3}\right)^2\right)x_3'^2-\frac{1}{2}\left(m_3+m_1\left(\frac{\partial\omega}{\partial y_3}\right)^2\right)y_3'^2-\frac{1}{2}\left(m_3+m_1\left(\frac{\partial\omega}{\partial z_3}\right)^2\right)z_3'^2 \\ -m_1ab\,x_1'y_1'-m_1a\frac{\partial\omega}{\partial x_2}x_1'x_2'-m_1a\frac{\partial\omega}{\partial y_2}x_1'y_2'+\cdots \\ -m_1b\frac{\partial\omega}{\partial x_2}y_1'x_2'-m_1b\frac{\partial\omega}{\partial y_2}y_1'y_2'-\cdots \\ -m_1\frac{\partial\omega}{\partial x_2}\frac{\partial\omega}{\partial y_2}x_2'y_2'-\cdots-U(x_1, y_1, f, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3) \end{cases}$$

wird.

Da nun aber auch der letztere Theil U von x_1 und y_1 frei sein soll, so ist aus (3.) ersichtlich, dass U die Form haben muss

$$(5.)\quad \begin{cases} U = (z_1-ax_1-by_1-\omega)F_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3) \\ \qquad\qquad +F(z_1-ax_1-by_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3), \end{cases}$$

und es werden sodann die zu den Coordinaten x_1 und y_1 gehörigen *Lagrange*schen Gleichungen die Gestalt annehmen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial x_1'} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial y_1'} = 0,$$

oder wie leicht zu sehen, wenn c_1 und c_2 Integrationsconstanten bedeuten,

$$(1+a^2)x_1'+aby_1' = c_1-a\frac{d\omega}{dt},$$

$$abx_1'+(1+b^2)y_1' = c_2-b\frac{d\omega}{dt},$$

woraus sich

$$(6.)\qquad \begin{cases} (1+a^2+b^2)x_1' = c_1(1+b^2)-c_2ab-a\dfrac{d\omega}{dt}, \\ (1+a^2+b^2)y_1' = -c_1ab+c_2(1+a^2)-b\dfrac{d\omega}{dt} \end{cases}$$

ergiebt. Setzt man die hieraus folgenden Werthe von x_1' und y_1' in die sechs weiteren Bewegungsgleichungen, für welche sämmtliche äusseren Kräfte gleich Null angenommen werden, ein, so ergiebt sich unter der früher hervorgehobenen Bedeutung der eingeklammerten Ausdrücke z. B. aus der ersten dieser

$$-\left(\frac{\partial H}{\partial x_2}\right)+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial x_2'}\right) = 0,$$

oder da

$$\frac{\partial(H)}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial H}{\partial x_2}\right)+\left(\frac{\partial H}{\partial x_1'}\right)\frac{\partial x_1'}{\partial x_2}+\left(\frac{\partial H}{\partial y_1'}\right)\frac{\partial y_1'}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial H}{\partial x_2}\right)+c_1m_1\frac{\partial x_1'}{\partial x_2}+c_2m_1\frac{\partial y_1'}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial(H)}{\partial x_2'} = \left(\frac{\partial H}{\partial x_2'}\right)+\left(\frac{\partial H}{\partial x_1'}\right)\frac{\partial x_1'}{\partial x_2'}+\left(\frac{\partial H}{\partial y_1'}\right)\frac{\partial y_1'}{\partial x_2'} = \left(\frac{\partial H}{\partial x_2'}\right)+c_1m_1\frac{\partial x_1'}{\partial x_2'}+c_2m_1\frac{\partial y_1'}{\partial x_2'}$$

ist, wenn

$$(7.)\qquad \mathfrak{H} = (H)-c_1m_1x_1'-c_2m_1y_1'$$

gesetzt wird, wieder die *Lagrange*sche Form

$$(8.)\qquad -\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial x_2}+\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial x_2'} = 0$$

und ebenso für dasselbe kinetische Potential $\mathfrak{H}$ die anderen fünf Bewegungsgleichungen.

Eine leichte Rechnung ergiebt durch Einsetzen der Werthe von x_1' und y_1' aus (6.) in (7.) für das nun entstehende kinetische Potential die einfache Form

$$(9.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{H} = -\dfrac{m_1}{2(1+a^2+b^2)}\left(\dfrac{d\omega}{dt}\right)^2+m_1\dfrac{ac_1+bc_2}{1+a^2+b^2}\dfrac{d\omega}{dt} \\ \qquad -\frac{3}{2}m_1\dfrac{c_1^2(1+b^2)-2abc_1c_2+c_2^2(1+a^2)}{1+a^2+b^2}-\dfrac{m_2}{2}(x_2'^2+y_2'^2+z_2'^2) \\ \qquad -\dfrac{m_3}{2}(x_3'^2+y_3'^2+z_3'^2)-F(\omega,\ x_2,\ y_2,\ z_2,\ x_3,\ y_3,\ z_3) \end{cases}$$

und wir finden somit, *dass die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass für die Bewegung von drei materiellen Punkten, deren Coordinaten einer Bedingungsgleichung unterliegen, von den acht Bewegungsgleichungen zwei in vollständige nach der Zeit genommene Differentialquotienten übergehen, oder,*

was damit identisch ist, das kinetische Potential von zwei der acht Coordinaten unabhängig sei, die ist, dass die Bedingungsgleichung die Form hat

$$z_1 = ax_1+by_1+\omega,$$

worin a und b Constanten, und ω nur von x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3 abhängt, während die Kräftefunction die Gestalt besitzt

$$U = (z_1-ax_1-by_1-\omega)F_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3) + F(z_1-ax_1-by_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3);$$

in diesem Falle nehmen die sechs Bewegungsgleichungen für die Coordinaten x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3 wieder die Lagrangesche Form für das durch die Gleichung (9.) *gegebene kinetische Potential $\mathfrak{H}$ an.*

Die oben gefundene Form der Kräftefunction bedingt offenbar, wenn $F_1 = 0$ angenommen wird, dass, weil

$$X_1 = -\frac{\partial F}{\partial(z_1-ax_1-by_1)}a, \quad Y_1 = -\frac{\partial F}{\partial(z_1-ax_1-by_1)}b, \quad Z_1 = \frac{\partial F}{\partial(z_1-ax_1-by_1)}$$

ist, die Richtung der auf den Punkt m_1 wirkenden Kraft constant ist.

Wir wollen nun die Frage nach den nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufwerfen, dass das kinetische Potential die Form hat

$$(10.)\quad \mathfrak{H} = -\frac{m_2}{2}(x_2'^2+y_2'^2+z_2'^2)-\frac{m_3}{2}(x_3'^2+y_3'^2+z_3'^2)-W(r, r'),$$

worin W eine beliebig gegebene Function von r und r' und

$$r^2 = (x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2-z_3)^2$$

ist. Aus dem Werthe (9.) ergiebt sich zunächst, dass $W(r, r')$ nur eine ganze Function zweiten Grades von r' von der Form

$$(11.)\qquad W = \varphi_0(r)+\varphi_1(r)\frac{dr}{dt}+\varphi_2(r)\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

sein kann, und somit

$$(12.)\qquad \varphi_2(r)\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{m_1}{2(1+a^2+b^2)}\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2$$

und

$$(13.)\qquad \varphi_1(r)\frac{dr}{dt} = -m_1\frac{ac_1+bc_2}{1+a^2+b^2}\frac{d\omega}{dt}.$$

Nun folgt aber aus der Gleichung (12.)

$$\omega = \sqrt{\frac{2(1+a^2+b^2)}{m_1}}\int\sqrt{\varphi_2(r)}dr,$$

so dass sich bei willkürlicher Wahl von $\varphi_2(r)$ aus (13.) für $\varphi_1(r)$ die Be-

stimmung ergiebt

$$\varphi_1(r) = -(ac_1+bc_2)\sqrt{\frac{2m_1}{1+a^2+b^2}}\sqrt{\varphi_2(r)},$$

während $\varphi_0(r)$ durch den Ausdruck charakterisirt ist

$$\varphi_0(r) = \tfrac{3}{2}m_1\frac{c_1^2(1+b^2)-2abc_1c_2+c_2^2(1+a^2)}{1+a^2+b^2}+F(\omega,\ x_2,\ y_2,\ z_2,\ x_3,\ y_3,\ z_3),$$

aus welchem

$$F\left(\sqrt{\frac{2(1+a^2+b^2)}{m_1}}\int\sqrt{\varphi_2(r)}\,dr,\ x_2,\ y_2,\ z_2,\ x_3,\ y_3,\ z_3\right)$$

sich als Function von r und somit nach (5.) die Kräftefunction sich in der Form ergiebt

$$U = \left(z_1-ax_1-by_1-\sqrt{\frac{2(1+a^2+b^2)}{m_1}}\int\sqrt{\varphi_2(r)}\,dr\right)F_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3)$$
$$+F(z_1-ax_1-by_1,\ r),$$

während die Coordinaten der Bedingung unterliegen

$$z_1 = ax_1+by_1+\sqrt{\frac{2(1+a^2+b^2)}{m_1}}\int\sqrt{\varphi_2(r)}\,dr.$$

Wir finden somit, *dass die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass für die Bewegung von drei materiellen Punkten m_1, m_2, m_3, deren Coordinaten einer Bedingung unterliegen, von den acht Bewegungsgleichungen zwei in vollständige nach der Zeit genommene Differentialquotienten übergehen, während die übrigen sechs nach dem Vorigen in Folge dessen nach Elimination der Coordinaten des einen Punktes wieder die Lagrangesche Form annehmen, und dass ferner das kinetische Potential dieser letzteren sich aus der negativen Summe der lebendigen Kraft der beiden anderen Punkte und aus einer Function der Entfernung r derselben und deren nach der Zeit genommenen Ableitung zusammensetzt, die ist, dass die zwischen den Coordinaten der drei Punkte bestehende Bedingung die Form hat*

$$z_1 = ax_1+by_1+\sqrt{\frac{2(1+a^2+b^2)}{m_1}}\int\sqrt{\varphi_2(r)}\,dr,$$

worin a und b beliebige Constanten und φ_2 eine beliebige Function bedeutet, und dass ferner die Kräftefunction durch einen Ausdruck der Form definirt ist

$$U = \left(z_1-ax_1-by_1-\sqrt{\frac{2(1+a^2+b^2)}{m_1}}\int\sqrt{\varphi_2(r)}\,dr\right)F_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3)$$
$$+F(z_1-ax_1-by_1,\ r),$$

worin F ebenfalls willkürlich ist. Dann wird das kinetische Potential für die

Bewegung der beiden Punkte

$$\mathfrak{H} = -\frac{m_2}{2}(x_2'^2+y_2'^2+z_2'^2)-\frac{m_3}{2}(x_3'^2+y_3'^2+z_3'^2)$$

$$-\varphi_2(r)r'^2+(ac_1+bc_2)\sqrt{\frac{2m_1}{1+a^2+b^2}}\sqrt{\varphi_2(r)}.r'$$

$$-\tfrac{3}{2}m_1\frac{c_1^2(1+b^2)-2abc_1c_2+c_2^2(1+a^2)}{1+a^2+b^2}-F\left(\sqrt{\frac{2(1+a^2+b^2)}{m_1}}\int\sqrt{\varphi_2(r)}dr,\ r\right)$$

lauten, und nach (6.) *die Coordinaten* x_1, y_1, z_1 *durch die Ausdrücke gegeben sein*

$$x_1 = \frac{c_1(1+b^2)-c_2ab}{1+a^2+b^2}t-a\sqrt{\frac{2}{m_1(1+a^2+b^2)}}\int\sqrt{\varphi_2(r)}dr,$$

$$y_1 = \frac{-c_1ab+c_2(1+a^2)}{1+a^2+b^2}t-b\sqrt{\frac{2}{m_1(1+a^2+b^2)}}\int\sqrt{\varphi_2(r)}dr,$$

$$z_1 = \frac{ac_1+bc_2}{1+a^2+b^2}\cdot t+\sqrt{\frac{2}{m_1(1+a^2+b^2)}}\int\sqrt{\varphi_2(r)}dr.$$

Wählen wir die Constanten a, b, c_1, c_2, so dass

$$ac_1+bc_2 = 0$$

wird, ferner

$$\varphi_2(r)=\frac{m_2m_3}{k^2}\frac{1}{r},\quad \text{also}\quad \int\sqrt{\varphi_2(r)}dr=2\sqrt{\frac{m_2m_3}{k^2}}r^{\frac{1}{2}},$$

ferner

$$U=F\left(\frac{2}{k}\sqrt{\frac{2m_2m_3(1+a^2+b^2)}{m_1}}r^{\frac{1}{2}},\ r\right)=\frac{m_2m_3}{r}-\tfrac{3}{2}m_1(c_1^2+c_2^2),$$

so wird der Ausdruck

$$\mathfrak{H} = -\frac{m_2}{2}(x_2'^2+y_2'^2+z_2'^2)-\frac{m_3}{2}(x_3'^2+y_3'^2+z_3'^2)-\frac{m_2m_3}{r}\left(1+\frac{r'^2}{k^2}\right)$$

das kinetische Potential des *Weber*schen Gesetzes liefern, während die Coordinaten x_1, y_1, z_1 durch die Ausdrücke gegeben sind

$$x_1 = c_1t-\frac{2a}{k}\sqrt{\frac{2m_2m_3}{m_1(1+a^2+b^2)}}r^{\frac{1}{2}},$$

$$y_1 = c_2t-\frac{2b}{k}\sqrt{\frac{2m_2m_3}{m_1(1+a^2+b^2)}}r^{\frac{1}{2}},$$

$$z_1 = \frac{2}{k}\sqrt{\frac{2m_2m_3}{m_1(1+a^2+b^2)}}r^{\frac{1}{2}},$$

worin man auch $a=0$, $b=0$ wählen kann, so dass

$$x_1=c_1t,\quad y_1=c_2t,\quad z_1=\frac{2}{k}\sqrt{\frac{2m_2m_3}{m_1}}r^{\frac{1}{2}}$$

wird.

Wenn somit von drei Massenpunkten der eine durch Verbindung mit den beiden anderen der Bedingung unterliegt, dass seine Entfernung von einer festen Ebene stets der Quadratwurzel aus der Entfernung der beiden anderen Massenpunkte von einander proportional bleibt, während sich die letzteren nach dem Newtonschen Gesetze anziehen, so wird sich die Bewegung dieser nach dem Weberschen Gesetze vollziehen.

Betrachten wir endlich noch den Fall, in welchem zwischen den Coordinaten der drei Massenpunkte zwei Bedingungsgleichungen bestehen, welche in die Form

$$y_1 = f(x_1,\ x_2,\ y_2,\ z_2,\ x_3,\ y_3,\ z_3), \quad z_1 = \varphi(x_1,\ x_2,\ y_2,\ z_2,\ x_3,\ y_3,\ z_3)$$

gesetzt werden mögen, so geht das kinetische Potential in

$$(14.)\quad \begin{cases} H = -\frac{m_1}{2}\left(1+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^2\right)x_1'^2-\frac{1}{2}\left(m_2+m_1\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2+m_1\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^2\right)x_2'^2 \\ -\frac{1}{2}\left(m_2+m_1\left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right)^2+m_1\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}\right)^2\right)y_2'^2-\cdots-m_1\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}+\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)x_1'x_2' \\ -m_1\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial y_2}+\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}\right)x_1'y_2'+\cdots-U(x_1,\ f,\ \varphi,\ x_2,\ y_2,\ z_2,\ x_3,\ y_3,\ z_3) \end{cases}$$

über, und soll dasselbe von x_1 unabhängig sein, so muss eben dies für die Coefficienten der Ableitungen der Coordinaten der Fall sein, und somit die Ausdrücke

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^2,\quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^2,\quad \left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}\right)^2,\quad \ldots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}+\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2},\quad \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial y_2}+\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial y_2},\quad \ldots$$

reine Functionen von $x_2,\ y_2,\ z_2,\ x_3,\ y_3,\ z_3$.

Setzt man

$$(15.)\quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^2=\omega_1,\quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^2=\omega_2,\quad \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}+\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}=\Omega,$$

worin $\omega_1,\ \omega_2,\ \Omega$ Functionen der Coordinaten des zweiten und dritten Massenpunktes bedeuten, so ergiebt sich leicht durch einfache Zusammensetzung, dass die Function φ der partiellen Differentialgleichung genügen muss

$$(16.)\quad \omega_2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^2+\omega_1\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^2-2\Omega\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}=\omega_1\omega_2-\Omega^2,$$

während f und φ durch die Beziehungen verbunden sind

$$(17.)\quad \begin{cases} (\omega_1\omega_2-\Omega^2)\frac{\partial f}{\partial x_1} = -\Omega\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}+\omega_1\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \\ (\omega_1\omega_2-\Omega^2)\frac{\partial f}{\partial x_2} = -\omega_2\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}+\Omega\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \end{cases}$$

und aus diesen letzteren wiederum durch Differentiation der ersten nach x_2, der zweiten nach x_1 eine weitere partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für φ:

$$(18.)\quad \begin{cases} \omega_2 \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \omega_1 \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} - 2\Omega \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \qquad + \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}\left[\dfrac{\Omega}{\omega_1\omega_2-\Omega^2}\dfrac{\partial}{\partial x_2}(\omega_1\omega_2-\Omega^2) + \dfrac{\partial\Omega}{\partial x_2}\right] \\ \qquad + \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}\left[\dfrac{\partial\omega_1}{\partial x_2} - \dfrac{\omega_1}{\omega_1\omega_2-\Omega^2}\dfrac{\partial}{\partial x_2}(\omega_1\omega_2-\Omega^2)\right] = 0. \end{cases}$$

Differentiirt man nun die Gleichung (16.) partiell nach x_1 und x_2, sodann die erste so erhaltene Gleichung nach x_1 und x_2, die zweite nach x_2, so erhält man fünf Gleichungen in den partiellen Differentialquotienten zweiter und dritter Ordnung der Function φ, und aus der Gleichung (18.) durch Differentiation nach x_1 und x_2 mit dieser drei Gleichungen in denselben Grössen, so dass acht — wie man leicht sieht von einander unabhängige — Gleichungen sich ergeben in den sieben Grössen

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2},\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2},\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2},\ \frac{\partial^3\varphi}{\partial x_1^3},\ \frac{\partial^3\varphi}{\partial x_1^2\partial x_2},\ \frac{\partial^3\varphi}{\partial x_1\partial x_2^2},\ \frac{\partial^3\varphi}{\partial x_2^3},$$

durch deren Elimination sich eine Beziehung von der Form ergiebt

$$(19.)\qquad F_1\left(x_2,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right) = 0,$$

in welche die Variable x_1 nicht eintritt. Die beiden Gleichungen (16.) und (19.) verlangen nun, dass $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}$ von x_1 unabhängig sind, und dass daher, weil dasselbe für die anderen Variablen gelten soll,

$$(20.)\qquad \varphi = bx_1 + \Phi(x_2,\ y_2,\ z_2,\ x_3,\ y_3,\ z_3)$$

ist, worin b eine Constante bedeutet, und somit nach (17.) auch $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ von x_1 unabhängig und f von der Form

$$(21.)\qquad f = ax_1 + F(x_2,\ y_2,\ z_2,\ x_3,\ y_3,\ z_3),$$

worin a wiederum eine Constante darstellt. Und die eben gefundenen Formen für f und φ sind, wie unmittelbar zu sehen, nicht nur die nothwendigen sondern auch die hinreichenden Bedingungen dafür, dass das kinetische Potential H von x_1 unabhängig ist, wenn noch die Kräftefunction der Bedingung unterworfen wird, von der Form zu sein

$$(22.)\quad \begin{cases} U = (y_1 - ax_1 - F)\chi_1(x_1,\ y_1,\ z_1,\ x_2,\ y_2,\ z_2,\ x_3,\ y_3,\ z_3) \\ \qquad + (z_1 - bx_1 - \Phi)\chi_2(x_1,\ y_1,\ z_1,\ x_2,\ y_2,\ z_2,\ x_3,\ y_3,\ z_3) \\ \qquad + \chi(y_1 - ax_1,\ z_1 - bx_1,\ x_2,\ y_2,\ z_2,\ x_3,\ y_3,\ z_3). \end{cases}$$

Da nunmehr wegen der Form des kinetischen Potentials

$$(23.)\quad \begin{cases} H = -\frac{m_1}{2}(1+a^2+b^2)x_1'^2 - \frac{1}{2}\left(m_2 + m_1\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 + m_1\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\right)^2\right)x_2'^2 \\ -\frac{1}{2}\left(m_2 + m_1\left(\frac{\partial F}{\partial y_2}\right)^2 + m_1\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_2}\right)^2\right)y_2'^2 + \cdots - m_1\left(a\frac{\partial F}{\partial x_2} + b\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\right)x_1'x_2' \\ -m_1\left(a\frac{\partial F}{\partial y_2} + b\frac{\partial \Phi}{\partial y_2}\right)x_1'y_2' - \cdots - m_1\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial F}{\partial y_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\frac{\partial \Phi}{\partial y_2}\right)x_2'y_2' - \cdots \\ -\chi(F, \Phi, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3) \end{cases}$$

die zu x_1 gehörige *Lagrange*sche Gleichung

$$\frac{\partial H}{\partial x_1'} = cm_1,$$

worin c eine Integrationsconstante bedeutet, die Form annimmt

$$(24.)\qquad (1+a^2+b^2)x_1' = -c - a\frac{dF}{dt} - b\frac{d\Phi}{dt},$$

so ergiebt sich durch Einsetzen des Werthes von x_1' in die sechs folgenden Bewegungsgleichungen z. B. aus der ersten dieser

$$-\left(\frac{\partial H}{\partial x_2}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial x_2'}\right) = 0,$$

wenn alle äusseren Kräfte gleich Null vorausgesetzt sind, und weil

$$\frac{\partial(H)}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial H}{\partial x_2}\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial x_1'}\right)\frac{\partial x_1'}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial H}{\partial x_2}\right) + cm_1\frac{\partial x_1'}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial(H)}{\partial x_2'} = \left(\frac{\partial H}{\partial x_2'}\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial x_1'}\right)\frac{\partial x_1'}{\partial x_2'} = \left(\frac{\partial H}{\partial x_2'}\right) + cm_1\frac{\partial x_1'}{\partial x_2'},$$

wenn

$$(25.)\qquad \mathfrak{H} = (H) - cm_1x_1'$$

gesetzt wird, die *Lagrange*sche Gleichung

$$-\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x_2} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x_2'} = 0,$$

und ebenso für dasselbe kinetische Potential $\mathfrak{H}$ die anderen fünf Bewegungsgleichungen.

Setzt man nun den Werth von x_1' aus der Gleichung (24.) in (25.) ein, so ergiebt sich das kinetische Potential in der Form

$$(26.)\quad \begin{cases} \mathfrak{H} = -\frac{m_1}{2}\frac{1+b^2}{1+a^2+b^2}\left(\frac{dF}{dt}\right)^2 - \frac{m_1}{2}\frac{1+a^2}{1+a^2+b^2}\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2 \\ +m_1\frac{ab}{1+a^2+b^2}\frac{dF}{dt}\frac{d\Phi}{dt} + m_1\frac{ac}{1+a^2+b^2}\frac{dF}{dt} + m_1\frac{bc}{1+a^2+b^2}\frac{d\Phi}{dt} \\ +\frac{m_1}{2}\frac{c^2}{1+a^2+b^2} - \frac{m_2}{2}(x_2'^2+y_2'^2+z_2'^2) - \frac{m_3}{2}(x_3'^2+y_3'^2+z_3'^2) \\ -\chi(F, \Phi, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3), \end{cases}$$

und wir finden somit, *dass die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass für die Bewegung von drei materiellen Punkten, deren Coordinaten zwei Bedingungsgleichungen unterliegen, von den sieben Bewegungsgleichungen eine in einen vollständigen nach der Zeit genommenen Differentialquotienten übergeht, oder was damit identisch ist, das kinetische Potential von einer der sieben Coordinaten unabhängig ist, die ist, dass die Bedingungsgleichungen die Form haben*

$$y_1 = ax_1 + F, \quad z_1 = bx_1 + \Phi,$$

worin a und b Constanten sind und F sowie Φ nur von

$$x_2, \quad y_2, \quad z_2, \quad x_3, \quad y_3, \quad z_3$$

abhängen, ausserdem die Kräftefunction die Gestalt besitzt

$$\begin{aligned} U = {} & (y_1 - ax_1 - F)\chi_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3) \\ & + (z_1 - bx_1 - \Phi)\chi_2(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3) \\ & + \chi(y_1 - ax_1, z_1 - bx_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3); \end{aligned}$$

in diesem Falle nehmen die sechs Bewegungsgleichungen für die Coordinaten x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3 wieder die Lagrangesche Form für das durch die Gleichung (26.) *gegebene kinetische Potential $\mathfrak{H}$ an.*

Die oben gefundene Form der Kräftefunction bedingt für die auf den ersten Punkt wirkende Kraft, wenn $\chi_1 = 0$, $\chi_2 = 0$ angenommen werden, die Beziehung

$$X_1 = -aY_1 - bZ_1.$$

Soll das kinetische Potential wiederum die Form (10.) haben, also W durch den Ausdruck (11.) bestimmt sein, so wird

$$\varphi_2(r)\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{m_1}{2}\frac{1+b^2}{1+a^2+b^2}\left(\frac{dF}{dt}\right)^2 + \frac{m_1}{2}\frac{1+a^2}{1+a^2+b^2}\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2 - m_1\frac{ab}{1+a^2+b^2}\frac{dF}{dt}\frac{d\Phi}{dt},$$

$$\varphi_1(r)\frac{dr}{dt} = -m_1\frac{ac}{1+a^2+b^2}\frac{dF}{dt} - m_1\frac{bc}{1+a^2+b^2}\frac{d\Phi}{dt},$$

$$\varphi_0(r) = -\frac{m_1}{2}\frac{c^2}{1+a^2+b^2} + \chi(F, \Phi, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3)$$

sein müssen, woraus leicht

$$\frac{dF}{dt} = \frac{-a(1+a^2+b^2)\varphi_1(r)+b\sqrt{2m_1c^2(a^2+b^2)\varphi_2(r)-(1+a^2+b^2)\varphi_1(r)^2}}{m_1c(a^2+b^2)}\cdot\frac{dr}{dt},$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{-b(1+a^2+b^2)\varphi_1(r)-a\sqrt{2m_1c^2(a^2+b^2)\varphi_2(r)-(1+a^2+b^2)\varphi_1(r)^2}}{m_1c(a^2+b^2)}\cdot\frac{dr}{dt}$$

folgt, und somit

$$(27.)\quad F = \int\frac{-a(1+a^2+b^2)\varphi_1(r)+b\sqrt{2m_1c^2(a^2+b^2)\varphi_2(r)-(1+a^2+b^2)\varphi_1(r)^2}}{m_1c(a^2+b^2)}dr$$

und

$$(28.)\quad \Phi = \int\frac{-b(1+a^2+b^2)\varphi_1(r)-a\sqrt{2m_1c^2(a^2+b^2)\varphi_2(r)-(1+a^2+b^2)\varphi_1(r)^2}}{m_1c(a^2+b^2)}dr$$

reine Functionen von r, ausserdem

$$(29.)\quad \varphi_0(r) = -\frac{m_1}{2}\frac{c^2}{1+a^2+b^2}+\chi(F(r),\ \Phi(r),\ x_2,\ y_2,\ z_2,\ x_3,\ y_3,\ z_3),$$

also

$$(30.)\quad \begin{cases} U = (y_1-ax_1-F(r))\chi_1(x_1,\ y_1,\ z_1,\ x_2,\ y_2,\ z_2,\ x_3,\ y_3,\ z_3) \\ \qquad +(z_1-bx_1-\Phi(r))\chi_2(x_1,\ y_1,\ z_1,\ x_2,\ y_2,\ z_2,\ x_3,\ y_3,\ z_3) \\ \qquad\qquad +\chi(y_1-ax_1,\ z_1-bx_1,\ r), \end{cases}$$

und die Bedingungsgleichungen zwischen den Coordinaten

$$(31.)\qquad y_1 = ax_1+F(r),\quad z_1 = bx_1+\Phi(r).$$

Wir finden somit, *dass die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass für die Bewegung von drei materiellen Punkten m_1, m_2, m_3, deren Coordinaten zwei Bedingungen unterliegen, von den sieben Bewegungsgleichungen eine in einen vollständigen nach der Zeit genommenen Differentialquotienten übergeht, während die übrigen sechs in Folge dessen nach dem Vorigen nach Elimination der Coordinaten des einen Punktes wieder die Lagrangesche Form annehmen, und dass ferner das kinetische Potential dieser letzteren sich aus der negativen Summe der lebendigen Kraft der beiden anderen Punkte und aus einer Function der Entfernung r derselben und deren nach der Zeit genommenen Ableitung zusammensetzt, die ist, dass die beiden Bedingungsgleichungen zwischen den Coordinaten die Form* (31.) *haben, worin $F(r)$ und $\Phi(r)$ durch die Ausdrücke* (27.) *und* (28.), *in welchen $\varphi_1(r)$ und $\varphi_2(r)$ beliebige Functionen von r bedeuten, bestimmt sind, und dass ferner die Kräfte-*

function durch einen Ausdruck von der Form (30.) *dargestellt ist. Dann wird das kinetische Potential für die Bewegung der beiden Punkte*

$$(32.)\quad \begin{cases} \mathfrak{H} = -\frac{m_2}{2}(x_2'^2+y_2'^2+z_2'^2)-\frac{m_3}{2}(x_3'^2+y_3'^2+z_3'^2)-\varphi_2(r)\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \\ \qquad\qquad -\varphi_1(r)\frac{dr}{dt}+\frac{m_1}{2}\frac{c^2}{1+a^2+b^2}-\chi(F,\ \Phi,\ r) \end{cases}$$

lauten, und nach (24.) *die Coordinaten* x_1, y_1, z_1 *durch die Ausdrücke gegeben sein*

$$x_1 = -\frac{c}{1+a^2+b^2}t+\frac{1}{m_1 c}\int\varphi_1(r)dr,$$

$$y_1 = -\frac{ac}{1+a^2+b^2}t+\int\frac{-a\varphi_1(r)+b\sqrt{2m_1c^2(a^2+b^2)\varphi_2(r)-(1+a^2+b^2)\varphi_1(r)^2}}{m_1c(a^2+b^2)}dr,$$

$$z_1 = -\frac{bc}{1+a^2+b^2}t+\int\frac{-b\varphi_1(r)-a\sqrt{2m_1c^2(a^2+b^2)\varphi_2(r)-(1+a^2+b^2)\varphi_1(r)^2}}{m_1c(a^2+b^2)}dr.$$

Wollte man wiederum auf das *Weber*sche Gesetz geführt werden, so müsste man

$$\varphi_1(r)=0,\quad \varphi_2(r)=\frac{m_2m_3}{k^2}\frac{1}{r},\quad U=\chi(F,\ \Phi,\ r)=\frac{m_2m_3}{r}+\frac{m_1}{2}\frac{c^2}{1+a^2+b^2}$$

setzen, wofür das kinetische Potential (32.) die Form annimmt

$$\mathfrak{H} = -\frac{m_2}{2}(x_2'^2+y_2'^2+z_2'^2)-\frac{m_3}{2}(x_3'^2+y_3'^2+z_3'^2)-\frac{m_2m_3}{r}\left(1+\frac{r'^2}{k^2}\right),$$

während die Bedingungsgleichungen zwischen den Coordinaten nach (27.) und (28.) in

$$y_1 = ax_1+\frac{2b}{k}\sqrt{\frac{2m_2m_3}{m_1(a^2+b^2)}}r^{\frac{1}{2}},$$

$$z_1 = bx_1-\frac{2a}{k}\sqrt{\frac{2m_2m_3}{m_1(a^2+b^2)}}r^{\frac{1}{2}}$$

übergehen und die Coordinaten x_1, y_1, z_1 durch die Ausdrücke gegeben sind

$$x_1 = -\frac{c}{1+a^2+b^2}t,$$

$$y_1 = -\frac{ac}{1+a^2+b^2}t+\frac{2b}{k}\sqrt{\frac{2m_2m_3}{m_1(a^2+b^2)}}r^{\frac{1}{2}},$$

$$z_1 = -\frac{bc}{1+a^2+b^2}t-\frac{2a}{k}\sqrt{\frac{2m_2m_3}{m_1(a^2+b^2)}}r^{\frac{1}{2}}.$$

Nimmt man $b = a$, so gehen die Bedingungsgleichungen in

$$y_1 = ax_1 + \frac{2}{k}\sqrt{\frac{m_2 m_3}{m_1}}\, r^{\frac{1}{2}},$$

$$z_1 = ax_1 - \frac{2}{k}\sqrt{\frac{m_2 m_3}{m_1}}\, r^{\frac{1}{2}}$$

und die Ausdrücke der Coordinaten des ersten Punktes durch die Zeit in

$$x_1 = -\frac{c}{1+2a^2}\, t,$$

$$y_1 = -\frac{ac}{1+2a^2}\, t + \frac{2}{k}\sqrt{\frac{m_2 m_3}{m_1}}\, r^{\frac{1}{2}},$$

$$z_1 = -\frac{ac}{1+2a^2}\, t - \frac{2}{k}\sqrt{\frac{m_2 m_3}{m_1}}\, r^{\frac{1}{2}}$$

über, und setzt man endlich $a = 0$, so folgt, *dass, wenn von drei Massenpunkten der eine der Bedingung unterliegt, dass seine Entfernung von zwei auf einander senkrecht stehenden Ebenen stets der Quadratwurzel aus der Entfernung der beiden anderen Massenpunkte von einander, mit demselben aber im Zeichen entgegengesetzten Factor, proportional bleibt, während sich die letzteren nach dem Newtonschen Gesetze anziehen, sich die Bewegung dieser nach dem Weberschen Gesetze vollzieht.*

Die Kräftefunction ist dann von der Form

$$U = \frac{m_2 m_3}{r} + \frac{m_1}{2}\, c^2,$$

worin c die x-Componente der Anfangsgeschwindigkeit des ersten Punktes bedeutet.

XIII.

Die partielle Differentialgleichung für die erweiterte charakteristische Function von *Hamilton*.

Wenn man die äusseren Kräfte P_λ wieder als gegebene Functionen der Zeit betrachtet, so soll als *charakteristische Function* das Integral

$$(1.) \qquad \Phi = \int_{t_0}^{t} \Big(H + \sum_1^\mu{}_\lambda P_\lambda p_\lambda\Big)\, dt$$

definirt werden, in welchem t_0 ein fest gegebener Werth von t, die obere Grenze des Integrales eine beliebige, aber bestimmt gedachte Endzeit sein soll, und das kinetische Potential H von t, von den Coordinaten $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ und deren Ableitungen bis zur νten Ordnung hin abhängen möge. Da

ohne weitere Beschränkung der Variationen sich aus (1.)

$$\begin{aligned}
\delta\Phi &= \delta\int_{t_0}^{t}\Big(H+\sum_1^{\mu}{}_\lambda P_\lambda p_\lambda\Big)dt \\
&= \int_{t_0}^{t}\sum_1^{\mu}{}_s\Big\{\frac{\partial H}{\partial p_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_s'}+\cdots+(-1)^\nu\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}+P_s\Big\}\delta p_s dt \\
&\quad+\Big[\sum_1^{\mu}{}_s\Big\{\frac{\partial H}{\partial p_s'}-\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_s''}+\cdots+(-1)^{\nu-1}\frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\Big\}\delta p_s\Big]_{t_0}^{t} \\
&\quad+\Big[\sum_1^{\mu}{}_s\Big\{\frac{\partial H}{\partial p_s''}-\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_s'''}+\cdots+(-1)^{\nu-2}\frac{d^{\nu-2}}{dt^{\nu-2}}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\Big\}\delta p_s'\Big]_{t_0}^{t} \\
&\quad+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad+\Big[\sum_1^{\mu}{}_s\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\delta p_s^{(\nu-1)}\Big]_{t_0}^{t}
\end{aligned}$$

ergiebt, so wird für die Annahme, dass die mit einander verglichenen Werthe der Coordinaten p_s aus den Integralen der erweiterten *Lagrange*schen Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial p_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_s'}+\cdots+(-1)^\nu\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}+P_s=0$$

durch Variation der $2\mu\nu$ Integrationsconstanten hervorgehen sollen, für welche wir die Anfangswerthe

$$p_s^0,\quad p_s^{\prime 0},\quad p_s^{\prime\prime 0},\quad \ldots,\quad p_s^{(2\nu-1)^0}$$

wählen wollen,

$$(2.)\qquad \left\{\begin{aligned}
\delta\Phi &= \Big[\sum_1^{\mu}{}_s\Big\{\frac{\partial H}{\partial p_s'}-\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_s''}+\cdots+(-1)^{\nu-1}\frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\Big\}\delta p_s\Big]_{t_0}^{t} \\
&\quad+\Big[\sum_1^{\mu}{}_s\Big\{\frac{\partial H}{\partial p_s''}-\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_s'''}+\cdots+(-1)^{\nu-2}\frac{d^{\nu-2}}{dt^{\nu-2}}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\Big\}\delta p_s'\Big]_{t_0}^{t} \\
&\quad+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad+\Big[\sum_1^{\mu}{}_s\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\delta p_s^{(\nu-1)}\Big]_{t_0}^{t}
\end{aligned}\right.$$

sein. Drückt man nun aus den Integralgleichungen

$$(3.)\qquad p_s=f_s(t,\ p_1^0,\ \ldots,\ p_\mu^0,\ \ldots,\ p_1^{(2\nu-1)^0},\ \ldots,\ p_\mu^{(2\nu-1)^0})$$

und deren nach t genommenen ersten $2\nu-1$ Ableitungen, deren Anzahl also $2\mu\nu$ beträgt, die $2\mu\nu$ Grössen

$$(\alpha.)\qquad p_s^{(\nu)},\quad p_s^{(\nu)^0},\quad p_s^{(\nu+1)},\quad p_s^{(\nu+1)^0},\quad \ldots,\quad p_s^{(2\nu-1)},\quad p_s^{(2\nu-1)^0}$$

durch die $2\mu\nu+1$ Grössen

$$(\beta.)\qquad t,\quad p_s,\quad p_s^0,\quad p_s',\quad p_s^{\prime 0},\quad \ldots,\quad p_s^{(\nu-1)},\quad p_s^{(\nu-1)^0}$$

aus, denkt Φ durch Ausführung des Integrales (1.), nach Einsetzung der Werthe (3.) in die Function unter dem Integral, als Function der Grössen $t,\ p_1^0,\ \ldots,\ p_\mu^0,\ \ldots,\ p_1^{(2\nu-1)^0},\ \ldots,\ p_\mu^{(2\nu-1)^0}$, und somit durch Substitution der für die Grössen (α.) gefundenen Werthe als reine Function der Grössen (β.) dargestellt, so können wir die Variation von Φ auch in die Form setzen:

$$(4.)\quad \delta\Phi = \sum_1^\mu{}_s \frac{\partial\Phi}{\partial p_s}\delta p_s + \sum_1^\mu{}_s \frac{\partial\Phi}{\partial p_s^0}\delta p_s^0 + \cdots + \sum_1^\mu{}_s \frac{\partial\Phi}{\partial p_s^{(\nu-1)}}\delta p_s^{(\nu-1)} + \sum_1^\mu{}_s \frac{\partial\Phi}{\partial p_s^{(\nu-1)^0}}\delta p_s^{(\nu-1)^0},$$

und man erhält somit durch Vergleichung mit (2.) die folgenden Beziehungen:

$$(5.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial p_s} = \dfrac{\partial H}{\partial p_s'} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial H}{\partial p_s''} + \cdots + (-1)^{\nu-1}\dfrac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\dfrac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial p_s'} = \dfrac{\partial H}{\partial p_s''} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial H}{\partial p_s'''} + \cdots + (-1)^{\nu-2}\dfrac{d^{\nu-2}}{dt^{\nu-2}}\dfrac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial p_s^{(\nu-2)}} = \dfrac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu-1)}} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial p_s^{(\nu-1)}} = \dfrac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} \end{cases}$$

und

$$(6.)\quad \begin{cases} -\dfrac{\partial\Phi}{\partial p_s^0} = \left(\dfrac{\partial H}{\partial p_s'}\right)_0 - \left(\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial H}{\partial p_s''}\right)_0 + \cdots + (-1)^{\nu-1}\left(\dfrac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\dfrac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right)_0, \\ -\dfrac{\partial\Phi}{\partial p_s'^0} = \left(\dfrac{\partial H}{\partial p_s''}\right)_0 - \left(\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial H}{\partial p_s'''}\right)_0 + \cdots + (-1)^{\nu-2}\left(\dfrac{d^{\nu-2}}{dt^{\nu-2}}\dfrac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right)_0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -\dfrac{\partial\Phi}{\partial p_s^{(\nu-2)^0}} = \left(\dfrac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu-1)}}\right)_0 - \left(\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right)_0, \\ -\dfrac{\partial\Phi}{\partial p_s^{(\nu-1)^0}} = \left(\dfrac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right)_0. \end{cases}$$

Differentiirt man die Gleichung (1.) nach t, so folgt

$$\frac{d\Phi}{dt} = H + \sum_1^\mu{}_\lambda P_\lambda p_\lambda$$

oder, indem Φ wieder als Function der Grössen (β.) betrachtet wird,

$$(7.)\quad \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \sum_1^\mu{}_s \frac{\partial\Phi}{\partial p_s}p_s' + \sum_1^\mu{}_s \frac{\partial\Phi}{\partial p_s'}p_s'' + \cdots + \sum_1^\mu{}_s \frac{\partial\Phi}{\partial p_s^{(\nu-1)}}p_s^{(\nu)} = H + \sum_1^\mu{}_s P_s p_s,$$

und vermöge der Gleichungen (5.) und (V. 4.), wenn t in H nicht vorkommt,

$$(8.)\quad \frac{\partial\Phi}{\partial t} = E + \sum_1^\mu{}_s P_s p_s.$$

Berechnet man nun aus den μ Gleichungen

$$(9.)\quad \frac{\partial \Phi}{\partial p_1^{(\nu-1)}} = \frac{\partial H}{\partial p_1^{(\nu)}}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^{(\nu-1)}} = \frac{\partial H}{\partial p_2^{(\nu)}}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial p_\mu^{(\nu-1)}} = \frac{\partial H}{\partial p_\mu^{(\nu)}}$$

die μ Grössen $p_1^{(\nu)}, p_2^{(\nu)}, \ldots, p_\mu^{(\nu)}$, ausgedrückt durch die übrigen in H enthaltenen Grössen, so dass sich $p_s^{(\nu)}$ in der Form ergiebt

$$p_s^{(\nu)} = \omega_s\Big(t, p_1, \ldots, p_\mu, \ldots, p_1^{(\nu-1)}, \ldots, p_\mu^{(\nu-1)}, \frac{\partial \Phi}{\partial p_1^{(\nu-1)}}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial p_\mu^{(\nu-1)}}\Big),$$

und setzt diese Werthe in (7.) ein, *so ergiebt sich die partielle Differentialgleichung erster Ordnung*

$$(10.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum\limits_1^\mu{}_s p_s' \dfrac{\partial \Phi}{\partial p_s} + \sum\limits_1^\mu{}_s p_s'' \dfrac{\partial \Phi}{\partial p_s'} + \cdots + \sum\limits_1^\mu{}_s p_s^{(\nu-1)} \dfrac{\partial \Phi}{\partial p_s^{(\nu-2)}} \\ + \sum\limits_1^\mu{}_s \omega_s\Big(t, p_1, \ldots, p_\mu, \ldots, p_1^{(\nu-1)}, \ldots, p_\mu^{(\nu-1)}, \dfrac{\partial \Phi}{\partial p_1^{(\nu-1)}}, \ldots, \dfrac{\partial \Phi}{\partial p_\mu^{(\nu-1)}}\Big) \dfrac{\partial \Phi}{\partial p_s^{(\nu-1)}} \\ = H(t, p_1, \ldots, p_\mu, \ldots, p_1^{(\nu-1)}, \ldots, p_\mu^{(\nu-1)}, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\mu) + \sum\limits_1^\mu{}_s P_s p_s \end{cases}$$

mit der abhängigen Variablen Φ und den $\mu\nu+1$ unabhängigen Variablen

$$t, \quad p_1, \quad \ldots, \quad p_\mu, \quad p_1', \quad \ldots, \quad p_\mu', \quad \ldots, \quad p_1^{(\nu-1)}, \quad \ldots, \quad p_\mu^{(\nu-1)},$$

und es ist dies die für jede Form des kinetischen Potentials nach Berechnung der Grössen $p_1^{(\nu)}, \ldots, p_\mu^{(\nu)}$ aus den Gleichungen (9.) *unmittelbar hinschreibbare Form der erweiterten Hamiltonschen Differentialgleichung.*

Kennt man das $\mu\nu+1$ willkürliche Constanten enthaltende vollständige Integral der partiellen Differentialgleichung (10.), von denen eine additiv ist, während man als die anderen die Grössen

$$p_1^0, \quad \ldots, \quad p_\mu^0, \quad p_1'^0, \quad \ldots, \quad p_\mu'^0, \quad \ldots, \quad p_1^{(\nu-1)^0}, \quad \ldots, \quad p_\mu^{(\nu-1)^0}$$

betrachten kann, so werden die $\mu\nu$ Gleichungen (6.), in denen die auf den rechten Seiten vorkommenden Grössen

$$p_1^{(\nu)^0}, \quad \ldots, \quad p_\mu^{(\nu)^0}, \quad \ldots, \quad p_1^{(2\nu-1)^0}, \quad \ldots, \quad p_\mu^{(2\nu-1)^0}$$

als neu eintretende Constanten betrachtet werden, die $\mu\nu$ Grössen

$$p_s, \quad p_s', \quad \ldots, \quad p_s^{(\nu-1)}$$

als Functionen von t und den $2\mu\nu$ willkürlichen Constanten

$$p_s^0, \quad p_s'^0, \quad \ldots, \quad p_s^{(2\nu-1)^0}$$

liefern, womit das Integralsystem der erweiterten μ *Lagrange*schen Gleichungen 2νter Ordnung gegeben ist.

Enthält H nur die ersten Ableitungen der Coordinaten, so gehen die Gleichungen (5.) und (6.) in

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_s} = \frac{\partial H}{\partial p'_s} \tag{11.}$$

und

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial p^0_s} = \left(\frac{\partial H}{\partial p'_s}\right)_0 \tag{12.}$$

über, und setzt man die aus den μ Gleichungen (11.) sich ergebenden Werthe von $p'_1, \ldots, p'_\mu$ durch $t, p_1, \ldots, p_\mu, \frac{\partial \Phi}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial p_\mu}$ ausgedrückt in den von t, den Coordinaten und deren ersten Ableitungen abhängigen Werth des Energievorrathes E ein, der dann mit (E) bezeichnet werden soll, so geht die erweiterte *Hamilton*sche partielle Differentialgleichung (8.) in

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = (E) + \sum_1^\mu{}_s P_s p_s \tag{13.}$$

über, und das vollständige Integral derselben, welches Φ als Function von $t, p_1, \ldots, p_\mu$ und μ willkürlichen Constanten $p^0_1, \ldots, p^0_\mu$ liefert, wird aus den μ Gleichungen (12.) die Grössen $p_1, \ldots, p_\mu$ als Functionen von $t, p^0_1, \ldots, p^0_\mu, p'^0_1, \ldots, p'^0_\mu$ entwickeln lassen.

Für $H = -T - U$ werden die Gleichungen (11.) und (12.):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_s} = -\frac{\partial T}{\partial p'_s} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial p^0_s} = \left(\frac{\partial T}{\partial p'_s}\right)_0, \tag{14.}$$

und da T unter der Voraussetzung, dass die Bedingungsgleichungen die Zeit t nicht explicite enthalten, eine homogene Function zweiten Grades von $p'_1, \ldots, p'_\mu$, also

$$\frac{\partial T}{\partial p'_s} = a_{s1} p'_1 + a_{s2} p'_2 + \cdots + a_{s\mu} p'_\mu$$

ist, worin $a_{s\varrho}$ Functionen der p bedeuten, so nehmen diese Gleichungen die Form an

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_s} = -a_{s1} p'_1 - \cdots - a_{s\mu} p'_\mu \tag{15.}$$

und

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p^0_s} = a^0_{s1} p'^0_1 + \cdots + a^0_{s\mu} p'^0_\mu. \tag{16.}$$

Beachtet man aber weiter, dass in diesem Falle der Energievorrath E durch den Ausdruck definirt ist

$$E = T - U = \tfrac{1}{2} \sum_1^\mu{}_s p'_s \frac{\partial T}{\partial p'_s} - U,$$

dass ferner aus den Gleichungen (15.) sich

$$p'_s = b_{s1}\frac{\partial \Phi}{\partial p_1} + b_{s2}\frac{\partial \Phi}{\partial p_2} + \cdots + b_{s\mu}\frac{\partial \Phi}{\partial p_\mu}$$

ergiebt, worin die Grössen b wiederum Functionen der Coordinaten bedeuten, so wird

$$(E) = -\tfrac{1}{2}\sum_1^\mu{}_s \frac{\partial \Phi}{\partial p_s}\left(b_{s1}\frac{\partial \Phi}{\partial p_1} + \cdots + b_{s\mu}\frac{\partial \Phi}{\partial p_\mu}\right) - U,$$

und es lautet daher die partielle Differentialgleichung (13.):

$$(17.)\quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\sum_1^\mu{}_s \frac{\partial \Phi}{\partial p_s}\left(b_{s1}\frac{\partial \Phi}{\partial p_1} + \cdots + b_{s\mu}\frac{\partial \Phi}{\partial p_\mu}\right) + U = \sum_1^\mu{}_s P_s p_s.$$

Für den Fall dass die lebendige Kraft nur die Quadrate der Ableitungen der Coordinaten enthält, wie z. B. bei einem freien System, ist

$$\frac{\partial T}{\partial p'_s} = a_{ss} p'_s,$$

und da dann die Gleichungen (15.) und (16.) in

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_s} = -a_{ss} p'_s, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial p_s^0} = a_{ss}^0 p_s'^0$$

übergehen, so wird die *Hamilton*sche partielle Differentialgleichung die Form annehmen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \tfrac{1}{2}\sum_1^\mu{}_s \frac{1}{a_{ss}}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial p_s}\right)^2 + U = \sum_1^\mu{}_s P_s p_s.$$

Für den Fall, dass das kinetische Potential die Zeit t nicht explicite enthält, lässt sich die *Hamilton*sche partielle Differentialgleichung (10.) durch die analoge Substitution, welche *Jacobi* unter der Annahme von $H = -T - U$ angegeben, in die entsprechende einfachere transformiren.

XIV.

Transformation der erweiterten *Lagrange*schen Bewegungsgleichungen in das erweiterte totale Differentialgleichungssystem von *Hamilton*.

Es soll nunmehr noch das totale *Hamilton*sche Differentialgleichungssystem für den Fall des erweiterten kinetischen Potentiales hergeleitet werden, welches in Form und Wesen der bekannten für $H = -T - U$ geltenden Differentialgleichungen einen deutlicheren Einblick gestatten wird.

Seien die äusseren Kräfte P_s gleich Null, so dass die erweiterten *Lagrange*schen Gleichungen lauten

$$\frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'_s} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial p''_s} - \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} = 0,$$

während der Energievorrath durch den Ausdruck

$$\begin{aligned} E = H &- \sum_1^\mu{}_\varrho\, p'_\varrho \left\{ \frac{\partial H}{\partial p'_\varrho} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p''_\varrho} + \cdots + (-1)^{\nu-1}\frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\frac{\partial H}{\partial p^{(\nu)}_\varrho}\right\} \\ &- \sum_1^\mu{}_\varrho\, p''_\varrho \left\{ \frac{\partial H}{\partial p''_\varrho} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'''_\varrho} + \cdots + (-1)^{\nu-2}\frac{d^{\nu-2}}{dt^{\nu-2}}\frac{\partial H}{\partial p^{(\nu)}_\varrho}\right\} \\ &- \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &- \sum_1^\mu{}_\varrho\, p^{(\nu)}_\varrho \frac{\partial H}{\partial p^{(\nu)}_\varrho} \end{aligned}$$

gegeben ist, so werde

$$(1.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial p'_\varrho} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial H}{\partial p''_\varrho} + \cdots + (-1)^{\nu-1}\dfrac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\dfrac{\partial H}{\partial p^{(\nu)}_\varrho} = p_{\varrho 2\nu-1}, \\ \dfrac{\partial H}{\partial p''_\varrho} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial H}{\partial p'''_\varrho} + \cdots + (-1)^{\nu-2}\dfrac{d^{\nu-2}}{dt^{\nu-2}}\dfrac{\partial H}{\partial p^{(\nu)}_\varrho} = p_{\varrho 2\nu-2}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot

ist; da ferner der oben gegebenen Definition gemäss

$$(3.)\qquad (E) = (H) - \sum_1^{\mu}{}_{\varrho}\, p'_{\varrho} p_{\varrho 2\nu-1} - \sum_1^{\mu}{}_{\varrho}\, p''_{\varrho} p_{\varrho 2\nu-2} - \cdots - \sum_1^{\mu}{}_{\varrho}\, p_{\varrho}^{(\nu-1)} p_{\varrho\nu+1} - \sum_1^{\mu}{}_{\varrho}\, (p_{\varrho}^{(\nu)})\, p_{\varrho\nu}$$

ist, so wird

$$\frac{\partial(E)}{\partial p_s} = \frac{\partial(H)}{\partial p_s} - \sum_1^{\mu}{}_{\varrho}\, p_{\varrho\nu} \frac{\partial(p_{\varrho}^{(\nu)})}{\partial p_s},$$

und da

$$\frac{\partial(H)}{\partial p_s} = \Big(\frac{\partial H}{\partial p_s}\Big) + \sum_1^{\mu}{}_{\varrho} \Big(\frac{\partial H}{\partial p_{\varrho}^{(\nu)}}\Big) \frac{\partial(p_{\varrho}^{(\nu)})}{\partial p_s} = \Big(\frac{\partial H}{\partial p_s}\Big) + \sum_1^{\mu}{}_{\varrho}\, p_{\varrho\nu} \frac{\partial(p_{\varrho}^{(\nu)})}{\partial p_s}$$

ist, aus den beiden letzten Gleichungen

$$\Big(\frac{\partial H}{\partial p_s}\Big) = \frac{\partial(E)}{\partial p_s},$$

so dass die Gleichung (2.) in

$$(4.)\qquad \frac{dp_{s2\nu-1}}{dt} = \frac{\partial(E)}{\partial p_s}$$

übergeht.

Bedeutet nun λ eine der Zahlen 2, 3, ..., ν, so wird

$$\frac{dp_{s2\nu-\lambda}}{dt} = \frac{d}{dt}\Big\{\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\lambda)}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\lambda+1)}} + \cdots + (-1)^{\nu-\lambda} \frac{d^{\nu-\lambda}}{dt^{\nu-\lambda}} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\Big\};$$

nun ist aber nach (3.)

$$\frac{\partial(E)}{\partial p_s^{(\lambda-1)}} = \frac{\partial(H)}{\partial p_s^{(\lambda-1)}} - \sum_1^{\mu}{}_{\varrho}\, p_{\varrho\nu} \frac{\partial(p_{\varrho}^{(\nu)})}{\partial p_s^{(\lambda-1)}} - p_{s2\nu-\lambda+1}$$

und

$$\frac{\partial(H)}{\partial p_s^{(\lambda-1)}} = \Big(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\lambda-1)}}\Big) + \sum_1^{\mu}{}_{\varrho} \Big(\frac{\partial H}{\partial p_{\varrho}^{(\nu)}}\Big) \frac{\partial(p_{\varrho}^{(\nu)})}{\partial p_s^{(\lambda-1)}} = \Big(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\lambda-1)}}\Big) + \sum_1^{\mu}{}_{\varrho}\, p_{\varrho\nu} \frac{\partial(p_{\varrho}^{(\nu)})}{\partial p_s^{(\lambda-1)}},$$

woraus nach (1.)

$$\frac{\partial(E)}{\partial p_s^{(\lambda-1)}} = \Big(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\lambda-1)}}\Big) - p_{s2\nu-\lambda+1} = \Big(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\lambda-1)}}\Big)$$

$$-\Big(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\lambda-1)}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\lambda)}} + \cdots + (-1)^{\nu-\lambda+1} \frac{d^{\nu-\lambda+1}}{dt^{\nu-\lambda+1}} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\Big) = \frac{dp_{s2\nu-\lambda}}{dt}$$

folgt, und wir erhalten daher mit Rücksicht auf (4.):

$$\frac{dp_{s2\nu-\lambda}}{dt} = \frac{\partial(E)}{\partial p_s^{(\lambda-1)}}. \qquad \text{(für } \lambda = 1, 2, 3, \ldots, \nu\text{)}$$

Bildet man nun für $\delta = \nu,\ \nu+1,\ \ldots,\ 2\nu-1$

$$\frac{\partial(E)}{\partial p_{s\delta}} = \frac{\partial(H)}{\partial p_{s\delta}} - p_s^{(2\nu-\delta)} - \sum_1^{\mu}{}_\varrho\, p_{\varrho\nu}\frac{\partial(p_\varrho^{(\nu)})}{\partial p_{s\delta}}$$

und bemerkt, dass

$$\frac{\partial(H)}{\partial p_{s\delta}} = \sum_1^{\mu}{}_\varrho\left(\frac{\partial H}{\partial p_\varrho^{(\nu)}}\right)\frac{\partial(p_\varrho^{(\nu)})}{\partial p_{s\delta}} = \sum_1^{\mu}{}_\varrho\, p_{\varrho\nu}\frac{\partial(p_\varrho^{(\nu)})}{\partial p_{s\delta}}$$

ist, wobei, wie unmittelbar zu sehen, für $\delta > \nu$

$$\frac{\partial(H)}{\partial p_{s\delta}} = 0, \quad \frac{\partial(p_\varrho^{(\nu)})}{\partial p_{s\delta}} = 0$$

ist, so folgt

$$\frac{dp_s^{(2\nu-\delta-1)}}{dt} = -\frac{\partial(E)}{\partial p_{s\delta}},$$

und wir erhalten somit den folgenden Satz:

Wenn man vermöge der Gleichungen (1.) *die Grössen* $p_\varrho^{(\nu)}, p_\varrho^{(\nu+1)}, \ldots, p_\varrho^{(2\nu-1)}$ *als Functionen von* $p_\varrho, p_\varrho', \ldots, p_\varrho^{(\nu-1)}, p_{\varrho 2\nu-1}, p_{\varrho 2\nu-2}, \ldots, p_{\varrho\nu}$ *darstellt und in den Ausdruck E der Energie einsetzt, der dann in* (E) *übergehen möge, so lassen sich die verallgemeinerten Lagrangeschen Bewegungsgleichungen durch das erweiterte Hamiltonsche Differentialgleichungssystem ersetzen:*

$$(5.)\quad \begin{cases} \dfrac{dp_{s2\nu-1}}{dt} = \dfrac{\partial(E)}{\partial p_s}, & \dfrac{dp_{s2\nu-2}}{dt} = \dfrac{\partial(E)}{\partial p_s'}, & \ldots, & \dfrac{dp_{s\nu}}{dt} = \dfrac{\partial(E)}{\partial p_s^{(\nu-1)}}, \\ \dfrac{dp_s^{(\nu-1)}}{dt} = -\dfrac{\partial(E)}{\partial p_{s\nu}}, & \dfrac{dp_s^{(\nu-2)}}{dt} = -\dfrac{\partial(E)}{\partial p_{s\nu+1}}, & \ldots, & \dfrac{dp_s}{dt} = -\dfrac{\partial(E)}{\partial p_{s2\nu-1}}. \end{cases}$$

Für den Fall, dass das kinetische Potential nur die ersten Ableitungen der Coordinaten enthält, gehen, wie unmittelbar zu sehen, die erweiterten *Hamilton*schen Gleichungen in das System der 2μ simultanen Differentialgleichungen über

$$\frac{dp_{s1}}{dt} = \frac{\partial(E)}{\partial p_s}, \quad \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial(E)}{\partial p_{s1}},$$

worin (E) den Ausdruck für den Energievorrath darstellt, wenn in denselben der aus den μ Gleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial p_\varrho'} = p_{\varrho 1}$$

sich ergebende Werth von p_ϱ' durch t, p_σ, $p_{\sigma 1}$ ausgedrückt eingesetzt wird; und ist

$$H = -T - U, \quad \text{also} \quad E = T - U,$$

so erhält man, wenn

$$\frac{\partial T}{\partial p'_\varrho} = -\frac{\partial H}{\partial p'_\varrho} = q_\varrho$$

gesetzt und der aus diesen in den p'_ϱ linearen Gleichungen sich ergebende Werth dieser Grössen durch t, p_σ, q_σ ausgedrückt in den Energievorrath E substituirt wird, das bekannte *Hamilton*sche System

$$\frac{dp_s}{dt} = \frac{\partial(E)}{\partial q_s}, \quad \frac{dq_s}{dt} = -\frac{\partial(E)}{\partial p_s}.$$

Aus der Form der Differentialgleichungen (5.) ist unmittelbar ersichtlich,

dass auch der Multiplicator des erweiterten Hamiltonschen Systems eine Constante ist, und daher der bekannte Jacobische Satz vom letzten Multiplicator auch hier seine Gültigkeit behält,

und ebenso zeigt der *Poisson*sche Satz für das Differentialgleichungssystem (5.),

dass, wenn

$$\varphi(p_s,\ p'_s,\ \ldots,\ p_s^{(\nu-1)},\ p_{s\nu},\ p_{s\nu+1},\ \ldots,\ p_{s2\nu-1},\ t)$$

und

$$\psi(p_s,\ p'_s,\ \ldots,\ p_s^{(\nu-1)},\ p_{s\nu},\ p_{s\nu+1},\ \ldots,\ p_{s2\nu-1},\ t),$$

worin die Grössen p_s, p'_s, ... die Repräsentanten aller Werthe p_1, ..., p_μ, p'_1, ..., p'_μ, ... sein sollen, zwei Integralfunctionen des Differentialgleichungssystems (5.) *sind, der Ausdruck*

$$\sum_1^\mu{}_\sigma \sum_\nu^{2\nu-1}{}_\varrho \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial p_{\sigma\varrho}} \frac{\partial \psi}{\partial p_\sigma^{(2\nu-1-\varrho)}} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_\sigma^{(2\nu-1-\varrho)}} \frac{\partial \psi}{\partial p_{\sigma\varrho}} \right\}$$

ebenfalls eine Integralfunction jener Differentialgleichungen darstellt.

Es mag endlich noch gestattet sein, einen Satz über die Natur der Integrale der erweiterten *Hamilton*schen Bewegungsgleichungen hinzuzufügen.

Sei das kinetische Potential H eine *algebraische* Function von t, p_s, p'_s, ..., $p_s^{(\nu)}$, welche der Gleichung genügen möge

(6.) $$H^\delta + r_1(t,\ p_s,\ p'_s,\ \ldots,\ p_s^{(\nu)})H^{\delta-1} + \cdots + r_\delta(t,\ p_s,\ p'_s,\ \ldots,\ p_s^{(\nu)}) = 0,$$

worin r_1, r_2, ..., r_δ rationale Functionen der eingeschlossenen Grössen bedeuten, so sind die Ableitungen beliebiger Ordnung von H nach den Coordinaten und deren nach der Zeit genommenen Ableitungen bekanntlich rationale Functionen eben dieser Grössen und von H selbst, und es können

somit die Gleichungen (1.) in die Form gesetzt werden:

$$(7.)\quad \begin{cases} R_{1\varrho}\ (t,\ H,\ p_1,\ \ldots,\ p_\mu,\ p'_1,\ \ldots,\ p'_\mu,\ \ldots,\ p_1^{(2\nu-1)},\ \ldots,\ p_\mu^{(2\nu-1)}) = p_{\varrho 2\nu-1}, \\ R_{2\varrho}\ (t,\ H,\ p_1,\ \ldots,\ p_\mu,\ p'_1,\ \ldots,\ p'_\mu,\ \ldots,\ p_1^{(2\nu-2)},\ \ldots,\ p_\mu^{(2\nu-2)}) = p_{\varrho 2\nu-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\

einer mit Adjungirung von (E_1), t, p_σ, p'_σ, $\ldots$, $p_\sigma^{(\nu-1)}$, $p_{\sigma 2\nu-1}$, $\ldots$, $p_{\sigma\nu}$ irreductiblen Gleichung

$$(12.)\quad \begin{cases} \omega^m + f_1((E_1),\ t,\ p_\sigma,\ \ldots,\ p_\sigma^{(\nu-1)},\ p_{\sigma 2\nu-1},\ \ldots,\ p_{\sigma\nu})\omega^{m-1} + \cdots \\ \qquad\qquad + f_m((E_1),\ t,\ p_\sigma,\ \ldots,\ p_\sigma^{(\nu-1)},\ p_{\sigma 2\nu-1},\ \ldots,\ p_{\sigma\nu}) = 0 \end{cases}$$

sein mag, in welcher $f_1, \ldots, f_m$ rationale Functionen der eingeschlossenen Grössen darstellen.

Da nach der Definition einer Integralfunction vermöge (10.) die Gleichung

$$(13.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\omega_1}{\partial t} - \sum_1^\mu{}_s \dfrac{\partial\omega_1}{\partial p_s}\dfrac{\partial(E_1)}{\partial p_{s2\nu-1}} - \sum_1^\mu{}_s \dfrac{\partial\omega_1}{\partial p'_s}\dfrac{\partial(E_1)}{\partial p_{s2\nu-2}} - \cdots - \sum_1^\mu{}_s \dfrac{\partial\omega_1}{\partial p_s^{(\nu-1)}}\dfrac{\partial(E_1)}{\partial p_{s\nu}} \\ \quad + \sum_1^\mu{}_s \dfrac{\partial\omega_1}{\partial p_{s2\nu-1}}\dfrac{\partial(E_1)}{\partial p_s} + \sum_1^\mu{}_s \dfrac{\partial\omega_1}{\partial p_{s2\nu-2}}\dfrac{\partial(E_1)}{\partial p'_s} + \cdots + \sum_1^\mu{}_s \dfrac{\partial\omega_1}{\partial p_{s\nu}}\dfrac{\partial(E_1)}{\partial p_s^{(\nu-1)}} = 0 \end{cases}$$

identisch befriedigt sein muss, die partiellen Differentialquotienten von (E_1) aber wieder nach Gleichung (9.) sich rational durch (E_1) und die anderen in den Coefficienten dieser Gleichung vorkommenden Grössen ausdrücken lassen, und somit auch die partiellen Differentialquotienten von ω_1 nach (12.) rationale Functionen von

$$\omega_1,\quad (E_1),\quad t,\quad p_\sigma,\quad \ldots,\quad p_\sigma^{(\nu-1)},\quad p_{\sigma 2\nu-1},\quad \ldots,\quad p_{\sigma\nu}$$

sein werden, so wird (13.) in eine der Gleichung (12.) gleichartige Gleichung in ω übergehen, welche ebenfalls durch ω_1 befriedigt wird, und somit aus der Irreductibilität von (12.) folgen, dass alle Lösungen dieser letzteren auch der Gleichung (13.) genügen, somit auch Integralfunctionen des Differentialgleichungssystems (10.) sein werden. Daraus folgt aber, dass, weil dann

$$\frac{d\omega_1}{dt},\quad \frac{d\omega_2}{dt},\quad \ldots,\quad \frac{d\omega_m}{dt}$$

mit Benutzung der Differentialgleichungen (10.) identisch verschwinden müssen, entweder $f_1, f_2, \ldots, f_m$ selbst Integralfunctionen des Systems sein werden oder $m = 1$ ist, und wir finden somit, ***dass eine algebraische Integralfunction des Differentialgleichungssystems*** (10.) ***entweder selbst rational aus*** (E_1), t, p_σ, $\ldots$, $p_\sigma^{(\nu-1)}$, $p_{\sigma 2\nu-1}$, $\ldots$, $p_{\sigma\nu}$ ***zusammengesetzt ist, oder eine algebraische Zusammensetzung solcher rationaler Integralfunctionen bildet.***

Ersetzt man nunmehr in diesen rationalen Integralfunctionen die Grössen $p_{\varrho 2\nu-1}$, $p_{\varrho 2\nu-2}$, $\ldots$, $p_{\varrho\nu+1}$, $p_{\varrho\nu}$ durch die in den Gleichungen (7.) ge-

gebenen rationalen Functionen, in denen H_1 für H zu substituiren ist, so geht (E_1) in E_1 über, welches wiederum rational durch H_1, t und p_σ, p'_σ, ..., $p_\sigma^{(2\nu-1)}$ ausdrückbar ist, und es ergiebt sich somit das nachfolgende Theorem:

Ist das kinetische Potential eine algebraische Function der Zeit, der Coordinaten und deren nach der Zeit genommenen Ableitungen bis zur νten Ordnung hin, und besitzt das erweiterte Hamiltonsche Differentialgleichungssystem eine algebraische Integralfunction, so ist dieselbe entweder selbst eine rationale Function des kinetischen Potentials, der Zeit, der Coordinaten und deren nach der Zeit genommenen Ableitungen bis zur $(2\nu-1)$ten Ordnung hin oder eine algebraische Zusammensetzung solcher rationalen Integralfunctionen.

Zur Theorie der Zweitheilung elliptischer Functionen.

(Von Herrn *B. Igel* in Wien.)

Vorliegende Arbeit hat die Zweitheilung einiger Transformirten der elliptischen Functionen, die Herr *Hermite* gefunden hat, zum Gegenstande. Es handelt sich darum, die vier Werthe der Zweitheilung rational durch die elliptischen Functionen darzustellen. *Einen* Werth hat schon Herr *Hermite* angegeben, einen zweiten erhält man aus diesem durch eine leichte Ueberlegung, hingegen sind die anderen Werthe nicht so leicht zu finden und nur durch Zuhülfenahme der linearen algebraischen Transformationsformeln von *Abel* zu eruiren. Da diese von *Abel* bloss aufgestellt, aber nirgends bewiesen worden und da in der Anleitung zu einem Beweise derselben in dem Buche „Elliptische Functionen" von *Enneper* (zweite Auflage, herausgegeben von *Felix Müller* pag. 348) die Formeln nicht fehlerfrei sind, so reproducire ich, bevor ich von den Formeln Gebrauch mache, in § 3 den Beweis *Ennerpers*.

§ 1.

Herr *Hermite**) hat durch Combination der zwei quadratischen Transformationen

$$\begin{pmatrix} u, & (1+k')u \\ k, & \frac{1-k'}{1+k'} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u, & (1+k)ui \\ k, & \frac{1-k}{1+k} \end{pmatrix}$$

eine Transformation hergestellt, die durch folgende Formel gegeben ist:

$$(1.)\quad sn\left[(1+\sqrt{k})^2 ui \cdot \left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)\right] = i(1+\sqrt{k})^2 \frac{sn(u)}{cn(u)\,dn(u)} \cdot \frac{1+k\,sn^2(u)}{1-k\,sn^2(u)}.$$

Durch die Substitution $\frac{u}{2}$ an Stelle von u und mit Berücksichtigung der

*) *Liouville* J. (2) IX. 145—158.

Formel

$$(2.)\qquad \frac{sn(u)}{cn(u)dn(u)}\,\frac{1+k\,sn^2u}{1-k\,sn^2u} = \frac{1}{(1-k)^2}\,\frac{1-k\,sn^2(2u)-cn(2u)\,dn(2u)}{sn(2u)}$$

erhält Herr *Hermite* die Formel

$$(3.)\qquad sn\Big[\frac{(1+\sqrt{k})^2}{2}\,ui,\ \Big(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\Big)^2\Big] = i\,\frac{1-k\,sn^2(u)-cn(u)\,dn(u)}{(1-\sqrt{k})^2\,sn(u)}.$$

Darin ist ein so wichtiges Princip implicite ausgesprochen, dass es der Mühe werth erscheint, dasselbe zu erörtern. Wenn eine Transformation durch die Formel

$$(4.)\qquad sn\Big(\frac{u}{M},\ \lambda\Big) = F(sn(u),\ cn(u),\ dn(u))$$

gegeben ist, so ist im allgemeinen nicht

$$(5.)\qquad sn\Big(\frac{u}{2M},\ \lambda\Big) = F\Big(sn\Big(\frac{u}{2}\Big),\ cn\Big(\frac{u}{2}\Big),\ dn\Big(\frac{u}{2}\Big)\Big).$$

Die Zweitheilung ist vielmehr, wie bekannt, durch die vier Werthe

$$w_1 = \sqrt{\frac{1-cn\big(\frac{u}{M},\ \lambda\big)}{1+dn\big(\frac{u}{M},\ \lambda\big)}},\quad w_2 = \sqrt{\frac{1+cn\big(\frac{u}{M},\ \lambda\big)}{1-dn\big(\frac{u}{M},\ \lambda\big)}},$$

$$w_3 = \sqrt{\frac{1+cn\big(\frac{u}{M},\ \lambda\big)}{1+dn\big(\frac{u}{M},\ \lambda\big)}},\quad w_4 = \sqrt{\frac{1-cn\big(\frac{u}{M},\ \lambda\big)}{1-dn\big(\frac{u}{M},\ \lambda\big)}}$$

gegeben. Damit die Formel (5.) bestehe, muss die Relation bestehen:

$$(6.)\qquad F(sn(u),\ cn(u),\ dn(u)) = \psi(sn(2u),\ cn(2u),\ dn(2u)).$$

Die Transformationen, bei denen dies der Fall ist und die, wie wir sehen werden, eine unendliche Klasse bilden, haben eine merkwürdige Eigenschaft. Bekanntlich ist in der *Jacobi*schen Transformationstheorie eine der fundamentalsten Formeln die folgende:

$$(7.)\qquad \sqrt{\frac{1-sn\big(\frac{u}{M},\ \lambda\big)}{1+sn\big(\frac{u}{M},\ \lambda\big)}} = \Phi(sn(u)),$$

welche besagt, dass der Ausdruck

$$\frac{1-sn\big(\frac{u}{M},\ \lambda\big)}{1+sn\big(\frac{u}{M},\ \lambda\big)}$$

ein vollständiges Quadrat sei. Die in Rede stehenden Transformationen haben noch die Eigenschaft, dass die vier Ausdrücke

$$(8.) \qquad \frac{1 \pm cn\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)}{1 \pm dn\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)}$$

vollständige Quadrate sind. So ist bekanntlich *ein* Werth der Zweitheilung der *Gauss*schen Transformirten

$$(9.) \quad \begin{cases} sn\left[\frac{(1+k)}{2}u, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right]^2 = \frac{1-cn\left[(1+k)u, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right]}{1+dn\left[(1+k)u, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right]} = \omega_1^2 \\ \qquad = \frac{1+k\,sn^2(u)-cn(u)\,dn(u)}{2}. \end{cases}$$

Durch die Bemerkung, dass

$$w_1^2 w_2^2 = w_3^2 w_4^2 = \frac{1}{\lambda^2} = \left[\frac{(1+k)}{2\sqrt{k}}\right]^2$$

ist, ergeben sich aus (9.) die Formeln

$$(10.) \quad \begin{cases} w_2^2 = \frac{1+k\,sn^2(u)+cn(u)\,dn(u)}{2k\,sn^2(u)}, \\ w_3^2 = \frac{1+k\,sn^2(u)+cn(u)\,dn(u)}{2}, \\ w_4^2 = \frac{1+k\,sn^2(u)-cn(u)\,dn(u)}{2k\,sn^2(u)}. \end{cases}$$

Die Zweitheilung der *Landen*schen Transformirten ist

$$(11.) \quad sn\left[\frac{1+k'}{2}u, \frac{1-k'}{1+k'}\right]^2 = \frac{1 \pm cn(u'\lambda)}{1 \pm dn(u'\lambda)} = \frac{dn(u) \pm [1-(1+k')sn^2(u)]}{dn(u) \pm [1-(1-k')sn^2(u)]}.$$

Dagegen ist bei der *Hermite*schen Transformirten, da

$$cn\left[(1+\sqrt{k})^2 ui, \left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2\right] = \frac{cn^2(u)\,dn^2(u)+(1+\sqrt{k})^2(1+k)sn^2(u)}{(1-k\,sn^2(u))\,cn(u)\,dn(u)},$$

$$dn\left[(1+\sqrt{k})^2 ui, \left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2\right] = \frac{cn^2(u)\,dn^2(u)+(1-\sqrt{k})^2(1+k)sn^2(u)}{(1-k\,sn^2(u))\,cn(u)\,dn(u)}$$

ist,

$$(12.) \quad \begin{cases} w_1 = \sqrt{\frac{(1-k\,sn^2(u))\,cn(u)\,dn(u)-cn^2(u)\,dn^2(u)-(1+\sqrt{k})^2(1+k)sn^2(u)}{(1-k\,sn^2(u))\,cn(u)\,dn(u)+cn^2(u)\,dn^2(u)+(1-\sqrt{k})^2(1+k)sn^2(u)}} \\ \qquad = i\,\frac{1-k\,sn^2(u)-cn(u)\,dn(u)}{(1-\sqrt{k})^2\,sn(u)}, \end{cases}$$

so dass wir die Formel erhalten

$$(13.)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(1-k\,sn^2(u))\,cn(u)\,dn(u)-cn^2(u)\,dn^2(u)-(1+\sqrt{k})^2(1+k)\,sn^2(u)}{(1-k\,sn^2(u))\,cn(u)\,dn(u)+cn^2(u)\,dn^2(u)+(1-\sqrt{k})^2(1+k)\,sn^2(u)} \\ \qquad = \left[i\,\dfrac{1-k\,sn^2(u)-cn(u)\,dn(u)}{(1-\sqrt{k})^2\,sn(u)} \right]^2. \end{array} \right.$$

§ 2.

Bevor ich weiter gehe, will ich die letzte Formel, die nicht evident ist, durch Rechnung verificiren. Es ist

$$(14.)\quad w_1^2 w_2^2 = \frac{(1-k\,sn^2(u))^2\,cn^2(u)\,dn^2(u)-[cn^2(u)\,dn^2(u)+(1+\sqrt{k})^2(1+k)\,sn^2(u)]^2}{(1-k\,sn^2(u))^2\,cn^2(u)\,dn^2(u)-[cn^2(u)\,dn^2(u)+(1-\sqrt{k})^2(1+k)\,sn^2(u)]^2}.$$

Da nun

$$(1-k\,sn^2(u))^2-cn^2(u)\,dn^2(u) = (1-k)^2\,sn^2(u) = (1+\sqrt{k})^2(1-\sqrt{k})^2\,sn^2(u)$$

ist, so kann man die Formel (14.) wie folgt schreiben:

$$(15.)\quad w_1^2 w_2^2 = \left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^2 \left\{ \frac{[(1-\sqrt{k})^2-2(1+k)]\,sn^2(u)\,cn^2(u)\,dn^2(u)-(1+\sqrt{k})^2(1+k)^2\,sn^4(u)}{[(1-\sqrt{k})^2-2(1+k)]\,sn^2(u)\,cn^2(u)\,dn^2(u)-(1-\sqrt{k})^2(1+k)^2\,sn^4(u)} \right\}$$

und man sieht sofort, dass sie sich auf die folgende reducirt

$$(16.)\quad w_1^2 w_2^2 = \left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^4 \left\{ \frac{-sn^2(u)\,cn^2(u)\,dn^2(u)-(1+k)^2\,sn^4(u)}{-sn^2(u)\,cn^2(u)\,dn^2(u)-(1+k)^2\,sn^4(u)} \right\} = \left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^4.$$

Jetzt ist es leicht, die Formel (13.) zu verificiren, denn multiplicirt man Zähler und Nenner mit dem Ausdrucke

$$(1-k\,sn^2(u))\,cn(u)\,dn(u)-(1-\sqrt{k})^2(1+k)\,sn^2(u),$$

so wird der Nenner nach dem eben Gezeigten

$$= -(1-\sqrt{k})^4\,sn^2(u)\{cn^2(u)\,dn^2(u)+(1+k)^2\,sn^2(u)\}.$$

Soll also (13.) richtig sein, so muss die Identität bestehen

$$\{(1-k\,sn^2(u))^2-cn^2(u)\,dn^2(u)+2(1-k\,sn^2(u))\,cn(u)\,dn(u)\}$$
$$\times\{cn^2(u)\,dn^2(u)+(1+k)^2\,sn^2(u)\}$$
$$= \{(1-k\,sn^2(u))\,cn(u)\,dn(u)-cn^2(u)\,dn^2(u)-(1+\sqrt{k})^2(1+k)\,sn^2(u)\}$$
$$\times\{(1-k\,sn^2(u))\,cn(u)\,dn(u)-cn^2(u)\,dn^2(u)-(1-\sqrt{k})^2(1+k)\,sn^2(u)\}.$$

Diese Identität besteht aber in der That, wie man sich leicht überzeugt, wenn man von der Formel

$$(1-k\,sn^2(u))^2 = (1-k)^2\,sn^2(u)+cn^2(u)\,dn^2(u)$$

Gebrauch macht.

Auf diesem Wege gelangen wir auch zu dem rationalen Werthe von w_2.

Da nämlich der erste Werth w_1 sich folgendermaassen schreiben lässt

$$w_1 = i\frac{1-k\,sn^2(u)-cn(u)\,dn(u)}{(1-\sqrt{k})^2\,sn(u)}$$
$$= i\left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)\left\{\frac{1-k\,sn^2(u)-cn(u)\,dn(u)}{(1-k)\,sn(u)}\right\},$$

da ferner

$$w_1 w_2 = \left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^2$$

ist, so muss w_2 die Form haben

$$w_2 = \left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)\cdot F(sn(u),\ cn(u),\ dn(u)).$$

Da aber

$$F(sn(u),\ cn(u),\ dn(u)).i\,\frac{1-k\,sn^2(u)-cn(u)\,dn(u)}{(1-k)\,sn(u)} = 1$$

sein soll, so muss

$$(17.)\qquad F(sn(u),\ cn(u),\ dn(u)) = -i\,\frac{1-k\,sn^2(u)+cn(u)\,dn(u)}{(1-k)\,sn(u)}$$

sein, wir erhalten daher die Formel

$$(18.)\qquad \frac{1+cn\left[\frac{(1+\sqrt{k})^2}{2}ui,\ \left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2\right]}{1-dn\left[\frac{(1+\sqrt{k})^2}{2}ui,\ \left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2\right]} = \left[-i\,\frac{1-k\,sn^2(u)+cn(u)\,dn(u)}{(1-\sqrt{k})^2\,sn(u)}\right]^2.$$

Durch die Combination folgender Paare quadratischer Transformationen

$$\begin{pmatrix} u, & (1-k')u \\ k, & \frac{1+k'}{1-k'} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} u, & (1+k)ui \\ k, & \frac{1-k}{1+k} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} u, & (1+k')u \\ k, & \frac{1-k'}{1+k} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} u, & (1-k)ui \\ k, & \frac{1-k}{1+k} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} u, & (1-k')u \\ k, & \frac{1+k'}{1-k'} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} u, & (1-k)ui \\ k, & \frac{1+k}{1-k} \end{pmatrix}$$

erhalten wir die der *Hermite*schen ähnlichen Formeln

$$(19.)\quad \begin{cases} sn\left[\frac{(1-\sqrt{k})^2}{2}ui,\ \left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^2\right] = i\frac{1-ksn^2(u)-cn(u)dn(u)}{(1+\sqrt{k})^2 sn(u)}, \\ sn\left[\frac{(1+i\sqrt{k})^2}{2}ui,\ \left(\frac{1-i\sqrt{k}}{1+i\sqrt{k}}\right)^2\right] = i\frac{1+ksn^2(u)-cn(u)dn(u)}{(1-i\sqrt{k})^2 sn(u)}, \\ sn\left[\frac{(1-i\sqrt{k})^2}{2}ui,\ \left(\frac{1+i\sqrt{k}}{1-i\sqrt{k}}\right)^2\right] = i\frac{1+ksn^2(u)-cn(u)dn(u)}{(1+i\sqrt{k})^2 sn(u)}. \end{cases}$$

Es lässt sich nun leicht wie oben verificiren, dass die Ausdrücke rechts die entsprechenden w_1 sind und dass die bezüglichen w_2 die Form haben

$$(20.)\quad \begin{cases} w_2 = -i\frac{1-ksn^2(u)+cn(u)dn(u)}{(1+\sqrt{k})^2 sn(u)}, \\ w_2 = -i\frac{1+ksn^2(u)+cn(u)dn(u)}{(1-i\sqrt{k})^2 sn(u)}, \\ w_2 = -i\frac{1+ksn^2(u)+cn(u)dn(u)}{(1+i\sqrt{k})^2 sn(u)}. \end{cases}$$

Wir wollen nun auch die Werthe w_3 und w_4 der in Rede stehenden Functionen ermitteln. Dazu brauchen wir die linearen algebraischen Transformationsformeln von *Abel*, für welche wir, da sie *Abel* nicht bewiesen hat, im nächsten Paragraphen den Beweis *Ennepers* in etwas anderer Form geben wollen.

§ 3.

In drei Abhandlungen kommt *Abel* auf die Lösung der Differentialgleichung

$$(21.)\quad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}} = \frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

durch die Substitution

$$(22.)\quad y = \frac{\alpha+\beta x}{\alpha'+\beta' x}$$

und giebt ohne Ableitung und nur mit dem Bemerken, dass sie leicht einzusehen seien, folgende sechs Lösungen:

$$(I.)\quad l = \pm k,\quad y = \pm x,\quad y = \pm\frac{1}{kx},\quad \frac{1}{M} = \pm 1,$$

$$(II.)\quad l = \pm\frac{1}{k},\quad y = \pm kx,\quad y = \pm\frac{1}{x},\quad \frac{1}{M} = \pm k,$$

$$\text{(III.)} \qquad l = \pm\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2, \quad y = \pm\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\cdot\frac{1+\sqrt{k}.x}{1-\sqrt{k}.x}, \quad 2M = \pm i(1+\sqrt{k})^2,$$

$$\text{(IV.)} \qquad l = \pm\left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^2, \quad y = \frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\cdot\frac{1+\sqrt{k}.x}{1-\sqrt{k}.x}, \quad 2M = \pm i(1-\sqrt{k})^2,$$

$$\text{(V.)} \qquad l = \pm\left(\frac{1-i\sqrt{k}}{1+i\sqrt{k}}\right)^2, \quad y = \frac{1+i\sqrt{k}}{1-i\sqrt{k}}\cdot\frac{1+i\sqrt{k}.x}{1-i\sqrt{k}.x}, \quad 2M = \pm i(1+i\sqrt{k})^2,$$

$$\text{(VI.)} \qquad l = \pm\left(\frac{1+i\sqrt{k}}{1-i\sqrt{k}}\right)^2, \quad y = \frac{1-i\sqrt{k}}{1+i\sqrt{k}}\cdot\frac{1+i\sqrt{k}.x}{1-i\sqrt{k}.x}, \quad 2M = \pm i(1-i\sqrt{k})^2.$$

Um dieselben zu beweisen, bemerke man, dass das Differential auf der linken Seite von (21.) durch die Substitution (22.) sich wie folgt transformirt:

$$\text{(23.)} \qquad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}} = \frac{1}{M}\frac{dx}{\sqrt{F(x)}},$$

$$\frac{1}{M} = \frac{\alpha'\beta-\alpha\beta'}{\sqrt{(\alpha'^2-\alpha^2)(\alpha'^2-l^2\alpha^2)}},$$

$$F(x) = \left\{1+2\frac{\alpha'\beta'-\alpha\beta}{\alpha'^2-\alpha^2}x+\frac{\beta'^2-\beta^2}{\alpha'^2-\alpha^2}x^2\right\}\left\{1+2\frac{\alpha'\beta'-l^2\alpha\beta}{\alpha'^2-l^2\alpha^2}x+\frac{\beta'^2-l^2\beta^2}{\alpha'^2-l^2\alpha^2}x^2\right\}.$$

Setzt man $F(x) = (1-x^2)(1-k^2x^2)$, so erhält man dadurch, dass die Gleichsetzung gleich hoher Potenzen auf mancherlei Art geschehen kann, mehrere Gleichungssysteme und somit mehrere Lösungen des Problems. Das einfachste System ist

$$\text{(24.)} \qquad \begin{cases} \alpha'\beta'-\alpha\beta = 0, & \alpha'\beta'-l^2\alpha\beta = 0, \\ \dfrac{\beta'^2-\beta^2}{\alpha'^2-\alpha^2} = -1, & \dfrac{\beta'^2-l^2\beta^2}{\alpha'^2-l^2\alpha^2} = -k^2. \end{cases}$$

Aus den ersten zwei Gleichungen folgt mit Berücksichtigung der Ungleichung

$$\alpha\beta'-\alpha'\beta \neq 0,$$

dass

$$\alpha = \beta' = 0, \quad \text{oder} \quad \alpha' = \beta = 0$$

sein muss. Für diese beiden Fälle ergiebt sich aus den letzten Gleichungen (24.)

$$\text{(25.)} \qquad \begin{cases} l = \pm k, & y = \pm x, & \dfrac{1}{M} = \pm 1, \\ l = \pm\dfrac{1}{k}, & y = \pm\dfrac{1}{x}, & \dfrac{1}{M} = \pm k. \end{cases}$$

Man kann aber an Stelle der letzten zwei Gleichungen (24.) folgende annehmen:

$$(26.)\qquad \frac{\beta'^2-\beta^2}{\alpha'^2-\alpha^2}+\frac{\beta'^2-l^2\beta^2}{\alpha'^2-l^2\alpha^2}=-(1+k^2),\quad \frac{\beta'^2-\beta^2}{\alpha'^2-\alpha^2}\cdot\frac{\beta'^2-l^2\beta^2}{\alpha'^2-l^2\alpha^2}=k^2,$$

welche den entsprechenden Fällen gemäss resp. die Formen

$$(27.)\qquad \begin{cases} \frac{\beta^2}{\alpha'^2}(1+l^2)=1+k^2, & \left(\frac{\beta}{\alpha'}\right)^4 l^2=k^2, \\ \frac{\beta'^2}{\alpha^2}\frac{1+l^2}{l^2}=1+k^2, & \left(\frac{\beta'}{\alpha}\right)^4\frac{1}{l^2}=k^2 \end{cases}$$

erhalten. Diese Gleichungen liefern ausser den Lösungen (25.) noch die folgenden:

$$(28.)\qquad \begin{cases} l=\pm\frac{1}{k}, & y=\pm kx^*), \quad \frac{1}{M}=\pm k, \\ l=\pm k, & y=\pm\frac{1}{kx}, \quad \frac{1}{M}=\pm 1. \end{cases}$$

Die Formeln (25.) und (28.) zusammen geben nun die Lösungen I und II.

Wir können die Gleichungen auch in folgender Weise aufstellen:

$$(29.)\qquad \begin{cases} \frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}+\frac{\beta'-l\beta}{\alpha'-l\alpha}=0, & \frac{\beta'+\beta}{\alpha'+\alpha}+\frac{\beta'+l\beta}{\alpha'+l\alpha}=0, \\ \left(\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}\right)^2+\left(\frac{\beta'+\beta}{\alpha'+\alpha}\right)^2=1+k^2, & \frac{\beta'^2-\beta^2}{\alpha'^2-\alpha^2}\cdot\frac{\beta'^2-l^2\beta^2}{\alpha'^2-l^2\alpha^2}=k^2. \end{cases}$$

Die ersten zwei lassen sich auf die Form bringen

$$(30.)\qquad \frac{\left(\frac{\beta'}{\beta}-1\right)\left(\frac{\alpha'}{\alpha}-l\right)}{\left(\frac{\alpha'}{\alpha}-1\right)\left(\frac{\beta'}{\beta}-l\right)}=-1,\quad \frac{\left(\frac{\beta'}{\beta}+1\right)\left(\frac{\alpha'}{\alpha}+l\right)}{\left(\frac{\alpha'}{\alpha}+1\right)\left(\frac{\beta'}{\beta}+l\right)}=-1,$$

aus welchen die Gleichung entsteht

$$(31.)\qquad \frac{\left[\left(\frac{\beta'}{\beta}\right)^2-1\right]\left[\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2-l^2\right]}{\left[\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2-1\right]\left[\left(\frac{\beta'}{\beta}\right)^2-l^2\right]}=1,$$

die offenbar nur durch die Lösungen $\frac{\alpha'}{\alpha}=\pm\frac{\beta'}{\beta}$ befriedigt werden kann. Dass das obere Zeichen zu verwerfen ist, sieht man sofort aus den Gleichungen (30.), welche für $\frac{\alpha'}{\alpha}=-\frac{\beta'}{\beta}$ in eine und dieselbe Gleichung über-

---

*) Nicht $\pm\frac{x}{k}$ wie bei *Enneper*.

gehen, nämlich in

$$\left(\frac{\beta'}{\beta}-1\right)\left(\frac{\beta'}{\beta}+l\right)+\left(\frac{\beta'}{\beta}+1\right)\left(\frac{\beta'}{\beta}-l\right)$$

$$=\left(\frac{\beta'}{\beta}-1\right)\frac{\beta'}{\beta}+\left(\frac{\beta'}{\beta}+1\right)\frac{\beta'}{\beta}-\left[\left(\frac{\beta'}{\beta}+1\right)-\left(\frac{\beta'}{\beta}-1\right)\right]l=0,$$

d. h. in

$$l=\left(\frac{\beta'}{\beta}\right)^2. \tag{32.}$$

Die zwei letzten Gleichungen in (29.) ergeben nun

$$\begin{cases}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\left[\left(\frac{\beta'-\beta}{\beta'+\beta}\right)^2+\left(\frac{\beta'+\beta}{\beta'-\beta}\right)^2\right]=1+k^2,\\ \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^4=k^2,\quad \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2=\pm k,\quad \frac{\beta}{\alpha}=\pm\sqrt{\pm k}.\end{cases} \tag{33.}$$

Durch Combination dieser Gleichungen erhält man die Gleichung

$$\begin{cases}\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\beta'-\beta}{\beta'+\beta}\right)^2-1\right]\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\beta'+\beta}{\beta'-\beta}\right)^2-1\right]\\ =\left[\left(\frac{\beta'-\beta}{\beta'+\beta}\right)^2\mp\frac{1}{k}\right]\left[\left(\frac{\beta'+\beta}{\beta'-\beta}\right)^2\mp\frac{1}{k}\right]\\ =\left[\left(\frac{\beta'-\beta}{\beta'+\beta}\right)^2\mp k\right]\left[\left(\frac{\beta'+\beta}{\beta'-\beta}\right)^2\mp k\right]^{*})=0.\end{cases} \tag{34.}$$

Je nachdem die Gleichungen

$$\frac{\beta}{\alpha}=\pm\sqrt{\pm k},\quad \frac{\beta'}{\alpha'}=\mp\sqrt{\pm k},\quad \frac{\beta'-\beta}{\beta'+\beta}=\pm\sqrt{\pm k},$$

oder

$$\frac{\beta}{\alpha}=\pm\sqrt{\pm k},\quad \frac{\beta'}{\alpha'}=\mp\sqrt{\pm k},\quad \frac{\beta'+\beta}{\beta'-\beta}=\pm\sqrt{\pm k}$$

verwendet werden, erhält man die Lösungen

$$\begin{cases}\alpha=\quad 1\mp\sqrt{\pm k}, & \alpha=\quad 1\mp\sqrt{\pm k},\\ \beta=\pm(1\mp\sqrt{\pm k})\sqrt{\pm k}, & \beta=\pm(1\mp\sqrt{\pm k})\sqrt{\pm k},\\ \alpha'=\mp(1\pm\sqrt{\pm k}), & \alpha'=\quad 1\pm\sqrt{\pm k},\\ \beta'=\mp(1\pm\sqrt{\pm k})\sqrt{\pm k}, & \beta'=\mp(1\pm\sqrt{\pm k})\sqrt{\pm k},\end{cases} \tag{35.}$$

welche aber beide dasselbe Resultat liefern, nämlich die Formeln (III.) bis (VI.).

---

*) Nicht $\left[\left(\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}\right)^2\mp k\right]\left[\left(\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}\right)^2\mp\frac{1}{k}\right]$ wie bei *Enneper*.

Aus dem Gange des Beweises ist ersichtlich, dass die Vertauschung von l mit $-l$ von gar keinem Einflusse ist, es führen daher die Gleichungen, welche aus (29.) durch diese Vertauschung hervorgehen, zu demselben Resultate.

§ 4.

Um auch den dritten und vierten Werth der Zweitheilung zu ermitteln, gehen wir von der dritten Transformation *Abel*s aus, um die Formel *Hermite*s auf einem anderen Wege zu finden. Es ist nämlich

$$(36.)\qquad sn\left[\frac{2u}{i(1+\sqrt{k})^2}+e,\ \left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2\right]=\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\cdot\frac{1+\sqrt{k}\,x}{1-\sqrt{k}\,x},$$

wo

$$e=\int_0^{\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}}\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}}$$

ist. Da nun

$$sn(e)=\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}},\quad cn(e)=\frac{\sqrt{4\sqrt{k}}}{1+\sqrt{k}},\quad dn(e)=i\,\frac{\sqrt{4\sqrt{k}}}{1-\sqrt{k}}$$

ist, so geht die Formel (36.) in folgende über:

$$(37.)\qquad \frac{i\,\frac{4\sqrt{k}}{1-k}\,sn(u'l)+\left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)cn(u'l)\,dn(u'l)}{1-\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2 sn^2(u'l)}=\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\cdot\frac{1+\sqrt{k}sn(u)}{1-\sqrt{k}sn(u)},$$

welche man auch wie folgt schreiben kann:

$$(38.)\qquad \frac{\frac{4i\sqrt{k}}{(1+\sqrt{k})^2}\,sn(u'l)+cn(u'l)\,dn(u'l)}{1-\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2 sn^2(u'l)}=\frac{1+\sqrt{k}sn(u)}{1-\sqrt{k}sn(u)}.$$

Man kann nun setzen

$$\frac{4i\sqrt{k}}{(1+\sqrt{k})^2}\,sn(u'l)+cn(u'l)\,dn(u'l)=f(1+\sqrt{k}sn(u)),$$

$$1-\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2 sn^2(u'l)=f(1-\sqrt{k}sn(u))$$

und erhält die Gleichungen

$$\left[\frac{4i\sqrt{k}}{(1+\sqrt{k})^2}-\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2 sn(u'l)\right]sn(u'l)+cn(u'l)dn(u'l)+1 = 2f,$$

$$\left[\frac{4i\sqrt{k}}{(1+\sqrt{k})^2}+\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2 sn(u'l)\right]sn(u'l)+cn(u'l)dn(u'l)-1 = 2f\sqrt{k}sn(u),$$

aus welchen die Gleichung folgt:

$$(39.)\quad \sqrt{k}sn(u) = \frac{\frac{4i\sqrt{k}}{(1+\sqrt{k})^2}sn(u'l)-\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2 sn^2(u'l)-cn(u'l)dn(u'l)\right]}{\frac{4i\sqrt{k}}{(1+\sqrt{k})^2}sn(u'l)+\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2 sn^2(u'l)+cn(u'l)dn(u'l)\right]}.$$

Vertauscht man in dieser Gleichung u mit $\frac{(1+\sqrt{k})^2}{2}ui$ und k mit $\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2$, so erhält man die Gleichung

$$(40.)\quad \left\{\begin{aligned}&\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)sn\left[\frac{(1+\sqrt{k})^2}{2}ui,\ \left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2\right]\\ &\qquad = \frac{i(1-k)sn(u)-[1-ksn^2(u)-cn(u)dn(u)]}{i(1-k)sn(u)+[1-ksn^2(u)+cn(u)dn(u)]}\\ &\qquad = \frac{1+i\frac{(1-ksn^2(u)-cn(u)dn(u))}{(1-k)sn(u)}}{1-i\frac{(1-ksn^2(u)+cn(u)dn(u))}{(1-k)sn(u)}}\\ &\qquad = i\frac{1-ksn^2(u)-cn(u)dn(u)}{(1-k)sn(u)}.\end{aligned}\right.$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten dieser Gleichung mit $\left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)$, so erhält man die *Hermite*sche Formel (3.), d. h. den Werth w_1. Wie man aus diesem den Werth w_2 findet, ist oben gezeigt worden.

Geht man von der vierten Transformation *Abel*s aus und verfährt ganz wie früher, so erhält man die Gleichung

$$(41.)\quad \sqrt{k}sn(u) = \frac{\left[\frac{4i\sqrt{k}}{(1-\sqrt{k})^2}+\left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^2 sn(u'l)\right]sn(u'l)+cn(u'l)dn(u'l)-1}{\left[\frac{4i\sqrt{k}}{(1-\sqrt{k})^2}-\left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^2 sn(u'l)\right]sn(u'l)+cn(u'l)dn(u'l)+1}.$$

Vertauscht man in dieser Gleichung u mit $\frac{(1-\sqrt{k})^2}{2}ui$ und k mit $\left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^2$,

so erhält man

$$(42.)\quad \begin{cases} \left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right) sn\left[\frac{(1-\sqrt{k})^2}{1}\,ui,\ \left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^2\right] \\ \qquad = \dfrac{i\frac{(1-k)}{k}\,sn(u) - (1-k\,sn^2(u) - cn(u)\,dn(u))}{i\frac{(1-k)}{k}\,sn(u) + (1-k\,sn^2(u) + cn(u)\,dn(u))} \\ \qquad = \dfrac{\frac{1}{k} + i\frac{1-k\,sn^2(u) - cn(u)\,dn(u)}{(1-k)\,sn(u)}}{\frac{1}{k} - i\frac{1-k\,sn^2(u) + cn(u)\,dn(u)}{(1-k)\,sn(u)}}. \end{cases}$$

Um nun entscheiden zu können, welcher der vier Werthe der vorliegenden Function durch (42.) dargestellt wird, bemerke man Folgendes. Die lineare Transformationsformel

$$sn\left(ku,\ \frac{1}{k}\right) = k\,sn(u)$$

ergiebt, wenn man in ihr u mit $\frac{(1-\sqrt{k})^2}{2}\,ui$ und k mit $\left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^2$ vertauscht, die Gleichung

$$(43.)\quad sn\left[\frac{(1+\sqrt{k})^2}{2}\,ui,\ \left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2\right] = \left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right) sn\left[\frac{(1-\sqrt{k})^2}{2}\,ui,\ \left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^2\right],$$

mittelst welcher man die Werthe w_1 und w_2 der links stehenden Function aus den entsprechenden Werthen der rechts stehenden Function und umgekehrt ableiten kann. Die so gefundenen Werthe, welche mit den in § 1 angegebenen übereinstimmen, sind aber, wie man sich leicht überzeugt, von dem in (42.) verschieden; es muss also dieser w_3 oder w_4 sein.

Man findet für die Functionen

$$(A.)\quad sn\left[\frac{(1-\sqrt{k})^2}{2}\,ui,\ \left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^2\right] \quad \text{und} \quad sn\left[\frac{(1+\sqrt{k})^2}{1}\,ui,\ \left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2\right]$$

resp. die Formeln

$$(44.)\quad \begin{cases} w_3 = \left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right) \dfrac{\frac{1}{k} + i\frac{1-k\,sn^2(u) - cn(u)\,dn(u)}{(1-k)\,sn(u)}}{\frac{1}{k} - i\frac{1-k\,sn^2(u) + cn(u)\,dn(u)}{(1-k)\,sn(u)}}, \\ w_4 = \left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right) \dfrac{\frac{1}{k} - i\frac{1-k\,sn^2(u) + cn(u)\,dn(u)}{(1-k)\,sn(u)}}{\frac{1}{k} + i\frac{1-k\,sn^2(u) - cn(u)\,dn(u)}{(1-k)\,sn(u)}}, \end{cases}$$

$$(45.)\quad \begin{cases} w_3 = \left(\dfrac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right) \dfrac{\dfrac{1}{k} + i\dfrac{1-k\,sn^2(u)-cn(u)\,dn(u)}{(1-k)\,sn(u)}}{\dfrac{1}{k} - i\dfrac{1-k\,sn^2(u)+cn(u)\,dn(u)}{(1-k)\,sn(u)}}, \\ w_4 = \left(\dfrac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right) \dfrac{\dfrac{1}{k} - i\dfrac{1-k\,sn^2(u)+cn(u)\,dn(u)}{(1-k)\,sn(u)}}{\dfrac{1}{k} + i\dfrac{1-k\,sn^2(u)-cn(u)\,dn(u)}{(1-k)\,sn(u)}}. \end{cases}$$

Die Werthe w_1, w_2 der Functionen

$$(B.)\quad sn\left[\frac{(1-i\sqrt{k})^2}{2}\,ui,\ \left(\frac{1+i\sqrt{k}}{1-i\sqrt{k}}\right)^2\right] \quad \text{und} \quad sn\left[\frac{(1+i\sqrt{k})^2}{2}\,ui,\ \left(\frac{1-i\sqrt{k}}{1+i\sqrt{k}}\right)^2\right]$$

lassen sich auf diesem Wege nur dadurch ableiten, dass man in den entsprechenden Werthen der obigen Functionen k mit $-k$ vertauscht. Dass w_3 und w_4 auf diese Weise nicht erhalten werden können, sieht man, wenn man von der fünften Transformation *Abel*s ausgeht und das obige Verfahren anwendet. Es ergiebt sich darum die Gleichung

$$(46.)\quad \begin{cases} i\left(\dfrac{1-i\sqrt{k}}{1+i\sqrt{k}}\right) sn\left[\dfrac{(1+i\sqrt{k})^2}{2}\,ui,\ \left(\dfrac{1-i\sqrt{k}}{1+i\sqrt{k}}\right)^2\right] \\ \qquad = \dfrac{\dfrac{2i(1+k)}{(1+\sqrt{k})^2}\,sn(u) - (1-k\,sn^2(u)-cn(u)\,dn(u))}{\dfrac{2i(1+k)}{(1+\sqrt{k})^2}\,sn(u) + (1-k\,sn^2(u)+cn(u)\,dn(u))}. \end{cases}$$

die, wenn man auf beiden Seiten mit $-i\left(\dfrac{1+i\sqrt{k}}{1-i\sqrt{k}}\right)$ multiplicirt, in die folgende übergeht

$$(47.)\quad w_3 = \left(\frac{1+i\sqrt{k}}{1-i\sqrt{k}}\right) \frac{\dfrac{2}{(1+\sqrt{k})^2} + i\dfrac{1-k\,sn^2(u)-cn(u)\,dn(u)}{(1+k)\,sn(u)}}{\dfrac{2i}{(1+\sqrt{k})^2} + \dfrac{1-k\,sn^2(u)+cn(u)\,dn(u)}{(1+k)\,sn(u)}} = \left(\frac{1+i\sqrt{k}}{1-i\sqrt{k}}\right) \frac{a+iM}{ai+N}.$$

Aus dieser Formel folgt nun auch, da

$$w_3 w_4 = \left(\frac{1+i\sqrt{k}}{1-i\sqrt{k}}\right)^2$$

ist,

$$(48.)\quad w_4 = \left(\frac{1+i\sqrt{k}}{1-i\sqrt{k}}\right) \frac{\dfrac{2i}{1+\sqrt{k})^2} + \dfrac{1-k\,sn^2(u)+cn(u)\,dn(u)}{(1+k)\,sn(u)}}{\dfrac{2}{(1+\sqrt{k})^2} + i\dfrac{1-k\,sn^2(u)-cn(u)\,dn(u)}{(1+k)\,sn(u)}} = \left(\frac{1+i\sqrt{k}}{1-i\sqrt{k}}\right) \frac{ai+N}{a+iM}.$$

Die sechste Transformation *Abel*s führt endlich auf die Werthe w_3, w_4 der Function

$$sn\left[\frac{(1-i\sqrt{k})^2}{2}ui,\ \left(\frac{1+i\sqrt{k}}{1-i\sqrt{k}}\right)^2\right]$$

und man erhält

$$(49.)\qquad \begin{cases} w_3 = \left(\dfrac{1-i\sqrt{k}}{1+i\sqrt{k}}\right)\dfrac{-a+iM}{-ia+N}, \\ w_4 = \left(\dfrac{1-i\sqrt{k}}{1+i\sqrt{k}}\right)\dfrac{-ai+N}{-a+iM}. \end{cases}$$

Bemerkt man, dass die Functionen (A.) die Eigenschaft haben, dass aus den vier Werthen einer derselben die entsprechenden Werthe der anderen bloss durch Vertauschung des Wurzelzeichens erhalten werden, so erkennt man aus den Formeln (47.), (48.), (49.), dass die Functionen (B.) diese Eigenschaft nur für w_1 und w_2, nicht aber für w_3 und w_4 besitzen. Dieser Unterschied in dem Verhalten der Functionen kann in folgender Weise schärfer gekennzeichnet werden. Die erwähnte Eigenschaft der Functionen (A.) ist in der Formel (43.) begründet; nun besteht zwar auch für die Functionen (B.) die Gleichung

$$(50.)\quad sn\left[\frac{(1+i\sqrt{k})^2}{2}ui,\ \left(\frac{1-i\sqrt{k}}{1+i\sqrt{k}}\right)^2\right] = \left(\frac{1+i\sqrt{k}}{1-i\sqrt{k}}\right)^2 sn\left[\frac{(1-i\sqrt{k})^2}{2}ui,\ \left(\frac{1+i\sqrt{k}}{1-i\sqrt{k}}\right)^2\right],$$

allein wir müssen infolge der Formeln (47.)—(49.) schliessen, dass diese Gleichung nur für w_1 und w_2, nicht aber für w_3 und w_4 ihre Gültigkeit besitze.

§ 5.

Fragen wir nun, zu welcher allgemeinen Klasse von Functionen die *Hermite*schen gehören, so giebt uns ein Theorem *Jacobi*s (Fundamenta nova § 24) darüber Aufschluss. Nach diesem Theoreme ist diese Klasse von Functionen durch die besondere Beschaffenheit ihres Transformationsgrades charakterisirt. Dieses Theorem lautet mutatis mutandis folgendermassen:

Wenn die Transformationszahl n ein vollständiges Quadrat $= m^2$ ist, so hat die Modulargleichung eine Wurzel $\lambda = k$.

Ist die Transformationszahl $= m^2.v$, wo v irgend eine reelle positive Zahl ist, so hat die Modulargleichung alle Wurzeln mit der zur Zahl v gehörenden Modulargleichung gemeinschaftlich.

Die Anzahl der Substitutionen schliesst auch die Substitutionen ein, welche aus Transformationen und Multiplicationen zusammengesetzt sind (et substitutiones amplectitur ex transformatione et multiplicatione mixtas).

Dieses Theorem folgt leicht aus der Betrachtung der Differentialgleichungen

$$(51.)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \dfrac{dz}{M\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}, \\ \dfrac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} = \dfrac{m\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}. \end{cases}$$

Die Transformationsformel hat also, wenn der Transformationsgrad die Form $2^2.v$ hat, die Form

$$(52.)\qquad sn\left(\frac{u}{M},\ \lambda\right) = F(sn(2u),\ cn(2u),\ dn(2u)).$$

Es bestehen daher die Gleichungen

$$(53.)\qquad \begin{cases} \dfrac{1-cn\left(\frac{u}{M},\ \lambda\right)}{1+dn\left(\frac{u}{M},\ \lambda\right)} = [\varphi_1(sn(u),\ cn(u),\ dn(u))]^2, \\ \dfrac{1+cn\left(\frac{u}{M},\ \lambda\right)}{1-dn\left(\frac{u}{M},\ \lambda\right)} = [\varphi_2(sn(u),\ cn(u),\ dn(u))]^2, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Ueber eine Anwendung der *Riemann*schen Formel für die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze.

(Von Herrn *H. v. Mangoldt* in Aachen.)

In kürzlich erschienenen Abhandlungen haben die Herren *Hadamard**) und *Ch.-J. de la Vallée-Poussin***) unabhängig von einander zum ersten Male einwandfreie Beweise für zwei wichtige Sätze erbracht, die von anderen Autoren zwar schon mehrfach ausgesprochen, aber bisher noch nie bewiesen waren.

Der erste dieser Sätze besagt, dass die von *Riemann****) mit $\zeta(s)$ bezeichnete Function keine Nullstelle hat, deren reeller Theil gleich 1 wäre, und der zweite, dass der Quotient, welchen man erhält, wenn man die Summe der natürlichen Logarithmen aller unter einer gewissen Grenze x liegenden Primzahlen durch x selbst dividirt, bei unbegrenzt wachsendem x dem Grenzwerth 1 zustrebt.

Diese Ergebnisse gestatten, aus der bekannten *Riemann*schen Formel für die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze noch ein zweites ebenfalls schon lange vermuthetes asymptotisches Gesetz der Zahlentheorie abzuleiten, welches durch folgenden Satz seinen Ausdruck findet:

Die Anzahl aller Primzahlen unter einer gegebenen Grenze x wird für grosse Werthe von x durch den Ausdruck

$$Li(x) = \lim_{\varepsilon=+0} \left\{ \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dy}{ly} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{dy}{ly} \right\}$$

*) 1. Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de *Riemann*, Comptes rendus, 122, 1896, p. 1470—1473.

2. Sur la distribution de zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques, Bulletin de la société mathématique de France, Tome 24, 1896.

**) Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers, première partie, Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. XX, 2e partie, 1896.

***) Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, Monatsber. der Berl. Ak. Nov. 1859; Ges. math. Werke, 1. Aufl. 1876, S. 136—144; 2. Aufl. 1892, S. 145—153.

näherungsweise dargestellt, „und zwar soweit genau, dass der Bruch, welchen man erhält, wenn man den Fehler durch die darzustellende Anzahl selbst dividirt, bei unbegrenzt wachsendem x zuletzt unendlich klein wird.“

Die Vermuthung, dass die Anzahl aller Primzahlen unter einer gegebenen Grenze x nahe durch die Function $Li(x)$ ausgedrückt werde, ist schon im Jahre 1838 von *Dirichlet**) und 1849 von *Gauss* ausgesprochen worden**). Sodann hat *Tchebychev* Grenzen angegeben, zwischen denen jene Anzahl sicher enthalten bleibt***). Aber das Intervall zwischen diesen Grenzen hatte sich bisher nicht weiter verkleinern lassen, als bis auf etwa ein Zehntel der unteren Grenze selbst†), so dass man von der Function $Li(x)$, welche — jedenfalls sobald x eine gewisse Constante überschritten hat — zwischen jenen Grenzen enthalten bleibt, zwar behaupten konnte, dass sie die Anzahl der Primzahlen näherungsweise darstelle, aber Fehler bis zu rund 10 pCt. noch nicht auszuschliessen vermochte. Auch *Riemanns* Arbeit hatte hieran, wegen der Schwierigkeiten, die noch zu überwinden blieben, bisher nichts geändert. Im Gegensatz hierzu besagt nun der obige Satz, dass die Genauigkeit, mit welcher die Function $Li(x)$ die Anzahl der dem Intervall $(2...x)$ angehörenden Primzahlen darstellt, thatsächlich grösser ist, als man bisher nachweisen konnte, indem der Fehler, in Procenten jener Anzahl ausgedrückt, bei unbegrenzt wachsendem x zuletzt unendlich klein wird.

Beim Beweise dieser Behauptung bediene ich mich der gleichen Bezeichnungen wie in einer früheren Arbeit††) und weise auf die aus dieser zu entnehmenden Sätze und Formeln durch Angabe der betreffenden Seitenzahlen oder Nummern hin.

Wie ich auf Seite 294 hervorgehoben habe, lassen sich *alle* in meiner früheren Arbeit vorkommenden ungleichmässig convergenten unend-

---

*) Vgl. *G. Lejeune Dirichlet*'s Werke, herausgegeben von *L. Kronecker*, Bd. 1 zweite Fussnote zu S. 372.

**) Brief an *Enke*, Werke Bd. II, S. 444—447.

***) Mémoire sur les nombres premiers, Journal de math. T. 17, 1852, p. 389.

†) Auch die von *Sylvester* in seiner Abhandlung „On *Tchebycheff*'s theorem of the totality of the prime numbers comprised within given limits“, American Journal of mathematics, Vol. IV, 1881, S. 230—247, angestellten Betrachtungen haben nicht wesentlich weiter geführt.

††) Zu *Riemanns* Abhandlung „Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse“, dieses Journal, Bd. 114, 1895, Seite 255—305.

lichen Reihen aus einer *einzigen* derartigen Reihe, nämlich

$$\sum_{\nu=1}^{x} \frac{\sin(\alpha_\nu lx)}{\alpha_\nu}$$

durch Multiplication mit stetigen Functionen von x und Addition gleichmässig convergenter Reihen ableiten. Für den absoluten Werth dieser besonderen Reihe kann man aber mit Hülfe der von den Herren *Hadamard* und *de la Vallée Poussin* erhaltenen Ergebnisse eine obere Grenze gewinnen. Giebt man nämlich der Gleichung (58.) S. 294 die Form

$$A(x,\ 0) = x - l(2\pi) - \tfrac{1}{2} l\Big(1 - \frac{1}{x^2}\Big) - x^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{\nu=1}^{x} \frac{2\alpha_\nu \cos(\alpha_\nu lx) - \sin(\alpha_\nu lx)}{2\alpha_\nu(\frac{1}{4} + \alpha_\nu^2)}$$
$$- 2x^{\frac{1}{2}} \sum_{\nu=1}^{x} \frac{\sin(\alpha_\nu lx)}{\alpha_\nu},$$

so erhält man durch Division mit $2x$ und Umstellung der Glieder

$$x^{-\frac{1}{2}} \sum_{\nu=1}^{x} \frac{\sin(\alpha_\nu lx)}{\alpha_\nu} = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{A(x,\ 0)}{x}\Big) - \frac{l(2\pi)}{2x} - \frac{1}{4x} l\Big(1 - \frac{1}{x^2}\Big)$$
$$- \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \sum_{\nu=1}^{x} \frac{2\alpha_\nu \cos(\alpha_\nu lx) - \sin(\alpha_\nu lx)}{2\alpha_\nu(\frac{1}{4} + \alpha_\nu^2)}$$

und hieraus durch ähnliche Betrachtungen, wie sie Herr *de la Vallée Poussin* auf Seite 61 seiner oben erwähnten Arbeit durchgeführt hat,

$$\text{(A.)} \qquad \lim_{x=\infty} \Big\{ x^{-\frac{1}{2}} \sum_{\nu=1}^{x} \frac{\sin(\alpha_\nu lx)}{\alpha_\nu} \Big\} = 0.$$

Nachdem dies festgestellt, gelangt man zum Beweise des ausgesprochenen Satzes einfach dadurch, dass man die rechte Seite der mit *Riemanns* Endergebniss übereinstimmenden Gleichung (64.) in ihren gleichmässig und ihren ungleichmässig convergenten Bestandtheil zerspaltet und bei der Abschätzung des letzteren von der Formel (A.) Gebrauch macht. Im Einzelnen verläuft diese Rechnung folgendermassen: Aus (64.) folgt durch leichte Umformungen

$$f(x,\ 0) = Li(x) + \int_x^\infty \frac{1}{y^2 - 1} \frac{dy}{y\, ly} - l2 + 2 \sum_{\nu=1}^{x} \cos(\alpha_\nu lx) \int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\varrho\, x^{-\varrho}}{\varrho^2 + \alpha_\nu^2}\, d\varrho$$
$$- 2 \sum_{\nu=1}^{x} \frac{\sin(\alpha_\nu lx)}{\alpha_\nu} \int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} \Big(x^{-\varrho} - \frac{\varrho^2 x^{-\varrho}}{\varrho^2 + \alpha_\nu^2} \Big)\, d\varrho,$$

oder

$$f(x,\ 0) = Li(x) + \int_x^\infty \frac{1}{y^2 - 1} \frac{dy}{y\, ly} - l2 + 2 \sum_{\nu=1}^{x} \Big\{ \cos(\alpha_\nu lx) \int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\varrho\, x^{-\varrho}}{\varrho^2 + \alpha_\nu^2}\, d\varrho$$
$$+ \frac{\sin(\alpha_\nu lx)}{\alpha_\nu} \int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\varrho^2 x^{-\varrho}}{\varrho^2 + \alpha_\nu^2}\, d\varrho \Big\} - 2 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{lx} \sum_{\nu=1}^{x} \frac{\sin(\alpha_\nu lx)}{\alpha_\nu}$$

und hieraus, da

$$\frac{\varrho}{\varrho^2+\alpha_\nu^2} = \frac{\varrho}{\alpha_\nu^2} - \frac{\varrho^3}{\alpha_\nu^2(\varrho^2+\alpha_\nu^2)},$$
$$\frac{\varrho^2}{\varrho^2+\alpha_\nu^2} = \frac{\varrho^2}{\alpha_\nu^2} - \frac{\varrho^4}{\alpha_\nu^2(\varrho^2+\alpha_\nu^2)}$$

und

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} \varrho\, x^{-\varrho} d\varrho = -\frac{1}{2}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{lx} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(lx)^2},$$
$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} \varrho^2 x^{-\varrho} d\varrho = \frac{1}{4}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{lx} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(lx)^2} + \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{(lx)^3}$$

ist,

(B.)
$$\begin{cases} f(x,\ 0) = Li(x) + \int_x^{\infty} \frac{1}{y^2-1}\frac{dy}{y\,ly} - l2 \\ \quad - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{lx}\left\{\left(1-\frac{2}{lx}\right)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos(\alpha_\nu lx)}{\alpha_\nu^2} - \left(\frac{1}{2}-\frac{2}{lx}+\frac{4}{(lx)^2}\right)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin(\alpha_\nu lx)}{\alpha_\nu^3}\right. \\ \qquad\qquad \left. +2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin(\alpha_\nu lx)}{\alpha_\nu}\right\} \\ \quad -2\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\frac{\cos(\alpha_\nu lx)}{\alpha_\nu^2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\infty}\frac{\varrho^3 x^{-\varrho}}{\varrho^2+\alpha_\nu^2}d\varrho + \frac{\sin(\alpha_\nu lx)}{\alpha_\nu^3}\int_{-\frac{1}{2}}^{\infty}\frac{\varrho^4 x^{-\varrho}}{\varrho^2+\alpha_\nu^2}d\varrho\right\}. \end{cases}$$

Nun ist aber, wenn $F(x)$ die gleiche Bedeutung hat, wie in *Riemanns* Abhandlung, d. h. im allgemeinen der Anzahl aller nicht ausserhalb des Intervalls $(2\ldots x)$ liegenden Primzahlen gleichkommt, falls aber x selbst eine Primzahl ist, um $\frac{1}{2}$ kleiner ist, zunächst

$$f(x,\ 0) = F(x) + \tfrac{1}{2}F(x^{\frac{1}{2}}) + \tfrac{1}{3}F(x^{\frac{1}{3}}) + \cdots,$$

folglich

$$f(x^{\frac{1}{2}},\ 0) = F(x^{\frac{1}{2}}) + \tfrac{1}{2}F(x^{\frac{1}{4}}) + \tfrac{1}{3}F(x^{\frac{1}{6}}) + \cdots,$$

also

$$f(x,\ 0) - f(x^{\frac{1}{2}},\ 0) = F(x) - \tfrac{1}{2}F(x^{\frac{1}{2}}) + \tfrac{1}{3}F(x^{\frac{1}{3}}) - \tfrac{1}{4}F(x^{\frac{1}{4}}) + \cdots,$$

folglich

$$f(x,\ 0) - f(x^{\frac{1}{2}},\ 0) < F(x),$$

oder

$$f(x,\ 0) - F(x) < f(x^{\frac{1}{2}},\ 0) < x^{\frac{1}{2}},$$

oder

$$f(x,\ 0) = F(x) + \vartheta x^{\frac{1}{2}},$$

wo

$$0 < \vartheta < 1$$

ist.

Ferner ergiebt sich, wenn man bedenkt, dass die erste Coordinate von α_ν grösser als 12, die zweite dagegen, falls sie überhaupt von Null verschieden, $< \frac{1}{2}$ ist,

$$\left| \frac{\varrho^2}{\varrho^2+\alpha_\nu^2} \right| < 1,$$

also

$$\left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\varrho^3 x^{-\varrho}}{\varrho^2+\alpha_\nu^2} d\varrho \right| < \int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} |\varrho| x^{-\varrho} d\varrho = -\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \varrho x^{-\varrho} d\varrho + \int_{0}^{\infty} \varrho x^{-\varrho} d\varrho,$$

oder

$$\left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\varrho^3 x^{-\varrho}}{\varrho^2+\alpha_\nu^2} d\varrho \right| < \frac{2}{(lx)^2} + \frac{1}{2} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{lx} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(lx)^2} < \frac{1}{2} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{lx},$$

sobald $x > 4$ ist, und

$$\left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\varrho^4 x^{-\varrho}}{\varrho^2+\alpha_\nu^2} d\varrho \right| < \int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} \varrho^2 x^{-\varrho} d\varrho < \frac{1}{4} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{lx},$$

sobald $lx > 2$, d. h. $x > e^2$ ist.

Endlich ist, ebenfalls unter der Voraussetzung, dass $x > e^2$ sei,

$$\int_x^{\infty} \frac{1}{y^2-1} \frac{dy}{y\,ly} < \frac{1}{2} \int_x^{\infty} \frac{dy}{(y-1)y(y+1)} < \frac{1}{2} \int_x^{\infty} \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{2x}.$$

Man erhält daher aus Gleichung (B.), wenn man $x > e^2$ nimmt und durch ϑ, ϑ', ϑ_1, ϑ_2, θ_1, θ_2, ..., θ_1', θ_2', ... solche reelle oder imaginäre Zahlen bezeichnet, von denen nichts weiter bekannt zu sein braucht, als dass ihre absoluten Werthe kleiner als 1 sind,

$$\text{(C.)} \quad \begin{cases} F(x)-Li(x) = -\vartheta x^{\frac{1}{2}} + \dfrac{\vartheta'}{2x} - l2 \\ \qquad -\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{lx} \left\{ \vartheta_1 \sum_{\nu=1}^{x} \dfrac{\cos(\alpha_\nu lx)}{\alpha_\nu^2} - \vartheta_2 \sum_{\nu=1}^{x} \dfrac{\sin(\alpha_\nu lx)}{\alpha_\nu^3} + 2 \sum_{\nu=1}^{x} \dfrac{\sin(\alpha_\nu lx)}{\alpha_\nu} \right\} \\ \qquad -\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{lx} \sum_{\nu=1}^{x} \left\{ \dfrac{\theta_\nu \cos(\alpha_\nu lx)}{\alpha_\nu^2} + \dfrac{\theta_\nu' \sin(\alpha_\nu lx)}{2\alpha_\nu^3} \right\}. \end{cases}$$

Nun ist aber, wie aus den von *Tchebychev* gewonnenen Ergebnissen leicht abgeleitet werden kann, für jedes oberhalb einer gewissen Grenze liegende x

$$F(x) > \frac{1}{2} \frac{x}{lx},$$

folglich

$$\left| \frac{F(x)-Li(x)}{F(x)} \right| < \frac{2lx}{x} |F(x)-Li(x)|$$

und unter Berücksichtigung der Gleichung (C.):

$$\left|\frac{F(x)-Li(x)}{F(x)}\right| < \frac{2lx}{x^{\frac{1}{2}}}+\frac{lx}{x^2}+\frac{2l2\,lx}{x}+4\left|x^{-\frac{1}{2}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin(\alpha_\nu lx)}{\alpha_\nu}\right|$$

$$+4\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{x^{-\frac{1}{2}}\cos(\alpha_\nu lx)}{\alpha_\nu^2}\right|+3\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{x^{-\frac{1}{2}}\sin(\alpha_\nu lx)}{\alpha_\nu^3}\right|,$$

woraus unter Benutzung der Gleichung (A.) und der Ergebnisse der Herren *Hadamard* und *de la Vallée Poussin* sofort

$$\lim_{x=\infty}\frac{F(x)-Li(x)}{F(x)} = 0$$

folgt, was zu beweisen war*).

---

*) Auf anderem Wege ist Herr de la Vallée Poussin schon früher zu dem gleichen Ergebniss gelangt. Nachdem ich ihm die vorstehenden Entwickelungen brieflich mitgetheilt hatte, schrieb er mir:

„... Il y a déjà longtemps que j'ai remarqué que l'on peut écrire, en désignant par ε une quantité qui tend vers zéro pour x infini,

$$(1.)\qquad F(x) = (1+\varepsilon)\frac{x}{lx},$$

car ce théorème est une conséquence immédiate de la relation

$$(2.)\qquad \sum_{p<x} lp = (1+\varepsilon)x.$$

On conclut de (2.) que l'on peut aussi écrire

$$(3.)\qquad \Sigma lp = (1+\varepsilon)x,$$

la somme s'étendant aux valeurs de p:

$$\frac{x}{lx} < p < x,$$

qui sont en nombre $F(x)-F\left(\frac{x}{lx}\right)$. Or, pour ces valeurs de p, on a

$$lp = lx-\theta\, llx, \qquad (0<\theta<1)$$

et l'équation (3.) peut se mettre sous la forme

$$(lx-\theta\, llx)\cdot\left[F(x)-F\left(\frac{x}{lx}\right)\right] = (1+\varepsilon)x,$$

$$(4.)\qquad F(x)-F\left(\frac{x}{lx}\right) = (1+\varepsilon)\frac{x}{lx-\theta\, llx}.$$

Cette formule (4.) revient à la formule (1.).“

Dies Ergebniss stimmt aber mit dem des Textes überein. Denn für grosse Werthe von x sind die Werthe der Ausdrücke $\frac{x}{lx}$ und $Li(x)$ nur um Grössen niedrigerer

Durch ähnliche Ueberlegungen wie im Vorangehenden lassen sich auch bei mehreren der von Herrn *Mertens* angegebenen asymptotischen Gesetze*) die Fehler enger begrenzen, als es bisher möglich war. Beispielsweise ist nach Herrn *Mertens***), wenn q alle Primzahlen von 2 bis zu einer gewissen Grenze G durchläuft,

$$\sum_{2}^{G} \frac{1}{q} = ll G + E - H + \delta,$$

wo E und H Constante bedeuten und

$$|\delta| < \frac{4}{l(G+1)} + \frac{2}{G\,lG}$$

ist, während unter Heranziehung der neu gewonnenen Hülfsmittel gezeigt werden kann, dass

$$\lim_{G=\infty} |\delta\, l(G+1)| = 0,$$

also nach willkürlicher Annahme einer beliebig kleinen positiven Constanten ε für alle G oberhalb einer gewissen Grenze

$$|\delta| < \frac{\varepsilon}{l(G+1)}$$

sein muss.

Ordnung von einander verschieden, wie man mit Hülfe der Zerlegung

$$Li(x) = Li\left[\frac{x}{(lx)^2}\right] + \int_{\frac{x}{(lx)^2}}^{x} \frac{dy}{ly}$$

leicht nachweisen kann.

Während der Beweis des Herrn *de la Vallée Poussin* sich durch grössere Kürze auszeichnet, dürften die Betrachtungen des Textes bei etwaigen Versuchen zur Bestimmung der Ordnung, von welcher der Quotient $\frac{F(x)-Li(x)}{F(x)}$ unendlich klein wird, vielleicht den Vorzug verdienen.

*) Ueber einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie, dieses Journal Bd. 77, S. 289—338; Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie, ebenda Bd. 78, S. 46—62.

**) a. a. O. Bd. 78, S. 52, Formel (13.).

Ueber die neun Schnittpunkte zweier ebenen Curven dritter Ordnung.

(Von Herrn *F. Schottky* in Marburg.)

Es giebt einige Gruppen von Punkten, deren Betrachtung für die Geometrie der Ebene oder des Raumes, aber auch für das Verständniss der zwischen den Thetafunctionen bestehenden Relationen von Wichtigkeit ist. Eine solche Gruppe bilden die Durchschnittspunkte zweier ebenen Curven dritter Ordnung, eine andere die acht Schnittpunkte zweier Flächen zweiten Grades. Von nicht geringerem Interesse sind vielleicht die Lagenbeziehungen zwischen den zehn Doppelpunkten, die eine ebene Curve sechsten Grades haben kann, sowie die zwischen den zehn Knotenpunkten einer Fläche vierten Grades. Eine Fläche vierten Grades kann zwar sechzehn Doppelpunkte besitzen; aber doch nur zehn, wenn sieben davon eine von einander unabhängige Lage haben. — Analytisch erscheint mir in allen vier Fällen als wesentlich die Aufstellung der multiplicativen Beziehungen, die zwischen bestimmten, aus den Coordinaten der einzelnen Punkte gebildeten Determinanten-Ausdrücken bestehen.

Für das erstgenannte Problem, auf das ich mich hier beschränke, kommen drei solche Determinanten in Betracht: nämlich die lineare $f_{\alpha\beta\gamma}$, deren Verschwinden ausdrückt, dass die drei Punkte α, β, γ in gerader Linie liegen; ferner die quadratische $g_{\alpha\beta\gamma}$, welche Null wird, wenn die sechs von α, β, γ verschiedenen Punkte auf einem Kegelschnitt liegen; endlich die kubische $h_{\alpha\beta}$, welche, gleich 0 gesetzt, die Bedingung darstellt, dass eine Curve dritten Grades existirt, die durch alle acht von β verschiedenen Punkte hindurchgeht, in α aber einen Doppelpunkt besitzt.

§ 1.

Es seien

$$H'(x, y, z) = 0, \quad H''(x, y, z) = 0$$

die Gleichungen zweier ebenen Curven dritten Grades, die sich in neun

Punkten schneiden. Die Coordinaten dieser neun Punkte seien:

$$(a_1, b_1, c_1), \quad (a_2, b_2, c_2), \quad \ldots, \quad (a_9, b_9, c_9).$$

Denken wir uns eine Function dritten Grades mit unbestimmten Coefficienten: $H(x, y, z)$. Wenn wir die neun Bedingungen stellen:

$$H(a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha) = 0, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, 9)$$

so sind dies neun lineare homogene Gleichungen zwischen den Coefficienten von H. Sollen diesen zwei verschiedene Functionen H' und H'' genügen, so muss eine der neun Gleichungen eine Folge der übrigen sein. Mit anderen Worten, es muss eine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten bestehen

$$(1.) \qquad \sum_{\alpha=1}^{9} l_\alpha H(a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha) = 0,$$

der jede kubische Function $H(x, y, z)$ genügt, wie auch ihre Coefficienten gewählt sein mögen.

Wir führen ein:

$$(2.) \qquad \begin{vmatrix} a_\alpha & b_\alpha & c_\alpha \\ a_\beta & b_\beta & c_\beta \\ a_\gamma & b_\gamma & c_\gamma \end{vmatrix} = f_{\alpha\beta\gamma},$$

wo α, β, γ irgend drei der Zahlen 1, 2, ..., 9 sind. — Ferner stellen wir die Determinante auf:

$$\begin{vmatrix} f_{\varkappa\mu\nu} f_{\varkappa\varrho\sigma} & f_{\varkappa\varrho\nu} f_{\varkappa\mu\sigma} \\ f_{\lambda\mu\nu} f_{\lambda\varrho\sigma} & f_{\lambda\varrho\nu} f_{\lambda\mu\sigma} \end{vmatrix},$$

wo $\varkappa, \lambda, \mu, \nu, \varrho, \sigma$ die sechs von α, β, γ verschiedenen Zahlen der Reihe 1, 2, ..., 9 bedeuten. Es ist dies diejenige ganze Function der Coordinaten, welche verschwindet, wenn die entsprechenden sechs Punkte auf einem Kegelschnitte liegen. An sich ist sie alternirend in Bezug auf die sechs Indices $\varkappa, \lambda, \ldots, \sigma$. Wir behaften sie aber mit dem Vorzeichen ε der Permutation $\alpha\beta\gamma\varkappa\lambda\mu\nu\varrho\sigma$, welches $+1$ ist oder -1, je nachdem diese Reihe aus der Reihe 1, 2, ..., 9 durch eine gerade oder ungerade Anzahl von Vertauschungen hervorgeht. Wir können sie dann mit $g_{\alpha\beta\gamma}$ bezeichnen:

$$(3.) \qquad \begin{vmatrix} f_{\varkappa\mu\nu} f_{\varkappa\varrho\sigma} & f_{\varkappa\varrho\nu} f_{\varkappa\mu\sigma} \\ f_{\lambda\mu\nu} f_{\lambda\varrho\sigma} & f_{\lambda\varrho\nu} f_{\lambda\mu\sigma} \end{vmatrix} = \varepsilon g_{\alpha\beta\gamma},$$

wo sich $g_{\alpha\beta\gamma}$ ebenso wie $f_{\alpha\beta\gamma}$ verhält.

Nennen wir $F(x, y, z)$ diejenige lineare Function von (x, y, z), die aus $f_{\alpha\beta\gamma}$ entspringt, indem man a_α, b_α, c_α durch die Veränderlichen x, y, z ersetzt, und ebenso $G(x, y, z)$ diejenige quadratische, die aus der Determinante $\varepsilon g_{\alpha\beta\gamma}$ hervorgeht, wenn $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, $c_\varkappa$ durch x, y, z ersetzt werden, so ist $F.G = H$ eine kubische Function von x, y, z, und es sind α, $\varkappa$ die beiden einzigen der neun Punkte, in denen H nicht verschwindet. Die Gleichung (1.) reducirt sich daher auf

$$l_\alpha F(a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha)G(a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha)+l_\varkappa F(a_\varkappa, b_\varkappa, c_\varkappa)G(a_\varkappa, b_\varkappa, c_\varkappa) = 0,$$

oder:

$$l_\alpha f_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon' g_{\varkappa\beta\gamma}+l_\varkappa f_{\varkappa\beta\gamma}\varepsilon g_{\alpha\beta\gamma} = 0,$$

wo ε das Vorzeichen der Permutation $\alpha\beta\gamma\varkappa\lambda\mu\nu\varrho\sigma$ bedeutet, ε' dagegen das von $\varkappa\beta\gamma\alpha\lambda\mu\nu\varrho\sigma$. Da nun die eine aus der anderen entspringt durch Vertauschung zweier Elemente, so ist $\varepsilon' = -\varepsilon$ und demnach:

$$\frac{g_{\alpha\beta\gamma}}{l_\alpha l_\beta l_\gamma f_{\alpha\beta\gamma}} = \frac{g_{\varkappa\beta\gamma}}{l_\varkappa l_\beta l_\gamma f_{\varkappa\beta\gamma}}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass der Ausdruck auf der linken Seite vollständig unabhängig ist von der Vertauschung der Indices. Wir bezeichnen den gemeinsamen Werth aller dieser Quotienten mit φ und erhalten so:

(4.) $$g_{\alpha\beta\gamma} = \varphi l_\alpha l_\beta l_\gamma f_{\alpha\beta\gamma}.$$

§ 2.

Vermöge der letzten Formel transformiren wir die Gleichung (3.) im vorigen Paragraphen. Wir drücken in der oberen Reihe der Determinante jedes f durch das entsprechende g aus, und umgekehrt das g auf der rechten Seite durch das entsprechende f. Auf diese Weise entsteht:

$$\begin{vmatrix} g_{\varkappa\mu\nu}g_{\varkappa\varrho\sigma} & g_{\varkappa\varrho\nu}g_{\varkappa\mu\sigma} \\ f_{\lambda\mu\nu}f_{\lambda\varrho\sigma} & f_{\lambda\varrho\nu}f_{\lambda\mu\sigma} \end{vmatrix} = \varphi^3 \frac{l_\varkappa}{l_\lambda} p\varepsilon f_{\alpha\beta\gamma},$$

wo p das Product aller Factoren $l_1, l_2, \ldots, l_9$ bedeutet. — Wir setzen jetzt:

(5.) $$\varphi^3 \frac{l_\varkappa}{l_\lambda} p = h_{\lambda,\varkappa}.$$

Als Function der Coordinaten ist alsdann $h_{\lambda,\varkappa}$ gegeben durch folgende Gleichung:

(6.) $$\begin{vmatrix} g_{\varkappa\mu\nu}g_{\varkappa\varrho\sigma} & g_{\varkappa\varrho\nu}g_{\varkappa\mu\sigma} \\ f_{\lambda\mu\nu}f_{\lambda\varrho\sigma} & f_{\lambda\varrho\nu}f_{\lambda\mu\sigma} \end{vmatrix} = \varepsilon f_{\alpha\beta\gamma}h_{\lambda,\varkappa}.$$

In diesem Ausdrucke von $h_{\lambda,\varkappa}$ kommen alle Punkte vor, mit Ausnahme des Punktes $\varkappa$, und da die übrigen Punkte als unabhängig von einander angesehen werden können, so dürfen wir zunächst schliessen, dass die Determinante auf der linken Seite durch $f_{\alpha\beta\gamma}$ theilbar ist. $h_{\lambda,\varkappa}$ ist dann in Bezug auf den Punkt λ von der sechsten, in Bezug auf die von $\varkappa$, λ verschiedenen Punkte von der dritten Ordnung. Greifen wir irgend einen dieser sieben Punkte heraus, etwa μ; so wird $h_{\lambda,\varkappa} = 0$ von der zweiten Ordnung, wenn man μ mit λ, von der ersten aber, wenn man μ mit ν, ϱ, σ oder α, β, γ zusammenfallen lässt. Demnach ist $h_{\lambda,\varkappa}$ der unzerlegbare Ausdruck, welcher verschwindet, wenn eine Curve dritten Grades existirt, die den Punkt λ zum Doppelpunkt hat und die ausserdem durch alle von $\varkappa$, λ verschiedenen Punkte der Reihe 1, 2, ..., 9 hindurchgeht.

Die anfangs erwähnten multiplicativen Beziehungen zwischen den Grössen f, g, h sind enthalten in den Formeln:

$$(7.)\qquad \begin{cases} g_{\alpha\beta\gamma} = \varphi l_\alpha l_\beta l_\gamma f_{\alpha\beta\gamma}, \\ \varphi^3 \dfrac{l_\beta}{l_\alpha} p = h_{\alpha,\beta}, \\ p = l_1 l_2 \ldots l_9, \end{cases}$$

aus denen sich die l leicht eliminiren lassen. Wir wollen sie benutzen, um die Coordinaten eines der neun Punkte, etwa $\varkappa$, durch die der acht übrigen auszudrücken.

Der Ausdruck von $h_{\alpha,\varkappa}$ enthält den Punkt $\varkappa$ nicht. Dasselbe gilt von dem Product

$$(8.)\qquad \omega_\varkappa = \prod_\alpha (h_{\alpha,\varkappa})$$

erstreckt über alle von $\varkappa$ verschiedenen Indices α. Aus (7.) folgt aber:

$$\omega_\varkappa = \varphi^{24} l_\varkappa^9 p^7.$$

Folglich kann man setzen:

$$\sqrt[3]{\omega_\varkappa} = \varphi^8 l_\varkappa^3 p^2 \sqrt[3]{p}.$$

Ferner ist:

$$g_{\alpha\beta\varkappa} = \varphi l_\alpha l_\beta l_\varkappa f_{\alpha\beta\varkappa},$$

$$h_{\alpha,\varkappa} = \varphi^3 \frac{l_\varkappa}{l_\alpha} p,$$

$$h_{\beta,\varkappa} = \varphi^3 \frac{l_\varkappa}{l_\beta} p,$$

daher:

$$(9.) \qquad \frac{g_{\alpha\beta\varkappa} h_{\alpha,\varkappa} h_{\beta,\varkappa}}{\sqrt[3]{\omega_\varkappa}} = \frac{f_{\alpha\beta\varkappa}}{\varphi \sqrt[3]{p}}.$$

Hier kommt auf der linken Seite der Punkt $\varkappa$ gar nicht vor, denn auch $g_{\alpha\beta\varkappa}$ enthält nur die von α, β, $\varkappa$ verschiedenen Punkte. Rechts dagegen steht eine lineare Function von $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, $c_\varkappa$. Da es nur darauf ankommt, die Verhältnisse von $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, $c_\varkappa$ zu bestimmen, so kann man den Factor

$$\frac{\sqrt[3]{\omega_\varkappa}}{\varphi \sqrt[3]{p}}$$

mit den Coordinaten des Punktes $\varkappa$ verbinden, oder, was dasselbe ist, man kann ihn gleich 1 setzen. So entsteht:

$$(10.) \qquad \begin{vmatrix} a_\varkappa & b_\varkappa & c_\varkappa \\ a_\alpha & b_\alpha & c_\alpha \\ a_\beta & b_\beta & c_\beta \end{vmatrix} = g_{\alpha\beta\varkappa} h_{\alpha,\varkappa} h_{\beta,\varkappa}.$$

Hiernach ist es leicht, $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, $c_\varkappa$ darzustellen als Functionen der Coordinaten der übrigen Punkte; und zwar sind es in Bezug auf irgend ein Werthsystem a_μ, b_μ, c_μ ganze Functionen achten Grades, die in den sieben übrigen Punkten von der dritten Ordnung verschwinden.

Eine andere Darstellung von $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, $c_\varkappa$ ergiebt sich noch einfacher. Für eine beliebige kubische Function $H(x, y\ z)$ ist:

$$H(a_\varkappa,\ b_\varkappa,\ c_\varkappa) = -\sum_{\alpha \leqq \varkappa} \left(\frac{l_\alpha}{l_\varkappa} H(a_\alpha,\ b_\alpha,\ c_\alpha) \right).$$

Wenn wir, wie vorhin

$$\frac{\sqrt[3]{\omega_\varkappa}}{\varphi \sqrt[3]{p}} = 1$$

annehmen, so ist nach (5.):

$$\frac{l_\alpha}{l_\varkappa} = \frac{\omega_\varkappa}{h_{\alpha,\varkappa}}.$$

Man hat daher das Gleichungssystem:

$$(11.) \qquad \begin{cases} a_\varkappa^3 & = -\omega_\varkappa \sum_\alpha \left(\frac{a_\alpha^3}{h_{\alpha,\varkappa}} \right), \\ a_\varkappa^2 b_\varkappa & = -\omega_\varkappa \sum \left(\frac{a_\alpha^2 b_\alpha}{h_{\alpha,\varkappa}} \right), \quad \text{etc.}, \end{cases}$$

durch welches ebenfalls die Verhältnisse von $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, $c_\varkappa$ rational bestimmt werden.

§ 3.

Mit der hier behandelten Aufgabe hängt eine andere nahe zusammen: Wenn in einer Ebene sieben Punkte und eine gerade Linie gegeben sind, diejenigen beiden Punkte der Geraden zu bestimmen, welche die sieben gegebenen zu einem vollen Schnittpunktsystem zweier Curven dritter Ordnung ergänzen. — Man könnte die Lösung auf das Gleichungssystem (7.) basiren. Statt dessen schlagen wir folgenden Weg ein.

Wir denken uns drei kubische Functionen X, Y, Z der unabhängigen Veränderlichen x, y, z gebildet, die in den sieben Punkten verschwinden und die Gleichung

$$(12.) \qquad Xx+Yy+Zz = 0$$

identisch befriedigen. Dass drei solche Functionen existiren, ist bekannt und leicht zu sehen. Nimmt man von X, Y, Z zunächst nur an, dass sie in den Punkten 1 bis 7 verschwinden, so muss jedenfalls zwischen x, y, z und X, Y, Z eine bilineare Gleichung bestehen; denn eine bilineare Form enthält neun Coefficienten, während nur acht linear unabhängige Functionen vierten Grades existiren, die in sieben gegebenen Punkten verschwinden. Diese identische Gleichung kann, indem man X, Y, Z specialisirt, in die obige Form (12.) gebracht werden.

Die drei Functionen X, Y, Z, die rational in x, y, z und den Coordinaten der sieben Punkte sind, haben eine einfache geometrische Bedeutung. Zu jedem Punkte (x, y, z) gehört ein bestimmter conjugirter Punkt $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, der die Reihe

$$(a_1, b_1, c_1), \quad (a_2, b_2, c_2), \quad \ldots, \quad (a_7, b_7, c_7), \quad (x, y, z)$$

zu einem vollen Schnittpunktsystem ergänzt. Wenn man alsdann eine Function dritten Grades von (ξ, η, ζ) bildet, die in den acht Punkten verschwindet, so muss sie auch in dem neunten gleich Null sein. Eine solche Function ist aber, der angenommenen Identität (12.) zufolge:

$$xX(\xi, \eta, \zeta)+yY(\xi, \eta, \zeta)+zZ(\xi, \eta, \zeta);$$

daher muss diese Function auch im Punkte $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ verschwinden, und ebenso muss

$$\bar{x}X+\bar{y}Y+\bar{z}Z = 0$$

sein. Demnach sind X, Y, Z die Coefficienten derjenigen geraden Linie, die den Punkt x, y, z mit seinem conjugirten verbindet.

Diese Linie existirt auch, wenn der Punkt x, y, z mit seinem conjugirten zusammenfällt; sie ist dann zu definiren als Verbindungslinie zweier dem Punkte x, y, z unendlich naher conjugirter Punkte. Soll ein solches Zusammentreffen eintreten, so müssen die Determinanten f_{189}, f_{289} etc. sämmtlich verschwinden. Dies findet statt, der Gleichung (9.) in § 2 zufolge, wenn der achte Punkt (x, y, z) der Bedingung $h_{8,9} = 0$ genügt, d. h., wenn eine Curve dritten Grades existirt, die durch 1, 2, ..., 7 hindurchgeht und in (x, y, z) einen Doppelpunkt hat. Es ist auch leicht zu sehen, dass diese Function sechsten Grades $h_{8,9}$ von (x, y, z) mit der Functionaldeterminante von X, Y, Z identisch ist.

Die gerade Linie der Aufgabe sei gegeben als Verbindungslinie zweier willkürlich in der Ebene angenommenen Punkte (x, y, z) und (x', y', z'). Wir bilden dann die beiden kubischen Functionen von (ξ, η, ζ):

$$(13.)\quad \begin{cases} xX(\xi, \eta, \zeta) + yY(\xi, \eta, \zeta) + zZ(\xi, \eta, \zeta) = H, \\ x'X(\xi, \eta, \zeta) + y'Y(\xi, \eta, \zeta) + z'Z(\xi, \eta, \zeta) = H'. \end{cases}$$

Beschränken wir den Punkt (ξ, η, ζ) auf die Verbindungslinie von (x, y, z) und (x', y', z'), indem wir setzen:

$$(14.)\qquad \xi = xt' - x't, \quad \eta = yt' - y't, \quad \zeta = zt' - z't,$$

so werden H und H' homogene Functionen dritten Grades von t, t'. Aus der Identität (12.) aber folgt:

$$Ht' - H't = 0.$$

Daher kann man setzen:

$$(15.)\qquad H = t\psi(t, t'), \quad H' = t'\psi(t, t'),$$

wo jetzt ψ eine quadratische Form von t, t' bedeutet. Es giebt zwei Werthe von $\frac{t'}{t}$, die der Gleichung $\psi = 0$ genügen. Diesen entsprechen zwei Punkte (ξ, η, ζ); beide liegen auf der gegebenen Geraden, und in beiden ist $H = 0$, $H' = 0$; folglich sind sie die gesuchten Punkte.

Die Coefficienten der quadratischen Form $\psi(t, t')$ sind leicht als Functionen von (x, y, z) und (x', y', z') zu bestimmen. Es sei:

$$\psi(t, t') = At^2 + Btt' + Ct'^2;$$

ferner seien (X, Y, Z), (X', Y', Z') die Werthe der drei Functionen $X(\xi, \eta, \zeta)$ etc. in den beiden Punkten (x, y, z) und (x', y', z').

Für $t = -1$, $t' = 0$ wird $\xi = x'$, $\eta = y'$, $\zeta = z'$. Daher folgt aus

(13.) und (15.):

$$A = -(xX'+yY'+zZ').$$

Ebenso folgt, wenn wir $t=0$, $t'=1$ annehmen:

$$C = x'X+y'Y+z'Z.$$

Der mittlere Coefficient B ist so zu bestimmen. Aus der Gleichung

$$t'\psi = x'X(\xi, \eta, \zeta)+\text{etc.},$$

in der wir x', y', z', t' als Constanten ansehen, folgt, dass x, y, z, t in ψ nur in den Verbindungen ξ, η, ζ vorkommen und dass deshalb ψ der linearen Differentialgleichung

$$x'\frac{\partial\psi}{\partial x}+y'\frac{\partial\psi}{\partial y}+z'\frac{\partial\psi}{\partial z}+t'\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0$$

genügt. Setzen wir hier für ψ seinen Ausdruck ein und nehmen dann $t=0$, $t'=1$, so folgt:

$$B = -\left(x'\frac{\partial C}{\partial x}+y'\frac{\partial C}{\partial y}+z'\frac{\partial C}{\partial z}\right).$$

Es ist daher, wenn wir jetzt:

$$\text{(16.)}\qquad \begin{cases} P = x'X+y'Y+z'Z, \\ P' = xX'+yY'+zZ', \\ Q = x'\dfrac{\partial P}{\partial x}+y'\dfrac{\partial P}{\partial y}+z'\dfrac{\partial P}{\partial z} \end{cases}$$

setzen,

$$\text{(17.)}\qquad \psi(t, t') = P(t')^2-Qtt'-P't^2 = 0$$

die quadratische Gleichung, der $\frac{t'}{t}$ genügen muss, wenn

$$\xi = xt'-x't, \quad \eta = yt'-y't, \quad \zeta = zt'-z't$$

einer der beiden gesuchten Punkte sein soll. Da ψ alternirend ist in Bezug auf die beiden Werthsysteme (x, y, z, t) und (x', y', z', t'), so lässt sich der mittlere Coefficient Q auch in dieser Form darstellen:

$$Q = -\left(x\frac{\partial P'}{\partial x'}+y\frac{\partial P'}{\partial y'}+z\frac{\partial P'}{\partial z'}\right).$$

§ 4.

Die Form ψ ist eine homogene Function dritten Grades von x, y, z, t einerseits und x', y', z', t' andererseits; sie lässt sich aber, wie leicht zu

sehen ist, so umgestalten, dass nur die sechs Verbindungen

$$xt'-x't, \quad yt'-y't, \quad zt'-z't,$$
$$yz'-zy', \quad zx'-xz', \quad xy'-yx'$$

der Veränderlichen vorkommen. Die Determinante der Form

$$Q^2+4PP' = D$$

enthält aber nur die drei letzten Grössen

$$u = yz'-zy', \quad v = zx'-xz', \quad w = xy'-yx',$$

d. h. die Coefficienten der gegebenen Geraden und ist in Bezug auf diese eine homogene Function vierten Grades. $D(u, v, w) = 0$ ist die Bedingung dafür, dass $ux+vy+wz = 0$ eine der singulären Geraden ist, die nicht als Verbindungslinie verschiedener conjugirter Punkte aufgefasst werden können.

Setzen wir für t eine lineare Function von (x, y, z), und für t' dieselbe Function von (x', y', z'):

$$t = px+qy+rz, \quad t' = px'+qy'+rz',$$

so wird

$$xt'-x't = qw-rv, \quad \text{etc.},$$

und es geht daher ψ in eine homogene Function dritten Grades von u, v, w über. Dies ist die von Herrn *Frobenius* in seiner Arbeit „Ueber die Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung“ (dieses Journal, Bd. 99, S. 285) mit $L(x, y)$ bezeichnete Function (hier müsste geschrieben werden: $L(u, v, w; p, q, r)$).

Wählt man speciell für t die lineare Function, welche in zwei Grundpunkten α, β verschwindet:

$$t = \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_\alpha & b_\alpha & c_\alpha \\ a_\beta & b_\beta & c_\beta \end{vmatrix}, \quad t' = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ a_\alpha & b_\alpha & c_\alpha \\ a_\beta & b_\beta & c_\beta \end{vmatrix},$$

so wird ψ, als abhängig von x, y, z betrachtet, eine Function dritten Grades, die für $(x, y, z) = (x', y', z')$ von der dritten Ordnung verschwindet. Ausserdem wird sie 0 in den Punkten α, β; denn dort wird einerseits t, andererseits P gleich 0. Sie muss deshalb theilbar sein durch

$$\begin{vmatrix} a_\alpha & b_\alpha & c_\alpha \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = a_\alpha u+b_\alpha v+c_\alpha w,$$

und ebenso durch $a_\beta u+b_\beta v+c_\beta w$. Nennen wir diese Factoren u_α und u_β; der übrig bleibende Factor muss dann ebenfalls eine lineare Function von u, v, w sein:

$$u_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}u+b_{\alpha\beta}v+c_{\alpha\beta}w.$$

Wir haben demnach:

$$u_\alpha u_\beta u_{\alpha\beta} = \psi(t, t')$$

für

$$t = \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_\alpha & b_\alpha & c_\alpha \\ a_\beta & b_\beta & c_\beta \end{vmatrix}, \quad t' = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ a_\alpha & b_\alpha & c_\alpha \\ a_\beta & b_\beta & c_\beta \end{vmatrix}.$$

Hier sind u, v, w unabhängige Grössen, es sind die Coefficienten einer willkürlichen Geraden. Nimmt man aber zwischen u, v, w die Gleichung $D(u, v, w) = 0$ an, wodurch die Gerade zu einer singulären wird, so wird $\psi(t, t')$ das Quadrat einer linearen Function:

$$u_\alpha u_\beta u_{\alpha\beta} = (mt+m't')^2.$$

Daraus folgt, wenn wir

$$mx+m'x' = \xi, \quad my+m'y' = \eta, \quad mz+m'z' = \zeta$$

setzen:

$$\sqrt{u_\alpha u_\beta u_{\alpha\beta}} = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ a_\alpha & b_\alpha & c_\alpha \\ a_\beta & b_\beta & c_\beta \end{vmatrix}.$$

Mithin ist

$$f_{\beta\gamma\varkappa}\sqrt{u_\alpha u_{\alpha\varkappa}}+f_{\gamma\alpha\varkappa}\sqrt{u_\beta u_{\beta\varkappa}}+f_{\alpha\beta\varkappa}\sqrt{u_\gamma u_{\gamma\varkappa}} = 0$$

eine Gleichung, welche die Beziehung $D = 0$ in irrationaler Form darstellt.

Der Zusammenhang zwischen dieser Betrachtung und der Untersuchung, die Herr *Frobenius* im Anfang der vorhin erwähnten Arbeit durchführt, wird hierdurch vollständig klar; neu ist eigentlich nur die Einführung der quadratischen Form $\psi(t, t')$.

Zum Existenzbeweise des Integrals einer linearen homogenen Differentialgleichung von *Paul Günther*.

(Von Herrn *A. Gutzmer* in Halle a. S.)

Ueber den Beweis für die Existenz des Integrals einer linearen homogenen Differentialgleichung, welchen Herr *M. Hamburger* nach Mittheilungen von *Paul Günther* kürzlich veröffentlicht hat*), findet sich auch in dem handschriftlichen Nachlass des letzteren eine Aufzeichnung, die sich inhaltlich mit der *Hamburger*schen Darstellung deckt, in einem Punkte jedoch über dieselbe hinausgeht; sie enthält nämlich noch eine Andeutung, dass der neue Existenzbeweis gestattet, *eine Grenze anzugeben, unterhalb welcher der durch Abbrechen der Integralreihe begangene Fehler liegt.* Ich habe diese Andeutung, auf welche *Günther* Werth legte, ausgeführt und besonders am Schluss ergänzt, und ich erlaube mir, diesen Zusatz zu dem *Günther*schen Existenzbeweise, den ich übrigens in meinen Vorlesungen bereits mit Vortheil verwendet habe, im Folgenden mitzutheilen.

Unter Benutzung der von Herrn *Hamburger* gewählten Bezeichnungen sei

$$(1.) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + p_n y$$

die gegebene homogene lineare Differentialgleichung; dann lautet die *Günther*sche Hülfsgleichung

$$(2.) \qquad \frac{d^n u}{dt^n} = \frac{M_1 r}{1-t} \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \frac{M_2 r^2}{(1-t)^2} \frac{d^{n-2} u}{dt^{n-2}} + \cdots + \frac{M_n r^n}{(1-t)^n} u,$$

wo wir

$$t = \frac{x - x_0}{r}$$

gesetzt haben, und es ist bekannt, dass die Gleichung (2.) in jedem Falle

*) Dieses Journal, Band 118, S. 351—353.

ein Integral besitzt, das sich in eine Potenzreihe von t:

$$u = \mathfrak{P}_1(t), \tag{3.}$$

entwickeln lässt, welche convergirt, solange $|t| < 1$ ist. Daraus wird dann gefolgert, dass die Gleichung (1.) ein Integral besitzt, das sich als eine Potenzreihe

$$y = \mathfrak{P}(x-x_0) \tag{4.}$$

darstellen lässt, welche für alle der Bedingung $|x-x_0| < r$ genügenden Werthe von x convergirt.

Wie schon in der *Hamburger*schen Mittheilung des *Günther*schen Beweises bemerkt ist, lässt sich die Gleichung

$$\begin{cases} s(s-1)\ldots(s-n+1)+M_1 r s(s-1)\ldots(s-n+2) \\ -M_2 r^2 s(s-1)\ldots(s-n+3)+\cdots+(-1)^n M_{n-1} r^{n-1} s+(-1)^{n+1} M_n r^n = 0, \end{cases} \tag{5.}$$

die man kurz als die charakteristische Gleichung bezeichnen wird, durch geeignete Wahl der Grössen M_a so einrichten, dass sie lauter verschiedene Wurzeln $s_1, s_2, \ldots, s_n$ besitzt. In diesem Falle lautet das allgemeine Integral der Hülfsgleichung (2.):

$$u = \sum_{a=1}^{n} c_a (1-t)^{s_a},$$

wo die Grössen c_a Constanten darstellen. Wir wollen von einer derartigen Umformung der charakteristischen Gleichung Gebrauch machen. Da die Grössen M_a endliche Grössen darstellen, so lässt sich stets eine positive ganze Zahl M so bestimmen, dass die Ausdrücke

$$M, \quad M(n-1), \quad M(n-1)(n-2), \quad \ldots, \quad M(n-1)!$$

bezw. nicht kleiner sind als

$$M_1 r, \quad M_2 r^2, \quad M_3 r^3, \quad \ldots, \quad M_n r^n.$$

Ersetzen wir in der Hülfsgleichung (2.) und in der charakteristischen Gleichung (5.) diese Grössen durch jene, so geht die letztere in die Form über:

$$s(s-1)\ldots(s-n+1)+M(n-1)!\left\{\frac{s(s-1)\ldots(s-n+2)}{(n-1)!}-\frac{s(s-1)\ldots(s-n+3)}{(n-2)!}+\cdots\right.$$
$$\left.+(-1)^{n-1}\frac{s(s-1)}{2!}+(-1)^n s+(-1)^{n+1}\right\} = 0$$

oder

$$s(s-1)\ldots(s-n+1)+M(n-1)!\binom{s-1}{n-1} = 0,$$

d. h.

$$(s+M)(s-1)(s-2)\ldots(s-n+1) = 0.$$

Den Wurzeln

$$s_1 = -M, \quad s_2 = 1, \quad s_3 = 2, \quad \ldots, \quad s_n = n-1$$

dieser Gleichung entspricht als Integral der zugehörigen Hülfsgleichung der Ausdruck:

$$u = c_1(1-t)^{-M} + c_2(1-t) + c_3(1-t)^2 + \cdots + c_n(1-t)^{n-1}.$$

Dabei sind zwar die Grössen $c_1, c_2, \ldots, c_n$ willkürliche Constanten, aber mit Rücksicht auf die Beziehung, in welcher die Hülfsgleichung (2.) zu der ursprünglichen Gleichung (1.) steht, sind sie so zu wählen, dass die Anfangswerthe von u für $t = 0$ positive Grössen werden, welche den Anfangswerthen von y für $x = x_0$ dem absoluten Betrage nach mindestens gleich sind.

Mit Hülfe der Binomialentwickelung von $(1-t)^{-M}$ kann nun der Fehler ε_q leicht abgeschätzt werden, der bei dem Abbrechen der Reihen (3.) bezw. (4.) mit dem $q$ten Gliede, d. h. mit t^{q-1} bezw. $(x-x_0)^{q-1}$, wo $q \geqq n$ vorausgesetzt ist, begangen wird. Setzt man $|t| = \tau$, so ist:

$$\varepsilon_q < c_1 \sum_{\lambda=q}^{\infty} (-1)^\lambda \binom{-M}{\lambda} \tau^\lambda$$

$$< c_1 \sum_{\lambda=q}^{\infty} \frac{M(M+1)\ldots(M+\lambda-1)}{\lambda!} \tau^\lambda.$$

Oder da

$$\frac{M(M+1)\ldots(M+\lambda-1)}{\lambda!} < M^\lambda$$

ist, so ergiebt sich:

$$\varepsilon_q < c_1 \sum_{\lambda=q}^{\infty} M^\lambda \tau^\lambda$$

$$< c_1 M^q \tau^q \sum_{\lambda=0}^{\infty} M^\lambda \tau^\lambda,$$

d. h. der Fehler ε_q ist, sobald $M\tau < 1$ ausfällt:

$$\varepsilon_q < c_1 \frac{M^q \tau^q}{1-M\tau}. \qquad (q \geqq n)$$

Da die Coefficienten der Reihe (4.), wie aus dem Existenzbeweise ohne weiteres klar ist, dem absoluten Betrage nach die entsprechenden Coefficienten der Reihe (3.) nicht übertreffen, so stellt der vorstehende Ausdruck zugleich eine Grenze für den Fehler dar, der durch das Abbrechen der

Reihe (4.) mit dem Gliede $(x-x_0)^{q-1}$, $q \geqq n$, entsteht; man hat nur c_1 passend zu bestimmen und für τ seinen Werth $\frac{|x-x_0|}{r}$ einzuführen.

Die gefundene Fehlergrenze, welche an Einfachheit kaum etwas zu wünschen lassen wird, hat einen Sinn nur für diejenigen Werthe von t bezw. x, welche dem durch die Bedingung $|t| < \frac{1}{M}$ bezw. $|x-x_0| < \frac{r}{M}$ bestimmten Gebiete angehören; ist M eine einigermassen grosse Zahl, so ist freilich der Bereich, für welchen der ermittelte Grenzausdruck Geltung hat, von geringer Ausdehnung. Ob und in welcher Weise etwa durch eine andere Einrichtung der Hülfsgleichung (2.) eine Fehlergrenze abgeleitet werden kann, deren Geltungsgebiet grösser ist, bleibe einer späteren Erörterung vorbehalten.

Ernst Christian Julius Schering †.

Am 2. November dieses Jahres verschied nach langem Leiden der ordentliche Professor der Mathematik an der Universität Göttingen *Ernst Schering*, geb. am 13. Juli 1833 im Forsthause Sandbergen bei Bleckede an der Elbe (in der Provinz Hannover). Ausser durch seine zahlreichen auf die reine Mathematik und auf die mathematische Physik bezüglichen Arbeiten hat er die mathematische Welt ganz besonders durch die im Auftrage der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen von ihm besorgte Herausgabe der gesammelten Werke unseres grossen Lehrmeisters *Carl Friedrich Gauss* zu bleibendem Danke verpflichtet. Seine eigenen Schriften befinden sich grösstentheils in den Nachrichten und Abhandlungen der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften, eine derselben, zahlentheoretischen Inhalts, hat der Verfasser dem 100. Bande unseres Journals einverleiben lassen.

December 1897.

Ueber nichtlineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

(Von Herrn *Georg Wallenberg*.)

Zum Verständniss der vorliegenden Arbeit muss eine genaue Terminologie der bei den Integralen einer algebraischen Differentialgleichung auftretenden Singularitäten vorausgeschickt werden: *„Singuläre Stellen“* einer Integralfunction sind solche Stellen, an welchen dieselbe *sich verzweigt* oder *unbestimmt wird**); beides kann auch vereinigt vorkommen. Im Folgenden soll nun jede Stelle, an welcher die Function unbestimmt wird, gleichviel, ob sie sich dort verzweigt oder nicht, *„Stelle oder Punkt der Unbestimmtheit“* heissen**). Dagegen sollen diejenigen Stellen, in welchen sich die Function verzweigt, *ohne* unbestimmt zu werden, *„Verzweigungsstellen“* genannt werden; die Verzweigungsstellen *endlicher Vieldeutigkeit*, in denen also die Integrale sich wie algebraische Functionen verhalten, nennen wir „Verzweigungsstellen algebraischer Natur“ oder kurz *„algebraische Verzweigungsstellen“*. — Mit dem Ausdruck *„Pol“* bezeichnen wir zusammenfassend jede aufhebbare, nicht logarithmische Unendlichkeitsstelle***).

Die singulären Stellen der Integrale einer algebraischen Differentialgleichung können sich entweder mit den Anfangswerthen verschieben oder von der Wahl derselben unabhängig sein; im ersteren Falle sollen sie *„verschiebbare“*, im zweiten Falle *„feste“* singuläre Stellen genannt werden†).

---

*) Wir rechnen also *nicht* dazu diejenigen Unendlichkeitsstellen, an welchen die Function „sich rational verhält“.

**) *Fuchs*, Ueber die Werthe, welche die Integrale einer Differentialgleichung erster Ordnung in singulären Punkten annehmen können. Sitzungsber. der Berl. Akademie, 1886 (11. März), S. 281—283.

***) Ein Pol gehört also nur dann zu den singulären Stellen, wenn daselbst gleichzeitig eine Verzweigung stattfindet.

†) *Fuchs*, Sitzungsber. d. Berl. Akad., 1884, Bd. 32, S. 699 ff.

Es besteht nun zwischen den Differentialgleichungen erster Ordnung und denen höherer Ordnung ein durchgreifender Unterschied: ***Bei den Differentialgleichungen erster Ordnung sind die verschiebbaren singulären Stellen Verzweigungsstellen algebraischer Natur, während bei den nichtlinearen Differentialgleichungen höherer Ordnung im Allgemeinen auch andere Singularitäten verschiebbar sein können,*** wie das einfache Beispiel der Differentialgleichung

$$(y'^2 - yy'')^2 + 4yy'^3 = 0^*), \quad \left(y' = \frac{dy}{dz},\ y'' = \frac{d^2y}{dz^2}\right)$$

lehrt, deren Integral

$$y = c_2 e^{\frac{1}{z - c_1}}$$

ist. — Herr *Picard**) schreibt die Entdeckung dieses Satzes Herrn *Painlevé***) zu; es ist indessen zu bemerken, dass der in dem ersten Theile enthaltene wesentliche Inhalt desselben bereits aus der wichtigen Abhandlung des Herrn *Fuchs* „Ueber die Differentialgleichungen, deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen“ (l. c., 1884) sich ergiebt, wenn er auch dort noch nicht ausdrücklich ausgesprochen ist.

Es bietet sich nun naturgemäss das Problem dar, aus den algebraischen Differentialgleichungen *höherer* Ordnung zunächst diejenigen auszuscheiden, deren verschiebbare Singularitäten wie bei denen erster Ordnung nur Verzweigungsstellen algebraischer Natur sind; man würde dadurch, indem man dann aus diesen noch diejenigen aussonderte, deren Integrale feste algebraische Verzweigungspunkte besitzen, die nichtlinearen algebraischen Differentialgleichungen höherer Ordnung, über die man bis jetzt noch fast gar nichts weiss, dem Studium etwas zugänglicher machen. Da aber die Lösung dieses Problems in seiner ganzen Allgemeinheit bei dem heutigen Stande der Analysis noch auf unüberwindliche Schwierigkeiten stösst, so dürfte es vielleicht nicht ohne Werth sein, einen ganz besonderen Fall desselben zu erledigen, für dessen Behandlung die bisherigen analytischen Hülfsmittel ausreichen, nämlich den Fall der homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, zumal schon hier für nichtlineare Differentialgleichungen *höherer* Ordnung charakteristische Eigenthümlichkeiten auftreten.

---

*) *Picard*, Remarques sur les équations différentielles, Acta Math., 17 (1893), p. 297—300.

**) *Painlevé*, Sur les lignes singulières des fonctions analytiques, Ann. de la Faculté de Toulouse, 1888, p. 38.

Dass auch sie schon in den einfachsten Fällen zu recht complicirten Integrationen führen können, mögen die folgenden beiden Beispiele beweisen:

(1.) $$y'y''-y^2=0; \quad \left(y'=\frac{dy}{dz},\ y''=\frac{d^2y}{dz^2}\right).$$

Setzt man $\frac{y'}{y}=v$, also $\frac{y''}{y}=v'+v^2$, so wird die durch y^2 dividirte Differentialgleichung (1.):

$$vv'+v^3-1 = 0;$$

aus derselben ergiebt sich durch Integration:

$$(v-1)^{\frac{1}{3}}(v-\varepsilon)^{\frac{\varepsilon^2}{3}}(v-\varepsilon^2)^{\frac{\varepsilon}{3}} = c_1e^{-z},$$

worin ε eine primitive dritte Einheitswurzel und c_1 die willkürliche Constante bedeutet. Das sogenannte erste Integral der Differentialgleichung (1.) lautet daher:

$$(y'-y)^{\frac{1}{3}}(y'-\varepsilon y)^{\frac{\varepsilon^2}{3}}(y'-\varepsilon^2 y)^{\frac{\varepsilon}{3}} = c_1e^{-z}.$$

Die Discussion der Integrale dieser Differentialgleichung erster Ordnung dürfte bereits auf einige Schwierigkeiten stossen; nur für den speciellen Werth $c_1=0$ ergeben sich durch Nullsetzen der einzelnen Factoren des links stehenden Productes die drei einfachen Particularintegrale:

$$y_1=ce^z, \quad y_2=ce^{\varepsilon z}, \quad y_3=ce^{\varepsilon^2 z};$$

man findet dieselben auch, indem man in die Differentialgleichung (1.) $y=ce^{\alpha z}$ einsetzt und dann α daraus bestimmt; es ergiebt sich $\alpha^3-1=0$.

(2.) $$y''^2-yy' = 0.$$

Setzt man wieder $\frac{y'}{y}=v$, also $\frac{y''}{y}=v'+v^2$, so wird die durch y^2 dividirte Differentialgleichung (2.):

$$(v'+v^2+\sqrt{v})(v'+v^2-\sqrt{v}) = 0.$$

Ein Factor, z. B. $v'+v^2-\sqrt{v}$, gleich Null gesetzt, ergiebt als erstes Integral der Differentialgleichung (2.):

$$(\sqrt{y'}-\sqrt{y})^{\frac{1}{3}}(\sqrt{y'}-\varepsilon\sqrt{y})^{\frac{\varepsilon}{3}}(\sqrt{y'}-\varepsilon^2\sqrt{y})^{\frac{\varepsilon^2}{3}} = c_1e^{-\frac{z}{2}}.$$

Für $c_1=0$ ergeben sich wieder drei Particularintegrale:

$$y_1=ce^z, \quad y_2=ce^{\varepsilon^2 z}, \quad y_3=ce^{\varepsilon z},$$

welche man auch durch Einsetzen von $y=ce^{\alpha z}$ in die Gleichung (2.) erhält; für α ergiebt sich nämlich die Gleichung $\alpha^4-\alpha=0$.

I.

In dem ersten Theile dieser Abhandlung untersuchen wir — nach der in der Einleitung angegebenen Richtung — zunächst diejenigen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, in welchen die unabhängige Veränderliche explicite ***nicht*** vorkommt. — Es sei also

$$(A.) \qquad F(y,\ y',\ y'') = 0, \quad \left(y' = \frac{dy}{dz},\ y'' = \frac{d^2y}{dz^2}\right)$$

die vorgelegte Differentialgleichung und F eine irreductible*) ganze rationale homogene Function $m$ter Dimension von y, y', y''. Man dividire durch y^m, so wird dieselbe:

$$(1.) \qquad f\left(\frac{y'}{y},\ \frac{y''}{y}\right) = 0;$$

ferner setze man

$$\frac{y'}{y} = w, \quad \text{dann ist} \quad \frac{y''}{y} = w' + w^2,$$

und die Gleichung (1.) geht über in

$$(2.) \qquad f(w,\ w' + w^2) = g(w,\ w') = 0.$$

Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung hat die Form

$$w = \varphi(z - c_1),$$

worin c_1 die Integrationsconstante bedeutet, also das Integral von (A.):

$$(3.) \qquad y = c_2 e^{\int \varphi(z-c_1)\,dz}.$$

Wann sind nun zunächst die Unbestimmtheitsstellen der Differentialgleichung (A.) „fest“? Welches sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen

---

*) Nennt man nach bekannten Analogieen die Summe der Producte aus Ableitungszahl und Potenz eines Gliedes das ***Gewicht*** desselben, sodass z. B. das Gewicht des Gliedes $y^k y'^l y''^n = l + 2n$ ist, so lässt sich zeigen, dass homogene ***isobare*** Differentialgleichungen zweiter Ordnung stets ***reductibel*** sind: Es sei nämlich $F(y, y', y'') = 0$ isobar, so wird, da Potenzen von y hierbei nicht in Betracht kommen, auch in der Gleichung (1.) $f\left(\frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}\right) = 0$ für alle Glieder $l + 2n$ eine feste Zahl s sein. Setzt man daher $\frac{y'}{y} = u$, $\frac{y''}{y} = v$ und dividirt die Gleichung (1.) durch u^s, so wird dieselbe: $f\left(1, \frac{v}{u^2}\right) = 0$. Es ist also $f(u, v)$, abgesehen von einer etwaigen Potenz von u, in Factoren von der Form $v - \alpha_i u^2$ zerlegbar, worin α_i Constanten, nämlich Wurzeln der Gleichung $f(1, \alpha) = 0$ sind, und folglich lässt sich $F(y, y', y'')$, abgesehen von einer Potenz von y', in Factoren von der Form $yy'' - \alpha_i y'^2$ zerlegen.

dafür? — Die Stellen der Unbestimmtheit von y sind, da $\varphi(x)$*) als Integral einer die unabhängige Veränderliche nicht explicite enthaltenden Differentialgleichung *erster* Ordnung als einzige Stelle der Unbestimmtheit nur $x=\infty$ besitzen kann**), abgesehen vom unendlich fernen Punkte, der ja jedenfalls zu den *festen* Singularitäten gehören würde, diejenigen endlichen Pole $x=a$ von $\varphi(x)$, für welche $(x-a)\varphi(x)$ in $x=a$ unendlich gross wird; dieselben sind jedenfalls mit den Anfangswerthen veränderlich, da $x-a=z-(a+c_1)$ ist. — Wir haben also die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür zu suchen, dass $\varphi(x)$ nur solche endlichen Pole $x=a$ besitzt, für welche $(x-a)\varphi(x)$ einen *endlichen* Werth (ev. auch den Werth 0) erhält. —

Zu diesem Zwecke setze man in der Differentialgleichung

$$g(w,\ w')\ =\ 0, \tag{2.}$$

$$w=\frac{1}{v},\quad \text{also}\quad w'=-\frac{v'}{v^2};$$

sie möge dadurch übergehen in

$$h(v,\ v')\ =\ 0, \tag{4.}$$

und wir haben dieselbe für $v=0$ zu betrachten. Die Entwickelung von $v'=\frac{dv}{dz}$ in der Umgebung von $v=0$ möge folgendermassen lauten:

$$v'\ =\ a_0 v^{\frac{k}{l}}+a_1 v^{\frac{k+1}{l}}+\cdots,$$

wobei k zunächst eine positive oder negative ganze Zahl oder auch gleich Null sein kann, während l eine ganze positive Zahl bedeutet. Man kann $k<l$ voraussetzen, weil im Falle $k\geqq l$, wie sich leicht zeigen lässt***), dem Werth $v=0$ der „feste" Werth $z=\infty$ entspricht. Setzt man $v=t^l$, also $v'=lt^{l-1}t'$, so erhält man

$$lt^{l-1}t'\ =\ a_0 t^k+a_1 t^{k+1}+\cdots,$$

also

$$\frac{lt^{l-1-k}dt}{a_0+a_1 t+\cdots}\ =\ dz,$$

und daraus

$$b_0 t^{l-k}+b_1 t^{l-k+1}+\cdots\ =\ z-c\quad (b_0\neq 0),$$

---

*) $x=z-c_1$.

**) Vgl. die Einleitung, S. 88.

***) Vgl. z. B. *Königsberger*, Theorie der elliptischen Functionen, S. 157 u. f.

folglich

$$t = \overline{c}_0(z-c)^{\frac{1}{l-k}} + \cdots,$$

und daher

$$v = c_0(z-c)^{\frac{l}{l-k}} + \cdots,$$

also endlich

$$w = \frac{1}{v} = \frac{1}{c_0}(z-c)^{\frac{l}{k-l}} + \cdots \quad (c_0 \neq 0).$$

Soll daher nicht der willkürliche Punkt $z = c$ Punkt der Unbestimmtheit von y sein, so muss n. O. $(z-c)w$ für $z = c$ einen endlichen Werth besitzen, d. h. es muss

$$\frac{l}{k-l} + 1 \geqq 0,$$

oder

$$\frac{k}{k-l} \geqq 0,$$

also, da $k < l$ und l positiv vorausgesetzt war,

$$k \leqq 0$$

sein. Dies auf die ursprüngliche Differentialgleichung (2.) übertragen ergiebt, da

$$v = \frac{1}{w}, \quad v' = -\frac{1}{w^2}w'$$

war,

$$w' = -a_0 w^{2-\frac{k}{l}} - a_1 w^{2-\frac{k+1}{l}} - \cdots *).$$

Da $k \leqq 0$ und $l > 0$ ist, so muss

$$2 - \frac{k}{l} \geqq 2$$

sein. Also:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Integrale der Differentialgleichung (A.) *ausser dem unendlich fernen Punkte keine Unbestimmtheitsstellen besitzen***), *ist die, dass in der Entwickelung von*

---

*) Da $k < l$ vorausgesetzt war, so ist $2 - \frac{k}{l} > 1$.

**) Die *endlichen* Unbestimmtheitsstellen von y müssten, wenn sie vorhanden wären, n. O. (S. 91) sämmtlich mit den Anfangswerthen verschiebbar sein.

$w' = \frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2$ *nach fallenden Potenzen von* $w = \frac{y'}{y}$ *der Exponent der höchsten Potenz von* w, *falls er grösser als* 1 *ist,* $\geqq 2$ *sein muss**).

Welches sind ferner die Verzweigungspunkte von y?

1) Die Verzweigungspunkte von w;

2) Die Pole von w, wenn das Residuum keine ganze Zahl ist**).

Damit also die Integrale der Differentialgleichung (A.) ausser dem unendlich fernen Punkt (d. h. überhaupt) keine Verzweigungsstellen besitzen, ist nothwendig und hinreichend,

1) dass w keine Verzweigungsstelle besitze, d. h. dass die Differentialgleichung (2.) $g(w, w') = 0$ eine *Briot–Bouquet*sche***) sei;

2) dass die Residuen der Pole von w ganze Zahlen seien.

Wir stellen nunmehr die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür auf, dass die Integrale der Differentialgleichung (A.) ausser dem unendlich fernen Punkt *weder Stellen der Unbestimmtheit noch Verzweigungspunkte besitzen*†): Wir hatten oben gefunden, dass in der Entwickelung von v' nach steigenden Potenzen von v der Exponent der niedrigsten Potenz, falls er kleiner als 1 ist, $\leqq 0$ sein muss; da nun nach den von *Briot* und *Bouquet* für die Eindeutigkeit des Integrals w aufgestellten Bedingungen††) v' für $v = 0$ nicht unendlich werden darf, so muss dieser Exponent *gleich Null* sein und infolge dessen — ebenfalls nach den Bedingungen von *Briot* und *Bouquet* — *darf sich* v' *in* $v = 0$ *nicht verzweigen*. Die Entwickelung lautet dann:

$$(5.) \qquad v' = a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + \cdots;$$

daraus ergiebt sich:

$$\frac{dv}{a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + \cdots} = dz,$$

also

$$\frac{1}{a_0} v + \cdots = z - c$$

---

*) Setzt man in $f\left(\frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}\right) = 0$, $\frac{y'}{y} = u$, $\frac{y''}{y} = v$, so stellt $f(u, v) = 0$ eine Curve dar. Obige Bedingung kann dann auch so ausgedrückt werden: *Wenn die Entwickelung von* v *nach fallenden Potenzen von* u *mit* $1.u^2$ *beginnt, so muss der Exponent des folgenden Gliedes* $\leqq 1$ *sein.*

**) Beides kann auch vereinigt sein.

***) Journal de l'école polytechnique, t. XXI (cahier XXXVI), p. 212, Théorème XXII.

†) Die Integrale sind dann n. O. eindeutige Functionen.

††) l. c.

daher

$$v = a_0(z-c)+\cdots,$$

und folglich

$$w = \frac{\frac{1}{a_0}}{z-c}+b_0+b_1(z-c)+\cdots.$$

Es muss nun $\frac{1}{a_0}$ eine ganze Zahl p sein, also $a_0 = \frac{1}{p}$ *). Wir können daher den Satz aussprechen:

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Integrale der Differentialgleichung

$$(A.) \qquad F(y, y', y'') = y^m f\left(\frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}\right) = 0$$

eindeutige Functionen sind, welche ausser dem unendlich fernen Punkte keine Stellen der Unbestimmtheit besitzen, sind die folgenden:

1) *Die Differentialgleichung* (2.) $g(w, w') = 0$ *muss den Briot-Bouquetschen Bedingungen genügen* **).

2) *In der transformirten Differentialgleichung* (4.) $h(v, v') = 0$ *müssen die Wurzeln* v' *der Gleichung* (4.*) $h(0, v') = 0$, *falls sie nicht mindestens*

---

*) Aus (5.) ergiebt sich noch für $w = \frac{1}{v}$:

$$w' = -a_0w^2-a_1w-a_2-a_3w^{-1}-\cdots,$$

daher:

$$w'+w^2 = (1-a_0)w^2-a_1w-\cdots,$$

also:

$$v = \left(1-\frac{1}{p}\right)u^2-a_1u-\cdots;$$

d. h. in $f\left(\frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}\right) = f(u, v) = 0$ muss die Entwickelung von v nach fallenden Potenzen von u, wenn sie nicht mit $1u^2$ anfängt (vgl. S. 91 Anmerkung 1), mit $\left(1-\frac{1}{p}\right)u^2$ beginnen, worin p eine ganze positive oder negative Zahl bedeutet $\left(1-\frac{1}{p}\right.$ kann auch $= 0$ sein, wenn nämlich $p = 1$ ist$\left.\right)$, und der Punkt $u = \infty$ darf in diesem Falle kein Verzweigungspunkt von v sein.

**) Aus den Untersuchungen von *Hermite* folgt noch, dass das Geschlecht der durch die Gleichung (2.) definirten algebraischen Function w' von w höchstens gleich 1 ist; daher ist auch die durch $f(u, v) = 0$ dargestellte algebraische Curve höchstens vom Geschlecht 1, denn es ist $w = \frac{y'}{y} = u$, $w' = \frac{y''}{y}-\left(\frac{y'}{y}\right)^2 = v-u^2$, oder $u = w$, $v = w'+w^2$.

vom ersten Grade in Bezug auf ν verschwinden, von 0 verschieden und zwar reciproke Werthe ganzer (positiver oder negativer) Zahlen sein.

Aus diesen Bedingungen lassen sich einige bemerkenswerthe Folgerungen ziehen, welche hauptsächlich die äussere Gestalt der Differentialgleichung (A.) betreffen. Zunächst muss nach der ersten *Briot-Bouquet*schen Bedingung*) die Differentialgleichung (2.) folgende Gestalt besitzen:

$$(6.) \qquad w'^n + p_1(w)w'^{n-1} + \cdots + p_{n-1}(w)w' + p_n(w) = 0,$$

worin $p_k(w)$ höchstens vom $2k$ten Grade in w ist. Wenn nun in (A.)**) wirklich y''^m vorkommt, so ist diese Bedingung von selber erfüllt; denn in diesem Falle lautet die Differentialgleichung (A.), nach Potenzen von y'' geordnet:

$$(7.) \quad p_0 y''^m + r_1(y, y')y''^{m-1} + \cdots + r_{m-1}(y, y')y'' + r_m(y, y') = 0;$$

darin bedeuten die r_k homogene Functionen $k$ter Dimension von y und y', während p_0 eine Constante ist. Dividirt man durch y^m und setzt $\frac{y'}{y} = w$, also $\frac{y''}{y} = w' + w^2$, so wird die Gleichung (2.):

$$(8.) \quad p_0(w' + w^2)^m + s_1(w)(w' + w^2)^{m-1} + \cdots + s_{m-1}(w)(w' + w^2) + s_m(w) = 0,$$

oder:

$$(8^*.) \qquad p_0 w'^m + p_1(w)w'^{m-1} + \cdots + p_{m-1}(w)w' + p_m(w) = 0.$$

Da die s_k höchstens vom $k$ten Grade, so sind die p_k in der That höchstens vom $2k$ten Grade in w. — Setzt man ferner die vierte *Briot-Bouquet*sche Bedingung*) als erfüllt voraus, so ist in dem vorliegenden Falle auch die zweite von uns aufgestellte Bedingung ***von selber*** erfüllt. Denn setzt man in (8.) $w = \frac{1}{v}$, also $w' = -\frac{v'}{v^2}$ und multiplicirt mit v^{2m} herauf, so wird die Gleichung (4.):

$$h(v, v') = p_0(-v' + 1)^m + v q_1(v)(-v' + 1)^{m-1} + v^2 q_2(v)(-v' + 1)^{m-2} + \cdots + v^{m-1} q_{m-1}(v)(-v' + 1) + v^m q_m(v) = 0.$$

Die Wurzeln v' der Gleichung $h(0, v') = 0$ sind sämmtlich gleich 1, genügen also in der That unserer zweiten Bedingung. — Nach der vierten *Briot-Bouquet*schen Bedingung (a. a. O.) darf $v = 0$, da der zugehörige Werth

*) a. a. O.

**) $F(y, y', y'')$ sollte eine homogene Function $m$ter Dimension von y, y', y'' sein; vgl. S. 90.

von v' von Null verschieden ist, keine Verzweigungsstelle der algebraischen Function v' sein: auch diese Bedingung ist hier, da das Glied mit der $(m-k)$-ten Potenz von $-v'+1$ als Factor v^k enthält, i. a. erfüllt, wie man sich durch die *Puiseux*sche graphische Methode leicht überzeugt; nur dann nicht, wenn aus *sämmtlichen* $q_k(v)$ noch v heraustritt, d. h. wenn *sämmtliche* $s_k(w)$ ihren höchstmöglichen Grad in w nicht erreichen. ***Wenn also*** y''^m ***in*** $F(y, y', y'')$ ***vorkommt, so muss wenigstens eines der*** $s_k(w)$ ***seinen höchstmöglichen Grad in*** w ***wirklich erreichen.*** Aus diesem Grunde ist z. B. das allgemeine Integral der Differentialgleichung $y''^2-yy'=0$ (vgl. Einleitung, S. 89 2. Beispiel) nicht eindeutig, weil das Glied mit y'^2 fehlt: in der That lautet die Gleichung in w: $(w'+w^2)^2-w=0$, und die Gleichung in v: $(-v'+1)^2-v^3=0$, sodass v' sich in $v=0$ verzweigt ($v'=1\mp v^{\frac{3}{2}}$) und doch dort von Null verschieden ist.

Anders verhält es sich, wenn y''^m in $F(y, y', y'')$ ***nicht*** vorkommt: Zunächst folgt dann aus (6.), dass das Glied mit der höchsten Potenz von y'' nicht y' enthalten darf, also lauten muss:

$$y^k y''^{m-k}.$$

Ist $k=1$, so ist auch noch die in Gleichung (6.) ausgesprochene Bedingung von selber erfüllt; ist dagegen $k>1$, so darf in den Gliedern, welche y''^{m-k-l} enthalten, y' höchstens in der $2l$ten Potenz vorkommen, und das ist nur solange von selber der Fall, als $l \geqq k$ ist. — Wenn übrigens die Differentialgleichung (A.) irreductibel sein soll, so muss $k \leqq \left[\frac{m}{2}\right]$*) sein; denn ist $k > \left[\frac{m}{2}\right]$, so ist $m-k \leqq \left[\frac{m}{2}\right]$, also jedenfalls auch stets $l \leqq \left[\frac{m}{2}\right]$, folglich $k > l$ und daher $k+l > 2l$. Da nun die Glieder mit y''^{m-k-l} n. O. höchstens die $2l$te Potenz von y' enthalten dürfen, so müssen dieselben, weil sie von der $(k+l)$-ten Dimension in y und y' sind, ***sämmtlich*** y enthalten; und da dies mit ***allen*** Gliedern der Fall ist, so ist die Differentialgleichung (A.) ***reductibel***, nämlich durch eine Potenz von y theilbar. ***Für irreductible Differentialgleichungen*** (A.) ***muss also*** $k \leqq \left[\frac{m}{2}\right]$ ***sein.***

Unsere zweite Bedingung lässt sich hier in folgender Form aus-

---

*) $\left[\frac{m}{2}\right]$ bedeutet „das grösste Ganze von $\frac{m}{2}$“.

drücken: Es sei

$$F = y^k y''^{m-k} + p_1 y''^{m-k-1} + \cdots + p_{m-k-1} y'' + p_{m-k} = 0 \quad \left(k \leqq \left[\frac{m}{2}\right]\right),$$

und

$$p_l = \sum_{i=0}^{i=2l} a_{l_i} y^{k+l-i} y'^i. \qquad (l = 1, 2, \ldots, k)$$

Dann lautet die Gleichung (4*.) $h(0, \nu') = 0$:

$$(-\nu'+1)^{m-k} + a_{1_2}(-\nu'+1)^{m-k-1} + a_{2_4}(-\nu'+1)^{m-k-2} + \cdots + a_{k_{2k}}(-\nu'+1)^{m-2k} = 0.$$

Also die Wurzeln r_i der Gleichung

$$h(r) = r^k + a_{1_2} r^{k-1} + a_{2_4} r^{k-2} + \cdots + a_{k_{2k}} = 0$$

müssen sämmtlich die Form $1-\frac{1}{p}$ haben, wo p eine ganze Zahl bedeutet, es sei denn, dass ν' für $\nu = 0$ mindestens vom ersten Grade in Bezug auf ν verschwindet.

Wir wollen nunmehr im Anschluss an die Entwickelungen von *Briot* und *Bouquet**) den functionellen Charakter der Integrale der Differentialgleichung (A.), falls dieselbe den beiden oben aufgestellten Bedingungen genügt, feststellen und denselben einen analytischen Ausdruck zu geben versuchen, welcher deutlich erkennen lässt, dass ausser dem unendlich fernen Punkte keine singulären Stellen vorhanden sind.

1) Wenn die Gleichung (2.) für keinen endlichen Werth a von w eine Wurzel $w' = 0$ besitzt, deren Grad in Bezug auf $w-a$ gleich oder grösser als die Einheit ist, und wenn die Wurzeln der Gleichung (4*.) wirklich von Null verschieden sind**), so ist w eine doppeltperiodische Function, und das allgemeine Integral der Differentialgleichung (A.) hat zunächst die Gestalt:

$$y = c_2 e^{\int \varphi(z-c_1)dz},$$

worin φ eine eindeutige doppeltperiodische Function ihres Arguments bedeutet, und zwar eine *elliptische* Function, d. h. eine solche, welche nur *eine* im Unendlichen liegende Stelle der Unbestimmtheit besitzt. Um in Evidenz zu setzen, dass der unendlich ferne Punkt auch der einzige singuläre Punkt *von y ist,* benutzen wir folgende von *Weierstrass* gegebene Dar-

*) l. c. p. 216, Théorème XXIII.

**) Die Curve $f(u, v) = 0$ hat in diesem Falle das Geschlecht 1.

stellung*): Wenn $z_1, z_2, \ldots, z_n$ die Unendlichkeitsstellen der elliptischen Function $r$ten Grades $\varphi(z)$ innerhalb eines Periodenparallelogrammes bedeuten und für $\mu = 1, 2, \ldots, n$

$$C_\mu(z-z_\mu)^{-1}+C'_\mu(z-z_\mu)^{-2}+C''_\mu(z-z_\mu)^{-3}+\cdots+C_\mu^{(r_\mu-1)}(z-z_\mu)^{-r_\mu}$$

die Summe aller Glieder mit ***negativem*** Exponenten ist, welche in der für die Umgebung von z_μ geltenden Reihenentwickelung der Function $\varphi(z)$ enthalten sind, so ist:

$$\int \varphi(z)\,dz = \Sigma_\mu C_\mu \log\sigma(z-z_\mu)+C_0 z+C'_0-\Sigma_\mu C'_\mu \frac{\sigma'(z-z_\mu)}{\sigma(z-z_\mu)} + \sum_\mu\sum_\lambda (-1)^{\lambda-1}\frac{1}{\lambda!}C_\mu^{(\lambda)}\wp^{(\lambda-2)}(z-z_\mu).$$

$(\lambda = 2, 3, \ldots, (r_\mu-1);\ \mu = 1, 2, \ldots, n;\ r_1+r_2+\cdots+r_n = r;\ C_1+C_2+\cdots+C_n = 0)$

Da nun in unserem Falle nach den obigen Entwickelungen die Function $\varphi(z)$ nur ***einfache*** Unendlichkeitsstellen besitzt, so sind die Grössen $C'_\mu, C''_\mu, \ldots, C_\mu^{(r_\mu-1)}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, n)$ sämmtlich gleich Null, und die Darstellung reducirt sich folgendermassen:

$$\int \varphi(z)\,dz = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} C_\mu \log\sigma(z-z_\mu)+C_0 z+C'_0.$$

Es wird daher:

$$y = c_2 e^{\int \varphi(z-c_1)dz} = c_2 \prod_{\mu=1}^{\mu=n} \sigma(z-c_1-z_\mu)^{C_\mu} e^{C_0(z-c_1)+C'_0},$$

oder, wenn wir $c_2 e^{C'_0-C_0c_1}$ durch c und die C_μ, welche nach unseren Ausführungen ganze Zahlen sind, durch p_μ ersetzen:

$$y = c e^{C_0 z}\prod_{\mu=1}^{\mu=n}\sigma(z-(z_\mu+c_1))^{p_\mu} \quad \Big(\sum_{\mu=1}^{\mu=n} p_\mu = 0\Big).$$

Hierin sind c und c_1 die willkürlichen Constanten, während C_0 einen festen bestimmbaren Werth besitzt. Die Function y ist in der That für alle endlichen Werthe von z endlich, eindeutig und stetig; der unendlich ferne Punkt ist singulärer Punkt und zwar eine Stelle der Unbestimmtheit *ohne* Verzweigung. Es lassen sich leicht die Bedingungen angeben, unter denen ***y selber eine doppeltperiodische Function ist*****). In dem eben behandelten Falle lässt sich noch etwas über die äussere Gestalt der Differentialgleichung (A.) aussagen: Da nach einem Theorem von ***Méray******) in der

*) ***Schwarz***, Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen (1883), S. 20, 21.

) Vgl. ***Schwarz*, a. a. O. S. 15.

) ***Briot et ***Bouquet***, a. a. O. S. 128, No. 50.

algebraischen Beziehung zwischen einer doppeltperiodischen Function und ihrer Ableitung der Coefficient der ersten Potenz der Ableitung verschwindet, so folgt hier, wie eine einfache Ueberlegung zeigt, *dass* y''^m *in* $F(y, y', y'')$ *nicht vorkommen darf* und demnach (vgl. S. 96) $F(y, y', y'')$, nach Potenzen von y'' geordnet, mit $y^k y''^{m-k}$ $\left(k \leqq \left[\frac{m}{2}\right]\right)$ beginnen muss*).

Es mögen nun einige Beispiele folgen, in welchen die Integrale selber doppeltperiodische Functionen sind:

(a.) $$yy''^2 - 2y'^2y'' + (1+k^2)yy'^2 - k^2y^3 = 0.$$

Diese Differentialgleichung lässt sich in der Form schreiben

$$(yy'' - y'^2)^2 = (y'^2 - y^2)(y'^2 - k^2y^2)^{**}),$$

und, wenn man durch y^4 dividirt und $\frac{y'}{y} = w$, also $\frac{y''}{y} - \frac{y'^2}{y^2} = w'$ setzt:

$$w'^2 = (w^2-1)(w^2-k^2);$$

unsere erste Bedingung ist somit erfüllt. Setzt man ferner $w = \frac{1}{v}$, so ergiebt sich:

$$v'^2 = (1-v^2)(1-k^2v^2);$$

dem Werthe $v = 0$ entspricht $v' = \pm 1$, sodass auch unsere zweite Bedingung erfüllt ist. Es ist nun

$$v = \operatorname{sinam}(z + c_1, k),$$

---

*) Aus dem Theorem von ***Méray*** lässt sich noch folgender bemerkenswerthe Schluss ziehen: Infolge dieses Theorems muss sich die Differentialgleichung (A.) auf die Form bringen lassen

$$F = (yy'' - y'^2)^{m-k} + q_1(y, y')(yy'' - y'^2)^{m-k-1} + \cdots + q_{m-k-2}(y, y')(yy'' - y'^2)^2 + q_{m-k}(y, y') = 0,$$

worin die q_i homogene Functionen $2i$ter Dimension in y und y' sind. Da also $\frac{\partial F}{\partial y''} = 0$ jedenfalls durch $yy'' - y'^2 = 0$ befriedigt wird und das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung $y = c_2 e^{c_1 z}$ (c_1 und c_2 willkürliche Constanten) ist, so besitzt, wenn

$$q_{m-k}(y, y') = a_0 y'^{2(m-k)} + a_1 y y'^{2(m-k)-1} + \cdots + a_{2(m-k)} y^{2(m-k)}$$

ist und die von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung

$$a_0 r^{2(m-k)} + a_1 r^{2(m-k)-1} + \cdots + a_{2(m-k)} = 0$$

mit $r_1, r_2, \ldots, r_s$ bezeichnet werden, die Differentialgleichung (A.) ***die Schaaren singulärer Integrale*** $y_i = c_i e^{r_i z}$ (c_i willkürliche Constante; $i = 1, 2, 3, \ldots, s$).

**) Die singulären Integrale lauten hier: $y_1 = c_1 e^z$, $y_2 = c_2 e^{-z}$, $y_3 = c_3 e^{kz}$, $y_4 = c_4 e^{-kz}$; ähnlich bei den folgenden Beispielen.

und daher

$$y = c_2 e^{\int \frac{dz}{\sin\mathrm{am}(z+c_1,\,k)}} = c\,\frac{\Delta\mathrm{am}(z+c_1,\,k)-\cos\mathrm{am}(z+c_1,\,k)}{\sin\mathrm{am}(z+c_1,\,k)}.\text{*)}$$

(b.)
$$\begin{cases} yy''^2-2y'^2y''-y^3 = 0, \\ w'^2 = w^4+1; \end{cases}$$

w ist eine sogenannte lemniskatische Function. Die Gleichung für ν lautet ebenfalls $\nu'^2 = 1+\nu^4$, sodass für $\nu = 0$ wieder $\nu' = \pm 1$ ist.

Setzt man $w = \sqrt{i}v$, so ergiebt sich:

$$iv'^2 = 1-v^4,$$

also

$$\frac{dv}{\sqrt{1-v^4}} = \frac{dz}{\sqrt{i}};$$

daher

$$v = \sin\mathrm{am}\Big(\frac{z+c_1}{\sqrt{i}},\ i\Big).$$

Nun ist bekanntlich**)

$$\int_0^z \sin\mathrm{am}(z,\ k)\,dz = \frac{1}{k}\log\frac{\Delta\mathrm{am}(z,\ k)-k\cos\mathrm{am}(z,\ k)}{1-k},$$

also, da hier $k = i$ ist, bis auf eine additive Constante:

$$\int w\,dz = \sqrt{i}\int v\,dz = i\int \sin\mathrm{am}\Big(\frac{z+c_1}{\sqrt{i}},\ i\Big)\,d\,\frac{z+c_1}{\sqrt{i}}$$
$$= \log\Big(\Delta\mathrm{am}\Big(\frac{z+c_1}{\sqrt{i}},\ i\Big)-i\cos\mathrm{am}\Big(\frac{z+c_1}{\sqrt{i}},\ i\Big)\Big).$$

Daher:

$$y = ce^{\int w\,dz} = c_2\Big[\Delta\mathrm{am}\Big(\frac{z+c_1}{\sqrt{i}},\ i\Big)-i\cos\mathrm{am}\Big(\frac{z+c_1}{\sqrt{i}},\ i\Big)\Big].$$

(c.)
$$\begin{cases} yy''^2-2y'^2y''+y^3 = 0\text{***}), \\ w'^2 = w^4-1, \quad \nu'^2 = 1-\nu^4. \end{cases}$$

Setzt man $w = iv$, so wird $v'^2 = 1-v^4$, also $v = \sin\mathrm{am}(z+c_1, i)$, und daher

$$y = ce^{\int w\,dz} = ce^{i\int \sin\mathrm{am}(z+c_1,\,i)\,dz} = c_2[\Delta\mathrm{am}(z+c_1,\ i)-i\cos\mathrm{am}(z+c_1,\ i)].$$

---

*) Vgl. z. B. *Briot* et *Bouquet*, Théorie des fonctions elliptiques (Paris, 1859), S. 186.

**) Siehe z. B. *Briot* et *Bouquet*, a. a. O. S. 185. (Théorie des fonctions elliptiques).

***) Diese Gleichung kann auch als Specialfall von (a.) (für $k = i$) betrachtet werden.

Dagegen:

$$\text{(d.)} \qquad \begin{cases} y^2y''^2-2yy'^2y''+2y'^4-y^4 = 0, \\ w'^2 = 1-w^4. \end{cases}$$

Hier ist $\nu'^2=\nu^4-1$, für $\nu=0$ also $\nu'=\pm i$, unsere zweite Bedingung daher nicht mehr erfüllt. In der That ist

$$y = ce^{\int w\,dz} = c_2[\Delta\mathrm{am}(z+c_1,\ i)-i\,\mathrm{cosam}(z+c_1,\ i)]^{-i}$$

keine eindeutige Function mehr.

2) Wenn die Gleichung (2.) für einen endlichen Werth a von w oder die Gleichung (4*.) eine Gruppe von n Wurzeln vom Werthe 0 besitzt, deren Entwickelung nach steigenden Potenzen von $(w-a)^{\frac{1}{n}}$ bez. $\nu^{\frac{1}{n}}$ mit einem Gliede vom Grade $\frac{n+1}{n}$ beginnt, während das folgende Glied $\left(\text{vom Grade } \frac{n+2}{n}\right)$ verschwindet, so ist w eine ***rationale Function***, und das allgemeine Integral der Differentialgleichung (A.) lautet zunächst:

$$y = c_2e^{\int R(z-c_1)dz},$$

worin R eine rationale Function ihres Argumentes bedeutet. Da die Function $R(x)$ nur Pole erster Ordnung besitzt, so können wir sie in der Form schreiben:

$$R(x) = G_1(x)+\sum_{\mu=1}^{\mu=n}\frac{p_\mu}{x-z_\mu},$$

und zwar sind die p_μ ganze positive oder negative Zahlen, während $G_1(x)$ eine ganze rationale Function bedeutet. Das Integral y erhält daher die Gestalt:

$$y = c_2\prod_{\mu=1}^{\mu=n}(z-(z_\mu+c_1))^{p_\mu}e^{G(z-c_1)} = c_2\Re(z-c_1)e^{G(z-c_1)},$$

worin $\Re$ eine rationale, G eine *ganze* rationale Function ihres Argumentes bedeutet. — Sind alle Wurzeln der Gleichung (4*.) von 0 verschieden, so reducirt sich $G_1(x)$ auf eine Constante, und zwar auf a (weil dann dem Werth $w=a$ der Werth $x=\infty$ entspricht; ***in dem Falle, dass $a=0$, ist y selber eine rationale Function. Damit ist ein einfaches Kriterium für die Integrirbarkeit der Differentialgleichung*** (A.) ***durch rationale Functionen gefunden.***

Beispiel:

$$F = y''^2 + 8yy'' - 4y'^2 = 0,$$

$$w' = -(w^2+4) \pm 2\sqrt{w^2+4}.$$

Die Entwickelung von w' in der Umgebung von $w = 0$ lautet für das positive Vorzeichen der Wurzel:

$$w' = -\frac{w^2}{2} - \frac{w^4}{32} + \cdots.$$

Es muss daher, da auch die übrigen Bedingungen erfüllt sind, das allgemeine Integral n. O. eine rationale Function sein. Man findet in der That:

$$w = \frac{8(z-c_1)}{4(z-c_1)^2-1},$$

und folglich:

$$y = c_2[(z-c_1)^2 - \tfrac{1}{4}].$$

Es ist bemerkenswerth, dass ausserdem *transcendente* singuläre Integrale existiren, nämlich $y = ce^{\pm 2iz}$, welche zugleich $F = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y''} = 0$ befriedigen.

3) Tritt weder der unter 1) noch der unter 2) beschriebene Fall ein, so ist w eine *einfach periodische Function**), und das Integral der Differentialgleichung (A.) hat zunächst die Form:

$$y = c_2 e^{\int \psi(z-c_1)dz},$$

worin ψ eine einfach periodische Function und zwar eine *rationale* Function der Exponentialfunction bedeutet:

$$\psi(z-c_1) = R_1\left(e^{\frac{2\pi i}{\omega}(z-c_1)}\right).$$

Setzt man

$$e^{\frac{2\pi i}{\omega}(z-c_1)} = x,$$

so wird

$$e^{\frac{2\pi i}{\omega}(z-c_1)} \cdot \frac{2\pi i}{\omega} dz = dx,$$

oder

$$dz = \frac{\omega}{2\pi i}\frac{dx}{x},$$

also

$$y = c_2 e^{\frac{\omega}{2\pi i}\int \frac{R_1(x)}{x}dx}.$$

---

*) In den Fällen 2) und 3) ist die Curve $f(u, v) = 0$ vom Geschlecht 0.

Es muss nun, da ausser dem unendlich fernen Punkte keine singulären Stellen vorhanden sind,

$$\frac{\omega}{2\pi i}\frac{R_1(x)}{x} = G_1(x)+\sum_{\varrho=1}^{\varrho=l}\frac{p_\varrho}{x-a_\varrho}+\sum_{\nu=1}^{\nu=k+1}\frac{q_\nu}{x^\nu}$$

sein, worin $G_1(x)$ eine ganze rationale Function ist, die p_ϱ ganze positive oder negative Zahlen, q_ν beliebige Grössen bedeuten und die a_ϱ von Null verschieden sind; x kann *deshalb* im Nenner in einer beliebigen Potenz und mit einem beliebigen Residuum vorkommen, weil der Werth $x=0$ nur für $z=\infty$ erreicht wird. Daher wird

$$y = c_2 x^{q_1}\prod_{\varrho=1}^{\varrho=l}(x-a_\varrho)^{p_\varrho}e^{\frac{G(x)}{x^k}},$$

worin $G(x)$ eine ganze rationale Function bedeutet, oder

$$y = c_2 e^{\frac{2\pi i}{\omega}q_1(z-c_1)}R\left(e^{\frac{2\pi i}{\omega}(z-c_1)}\right)e^{e^{-\frac{2k\pi i}{\omega}(z-c_1)}G\left(e^{\frac{2\pi i}{\omega}(z-c_1)}\right)}.$$

Der Factor $e^{e^{-\frac{2k\pi i}{\omega}(z-c_1)}G\left(e^{\frac{2\pi i}{\omega}(z-c_1)}\right)}$ stellt eine *Fourier*sche Reihe dar; R bedeutet eine rationale Function ihres Argumentes. Also y ist i. a., von einem Factor abgesehen, durch eine *Fourier*sche Reihe darstellbar, kann sich aber auch auf eine rationale Function der Exponentialfunction reduciren.

Beispiel:

$$(yy''-y'^2)^2 = y^2(y^2-y'^2)^*);$$
$$w'^2 = 1-w^2,$$
$$w = \cos(z-c_1),$$
$$y = c_2 e^{\sin(z-c_1)}.$$

II.

In dem zweiten Theile dieser Abhandlung dehnen wir unsere Untersuchung auf den Fall aus, dass die unabhängige Veränderliche z in der vorgelegten Differentialgleichung explicite enthalten ist, also auf die Differentialgleichung

(B.) $$F(z, y, y', y'') = 0,$$

in welcher F eine ganze rationale homogene Function $m$ter Dimension von

*) Als singuläre Integrale erhält man wieder $ce^{\pm z}$. Vgl. *Appell,* Sur les invariants des équations différentielles. Journ. de Mathémat. par *Liouville* (1889), 4. Série, V, p. 419.

y, y', y'' bedeutet, deren Coefficienten analytische Functionen von z sind. Wir dividiren wieder durch y^m, wodurch die Differentialgleichung (B.) übergehen möge in

$$(9.) \qquad f\left(z, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}\right) = 0,$$

und setzen $\frac{y'}{y} = w$, also $\frac{y''}{y} = w' + w^2$, so erhalten wir:

$$(10.) \qquad f(z, w, w' + w^2) = g(z, w, w') = 0.$$

Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung hat die Form:

$$w = \varphi(z, c_1),$$

worin c_1 die willkürliche Constante bedeutet, also das allgemeine Integral von (B.):

$$y = c_2 e^{\int \varphi(z, c_1)\, dz}.$$

Damit nun zunächst die Verzweigungspunkte desselben von c_1 unabhängig seien, muss die Differentialgleichung (B.) ***nothwendig*** den ***Fuchs***schen Bedingungen genügen*); die „festen" Verzweigungsstellen von w werden dann auch feste Verzweigungsstellen von y sein.

Wenn ferner die Unbestimmtheitsstellen des Integrals y von den Anfangswerthen unabhängig sein sollen**), so darf nach unseren früheren Auseinandersetzungen (vgl. S. 91) und nach den Entwickelungen von Herrn ***Fuchs*** (l. c.) nicht ein ***beliebiger*** Punkt $z = z_0$ ein derartiger Pol von φ sein, dass $(z - z_0)\varphi(z)$ für $z = z_0$ unendlich wird***). Zum Zwecke dieser Untersuchung setzen wir daher in

$$(10.) \qquad g(z, w, w') = 0$$

$w = \frac{1}{v}$, $w' = -\frac{1}{v^2} v'$; die Gleichung (10.) geht dann über in

$$(11.) \qquad h(z, v, v') = 0,$$

und wir haben dieselbe für $v = 0$ zu betrachten. Die Entwickelung von v' in der Umgebung von $v = 0$ und eines ***beliebigen*** für die Coefficienten der

---

*) Sitzungsberichte der Berliner Akademie, 1884 (26. Juni), S. 699. Vgl. auch meine Dissertation, S. 5 u. f.

) Die Stellen der Unbestimmtheit von w sind (vgl. Einleitung, S. 88) ***eo ipso fest;* diese werden dann i. a. auch zu den ***festen*** Unbestimmtheitsstellen von y gehören.

***) D. h. genauer, man darf c_1 in $\varphi(z, c_1)$ nicht so bestimmen können, dass $(z - z_0)\varphi(z, c_1)$ für $z = z_0$ unendlich wird.

Differentialgleichung (10.) *nicht* singulären Punktes $z = z_0$ möge lauten:

$$v' = a_0 v^{\frac{k}{l}} + a_1 v^{\frac{k+1}{l}} + \cdots \quad (k \text{ ganze}, l \text{ ganze positive Zahl}),$$

worin die Coefficienten a_i convergente, nach ganzen positiven Potenzen von $z - z_0$ fortschreitende Potenzreihen bedeuten; z_0 möge so gewählt sein, dass a_0 für $z = z_0$ *nicht* verschwindet. Setzt man $v = t^l$, also $v' = l t^{l-1} t'$, so erhält man:

$$l t^{l-1} t' = a_0 t^k + a_1 t^{k+1} + \cdots,$$

also

$$\frac{dt}{dz} = \frac{a_0}{l} t^{k-l+1} + \frac{a_1}{l} t^{k-l+2} + \cdots.$$

Man kann $k < l$ voraussetzen, weil sonst aus dieser Gleichung $t = 0$, also auch $v = 0$ als einziges *entwickelbares* Integral sich ergeben würde, das für $z = z_0$ verschwindet*). Dann ist

$$\frac{dz}{dt} = \frac{l t^{l-1}}{a_0 t^k + a_1 t^{k+1} + \cdots} = \frac{l}{a_0} t^{l-1-k} + \cdots;$$

darin hat $\frac{l}{a_0}$ für $z = z_0$ einen endlichen, von Null verschiedenen Werth, und es ist der Voraussetzung gemäss $l - 1 - k \geqq 0$. Daraus ergiebt sich in bekannter Weise:

$$z - z_0 = b_0 t^{l-k} + b_1 t^{l-k+1} + \cdots,$$

worin die b_0, b_1, ... Constanten bedeuten; also

$$t = c_0 (z - z_0)^{\frac{1}{l-k}} + \cdots,$$

und

$$v = c_0 (z - z_0)^{\frac{l}{l-k}} + \cdots;$$

folglich

$$w = \frac{1}{v} = \frac{1}{c_0} (z - z_0)^{\frac{l}{k-l}} + \cdots.$$

Soll daher nicht der willkürliche Punkt $z = z_0$ Punkt der Unbestimmtheit von y sein, so muss $(z - z_0) w$ einen endlichen Werth besitzen, d. h. es muss

$$\frac{l}{k-l} + 1 = \frac{k}{k-l} \geqq 0,$$

*) Vgl. ***Fuchs,*** Ueber die Werthe, welche die Integrale einer Differentialgleichung erster Ordnung in singulären Punkten annehmen können, Sitzungsber. der Berl. Akad., 1886, (11. März), S. 279 ff. ***Hamburger,*** Ueber die singulären Lösungen der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung, dieses Journal, Bd. 112, S. 211.

also, da $k < l$ vorausgesetzt war:

$$k \leqq 0$$

sein. Da ferner der Fall $k < 0$ sich nicht mit den *Fuchs*schen Bedingungen verträgt, wonach in der transformirten Differentialgleichung (11.) $h(z, \nu, \nu') = 0$ ν' für einen endlichen Werth von ν, also auch für $\nu = 0$ *nicht unendlich* werden darf, so bleibt als Bedingung $k = 0$; d. h. *ν' muss für $\nu = 0$ von 0 verschieden sein, und $\nu = 0$ darf alsdann nach den Fuchsschen Bedingungen, da es kein Integral der Differentialgleichung* (11.) *ist, kein Verzweigungspunkt der algebraischen Function ν' sein.*

Nach den obigen Ausführungen muss die Gleichung

$$(11^*.) \qquad h(z,\ 0,\ \nu') = 0$$

lauter von 0 verschiedene Wurzeln ν' besitzen, es sei denn, dass ν' mindestens vom ersten Grade in Bezug auf ν verschwindet; dieselben können von z abhängig oder unabhängig sein:

1) Es sei eine Wurzel $\nu' = a_0$ der Gleichung (11*.) von z abhängig, dann können wir den *willkürlichen* Punkt z_0 so wählen, dass $a_0(z_0)$ *nicht* verschwindet; die Entwickelung von ν' lautet dann:

$$\nu' = a_0(z_0) + a_0'(z_0)(z - z_0) + \cdots + a_1\nu + a_2\nu^2 + \cdots.$$

Daraus ergiebt sich:

$$\nu = a_0(z_0)(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + b_3(z - z_0)^3 + \cdots,$$

wo $b_2, b_3, \ldots$ Constanten sind, also

$$w = \frac{1}{\frac{a_0(z_0)}{z - z_0}} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots,$$

und daher

$$y = (z - z_0)^{\frac{1}{a_0(z_0)}}\, e^{P(z - z_0)},$$

worin P eine convergente, nach ganzen *positiven* Potenzen von $z - z_0$ aufsteigende Potenzreihe bedeutet. In diesem Falle ist daher der willkürliche Punkt $z = z_0$ für das Integral y zwar kein Punkt der Unbestimmtheit, dagegen i. a. *Verzweigungsstelle,* und zwar ist *auch die Art der Verzweigung von der Wahl der Anfangswerthe abhängig; eine Abhängigkeit dieser Art, dass nämlich auch die Art der Verzweigung in den beweglichen Verzweigungsstellen sich mit den Anfangswerthen stetig ändert, tritt bei den Differentialgleichungen erster Ordnung noch nicht auf und ist daher für die nichtlinearen*

Differentialgleichungen höherer Ordnung als charakteristisch anzusehen. — Ist übrigens $a_0(z_0)$ eine complexe Grösse, so ist der Punkt z_0 für y, wie Herr ***Fuchs*** (Ueber die Werthe etc., a. a. O., S. 295) zeigt, genau genommen sogar ein Punkt der Unbestimmtheit.

Wir bemerken noch, dass die Nullstellen von $a_0(z)$ zu den *festen* Punkten der Unbestimmtheit von y gehören; denn es verschwinde $a_0(z)$ für $z=b$ von der $k$ten Ordnung, also:

$$a_0(z) = (z-b)^k P(z-b) \quad (P(0) \neq 0);$$

dann folgt aus

$$v' = (z-b)^k P(z-b) + a_1 v + \cdots \text{*)},$$

dass

$$v = c_{k+1}(z-b)^{k+1} + c_{k+2}(z-b)^{k+2} + \cdots,$$

also

$$w = \frac{c_{-k-1}}{(z-b)^{k+1}} + \frac{c_{-k}}{(z-b)^k} + \cdots,$$

und daher

$$y = e^{\int \left(\frac{c_{-k-1}}{(z-b)^{k+1}} + \frac{c_{-k}}{(z-b)^k} + \cdots\right) dz} = e^{-\frac{\frac{1}{k} c_{-k-1}}{(z-b)^k} - \cdots}$$

ist; $z=b$ ist in der That Punkt der Unbestimmtheit von y. Es ist bemerkenswerth, dass ein Theil der Particularintegrale y keine Unbestimmtheitsstellen zu besitzen braucht, während dies bei anderen der Fall ist, nämlich bei denen mit den Anfangswerthen $z=b$, $\frac{y'}{y} = \infty$ $(v=0)$.

Beispiel:

$$yy'' + p(z)y'^2 = 0,$$

$$v' = 1 + p(z),$$

$$v = \frac{1}{w} = \int (1+p(z))\,dz + c_1,$$

$$y = c_2 e^{\int w\,dz} = c_2 e^{\int \frac{dz}{\int (1+p(z))\,dz + c_1}}.$$

---

*) Sollte einer der Coefficienten a_i für $z=b$ unendlich werden, so ist $z=b$ ebenfalls i. a. ein singulärer Punkt für das Integral y; seine nähere Beschaffenheit ergiebt sich aus den Untersuchungen von ***Briot*** und ***Bouquet*** (Journ. de l'école polytechn. cah. 36, p. 133 ff.) sowie von ***Picard*** und ***Poincaré*** (Compt. rend. 1878; Journ. de l'école polytechn. cah. 45).

Um ein Particularintegral mit den Anfangswerthen $z = z_0$, $\frac{y'}{y} = \infty$ in der Umgebung eines Punktes $z = z_0$, für welchen $p(z)$ einen endlichen Werth hat, zu entwickeln, kann man auch direct ansetzen:

$$\begin{aligned} y &= (z-z_0)^\alpha \mathfrak{P}(z-z_0) \quad (\alpha \neq 0), \\ y' &= \alpha(z-z_0)^{\alpha-1}\mathfrak{P} + (z-z_0)^\alpha \mathfrak{P}', \\ y'' &= \alpha(\alpha-1)(z-z_0)^{\alpha-2}\mathfrak{P} + \cdots; \end{aligned}$$

es sei

$$p(z) = p(z_0) + p'(z_0)(z-z_0) + \cdots,$$

dann ergiebt sich für α die Gleichung

$$\alpha(\alpha-1) + \alpha^2 p(z_0) = 0,$$

und, da α von Null verschieden vorausgesetzt war:

$$\alpha = \frac{1}{1+p(z_0)};$$

in der That ist hier $a_0(z) = 1+p(z)$. — Verschwindet $p(z)$ für $z = z_0$, so wird $\alpha = 1$; in diesem Falle ist y in der Umgebung von z_0 eindeutig. Ist $p(z_0) = -1$, so ist $a_0(z) = 0$, also n. O. z_0 ein Punkt der Unbestimmtheit für die Integrale y mit den Anfangswerthen $z = z_0$, $\frac{y'}{y} = \infty$.

So lautet z. B. das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$yy'' + (2z-1)y'^2 = 0:$$

$$y = c_2 e^{\int \frac{dz}{z^2 - c_1^2}} = c_2 \left(\frac{z-c_1}{z+c_1}\right)^{\frac{1}{2c_1}};$$

also die Entwickelung der Particularintegrale mit den Anfangswerthen $z = z_0$, $\frac{y'}{y} = \infty$ in der Umgebung des beliebigen Punktes z_0:

$$y = c_2 \left(\frac{z-z_0}{z+z_0}\right)^{\frac{1}{2z_0}} = (z-z_0)^{\frac{1}{2z_0}} \mathfrak{P}(z-z_0);$$

ferner derjenigen mit den Anfangswerthen $z = \frac{1}{2}$, $\frac{y'}{y} = \infty$ in der Umgebung von $z = \frac{1}{2}$:

$$y = c_2 \frac{z-\frac{1}{2}}{z+\frac{1}{2}} = (z-\tfrac{1}{2})\mathfrak{P}(z-\tfrac{1}{2});$$

endlich derjenigen mit den Anfangswerthen $z = 0$, $\frac{y'}{y} = \infty$ in der Umgebung

von $z = 0$, da, wenn $\frac{y'}{y} = \frac{1}{z^2 - c_1^2}$ für $z = 0$ unendlich gross werden soll, $c_1 = 0$ sein muss:

$$y = c_2 e^{-\frac{1}{z}}.$$

2) Die Gleichung (11*.) sei bis auf einen nur z enthaltenden Factor von z unabhängig; dann sind alle Wurzeln ν' derselben von z unabhängig, und für die von Null verschiedenen folgt aus der Entwickelung

$$\nu' = a_0 + a_1(z)\nu + a_2(z)\nu^2 + \cdots,$$

in welcher a_0 von Null verschieden und von z unabhängig ist, ähnlich wie vorher:

$$y = (z - z_0)^{\frac{1}{a_0}} e^{P(z-z_0)}.$$

In diesem Falle ist der willkürliche Punkt $z = z_0$ zwar ebenfalls Verzweigungspunkt von y, — es sei denn, dass $\frac{1}{a_0}$ gleich einer ganzen Zahl p ist —, aber die Art der Verzweigung ist von der Wahl der Anfangswerthe unabhängig.

Das Ergebniss unserer Untersuchung lässt sich nunmehr folgendermassen aussprechen:

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die entwickelbaren Integrale der Differentialgleichung (B.) *feste singuläre Punkte besitzen, sind die folgenden*:

1) *Die Differentialgleichung* (10.) *muss den Fuchsschen Bedingungen genügen.*

2) *Die Wurzeln ν' der Gleichung* (11*.) *müssen von z unabhängig und zwar, falls sie nicht mindestens vom ersten Grade in Bezug auf ν verschwinden, reciproke Werthe ganzer Zahlen sein.*

Ueber die äussere Gestalt der Differentialgleichung (B.) lassen sich aus diesen Bedingungen ähnliche Schlüsse ziehen wie im ersten Theile dieser Abhandlung über (A.). — Die *festen Verzweigungsstellen* der Integrale von (B.) sind diejenigen der Integrale von (10.) sowie diejenigen festen Pole erster Ordnung der letzteren, deren Residuen keine ganzen Zahlen sind; die Art der Verzweigung kann dabei von der Wahl der Anfangswerthe abhängig oder unabhängig sein. Die *festen Unbestimmtheitsstellen* der Integrale von (B.) sind diejenigen der Integrale von (10.) sowie die festen Pole *höherer* als erster Ordnung der letzteren.

Beispiele:

(a.) $$\begin{cases} yy''-y'^2+\frac{1}{z}yy' = 0, \\ y = c_2 z^{c_1}. \end{cases}$$

Die „festen" Punkte $z=0$ und $z=\infty$ sind Verzweigungsstellen; die Art der Verzweigung ist von der Wahl der Anfangswerthe abhängig.

(b.) $$\begin{cases} yy''-y'^2+\frac{1}{2z^2}y^2 = 0, \\ y = c_2 z^{\frac{1}{2}} e^{c_1 z}. \end{cases}$$

Der Punkt $z=0$ ist algebraische Verzweigungsstelle; die Art der Verzweigung ist von der Wahl der Anfangswerthe unabhängig. Der unendlich ferne Punkt ist, wenn $c_1 \neq 0$, ein Punkt der Unbestimmtheit mit bestimmter algebraischer Verzweigung.

(c.) $$\begin{cases} yy''-y'^2-\frac{1}{z}y^2 = 0, \\ y = c_2 z^z e^{c_1 z}. \end{cases}$$

Der Nullpunkt ist *logarithmische Verzweigungsstelle*; $z=\infty$ ist wieder Punkt der Unbestimmtheit mit bestimmter (logarithmischer) Verzweigung.

(d.) $$\begin{cases} yy''-y'^2+\frac{2}{z}yy' = 0, \\ y = c_2 e^{\frac{c_1}{z}}. \end{cases}$$

Der Nullpunkt ist ein Punkt der Unbestimmtheit. Aehnlich:

(e.) $$\begin{cases} yy''-y'^2-\frac{2}{z^3}y^2 = 0, \\ y = c_2 e^{\frac{1}{z}+c_1 z}. \end{cases}$$

Hier sind $z=0$ und $z=\infty$ Unbestimmtheitsstellen ohne Verzweigung. Dagegen:

(f.) $$\begin{cases} yy''-\frac{z-1}{z}y'^2 = 0, \\ y = c_2 e^{\int \frac{dz}{\log z+c_1}}. \end{cases}$$

(g.) $$\begin{cases} yy''-\frac{z^3-2}{z^3}y'^2 = 0, \\ y = c_2\left(\frac{z-c_1}{z+c_1}\right)^{\frac{c_1^3}{2}} e^{c_1^2 z}. \end{cases}$$

Bei den Integralen von (f.) und (g.) verschieben sich die singulären Punkte mit den Anfangswerthen, weil die Wurzeln ν' der Gleichung (11*.) von z abhängig sind.

Wie ich in meiner Arbeit „Beitrag zum Studium der Differentialgleichungen etc." (Zeitschr. für Math. u. Phys., XXXV, 6; S. 340) gezeigt habe, ist das Geschlecht der durch die Gleichung (10.) definirten algebraischen Function w' von w: $p \leqq (m-1)^2$. — Ferner kann man nach den Untersuchungen von Herrn *Poincaré* (Acta Math., 7 : 1, S. 1: „Sur un théorème de M. *Fuchs*") drei Fälle unterscheiden, je nachdem $p = 0$, $p = 1$ oder $p > 1$ ist: Im ersten Falle lässt sich die Differentialgleichung (10.) durch Lösung einer *Riccati*schen Differentialgleichung*), im zweiten durch

*) Als Beispiel hierzu möge diejenige Differentialgleichung (B.) behandelt werden, deren zugehörige Differentialgleichung (10.) *selber eine Riccatische ist.* Da in diesem Falle y'' in (B.) nur zur ersten Potenz erhoben vorkommen darf, so lautet diese Gleichung zunächst (vgl. S. 96):

$$yy''+p_1y'^2+p_2yy'+p_3y^2 = 0,$$

und die Gleichung (10.):

$$w'+(1+p_1)w^2+p_2w+p_3 = 0.$$

Dieselbe lässt sich bekanntlich durch die Substitution $w = \frac{1}{1+p_1}\frac{u'}{u}$ auf die lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$u''+\left(-\frac{p_1'}{1+p_1}+p_2\right)u'+(1+p_1)p_3u = 0$$

zurückführen; es seien u_1 und u_2 zwei Fundamentalintegrale derselben, so ist:

$$w = \frac{1}{1+p_1}\frac{u_1'+c_1u_2'}{u_1+c_1u_2}, \quad \text{also:} \quad y = c_2e^{\int \frac{1}{1+p_1}\frac{u_1'+c_1u_2'}{u_1+c_1u_2}dz}.$$

Die Gleichung (11.) lautet hier:

$$v' = 1+p_1+p_2v+p_3v^2;$$

soll daher auch unsere zweite Bedingung erfüllt sein, so muss $1+p_1$ von z unabhängig, und zwar gleich dem reciproken Werth einer ganzen Zahl n, also $p_1 = \frac{1}{n}-1$ sein. In diesem Falle lautet das Integral

$$y = c_2(u_1+c_1u_2)^n.$$

Die nte Potenz des allgemeinen Integrals einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung $u''+p_2u'+p_3u = 0$ ist also das allgemeine Integral der quadratischen homogenen Differentialgleichung $yy''+\left(\frac{1}{n}-1\right)y'^2+p_2yy'+np_3y^2 = 0$, wovon man sich durch Ausführung der Substitution $y = u^n$ in einer der beiden Differentialgleichungen auch leicht direct überzeugt.

Quadraturen integriren. Im dritten Falle endlich, der das grösste Interesse darbietet, ist das allgemeine Integral von (10.) ***algebraisch***, falls die vorgelegte Differentialgleichung (B.) auch in z algebraisch ist, also ***das Integral von*** (B.) ***die Exponentialfunction eines Abelschen Integrals:***

$$(12.) \qquad y = c_2 e^{\int w(z, c_1)\, dz};$$

w ist durch eine algebraische Gleichung

$$(13.) \quad \begin{cases} G(w, z, c_1) = \varphi(z)\varphi_0(z, c_1)w^n + \varphi_1(z, c_1)w^{n-1} + \cdots \\ \qquad\qquad + \varphi_{n-1}(z, c_1)w + \varphi_n(z, c_1) = 0 \end{cases}$$

definirt, in welcher die φ_i ganze rationale Functionen ihrer Argumente bedeuten. Die Gleichung (13.) hat, wenn die vorgelegte Differentialgleichung (B.) den aufgestellten Bedingungen genügt, folgende Eigenschaften: 1) Die Entwickelung von w nach steigenden Potenzen von $z-\psi(c_1)$, wo $\psi(c_1)$ eine Wurzel z der Gleichung $\varphi_0(z, c_1) = 0$ bedeutet, beginnt mit $k(z-\psi(c_1))^{-1}$, wobei k eine ganze positive oder negative Zahl ist. 2) Die Discriminante der durch (13.) definirten algebraischen Function w von z und c_1, d. h. die Eliminationsresultante von w aus $G = 0$ und $\frac{\partial G}{\partial w} = 0$ lautet:

$$\Delta = D(z).D_1(z, c_1) = 0,$$

worin $D(z)$ von c_1 unabhängig ist; die durch $D_1(z, c_1) = 0$ gegebenen Wurzeln $z = \chi(c_1)$ liefern keine Verzweigungspunkte von w. — In dem Integral (12.) sind daher die Verzweigungsstellen des als Exponent von e auftretenden *Abel*schen Integrales sowie die algebraischen Pole der etwa in demselben enthaltenen Integrale zweiter Gattung von den Anfangswerthen unabhängig, während die logarithmischen Unendlichkeitsstellen der etwaigen Integrale dritter Gattung sich mit denselben verschieben können; in der Umgebung einer solchen Stelle lautet die Entwickelung von (12.):

$$y = c_2(z-\psi(c_1))^k \mathfrak{P}(z-\psi(c_1)),$$

wo k eine ganze Zahl ist und $\mathfrak{P}$ eine nach ganzen positiven Potenzen von $z-\psi(c_1)$ aufsteigende, in gewissen Grenzen convergente Potenzreihe bedeutet, deren Coefficienten von c_1 abhängen. Als Beispiel möge die Integralfunction $y = c_2 e^{\int \frac{G(z, c_1)}{\sqrt{R(z)}} dz}$ angeführt werden, worin $R(z)$ eine ganze rationale Function $2n$ten Grades, $G(z, c_1)$ eine solche höchstens $(n-2)$-ten Grades in z bedeutet. Da der Exponent von e ein hyperelliptisches Integral erster

Gattung ist, so sind hier überhaupt keine Unendlichkeitsstellen, weder algebraische noch logarithmische, vorhanden, und die Verzweigungspunkte sind von c_1 unabhängig.

Das Wichtigste bei diesem dritten Falle ist aber, dass w als algebraische Function von z ausser algebraischen Verzweigungsstellen *selber keine* Singularitäten besitzt, sodass die Entwickelung des Integrales (12.) in der Umgebung einer der ***festen Unbestimmtheitsstellen*** z_i, welche die Wurzeln von $\varphi(z) = 0$ sind, folgendermassen lautet:

$$y = c_2 e^{\sum_{k=1}^{k=l_i} \frac{r_{ik}}{(z-z_i)^{\lambda_{ik}}}} (z-z_i)^{\mu_i} P(z-z_i);$$

darin sind die λ_{ik} positive rationale Zahlen, die r_{ik} und μ_i beliebige Grössen, während $P(z-z_i)$ eine nach positiven, ganzen oder gebrochenen Potenzen von $z-z_i$ fortschreitende, in einem hinreichend kleinen Bereich convergirende Potenzreihe bedeutet; ist z_i nicht gleichzeitig eine Wurzel von $D(z) = 0$, so sind die λ_{ik} *ganze* Zahlen, und $P(z-z_i)$ schreitet nach *ganzen* Potenzen von $z-z_i$ fort. — Es kann auch y *selber eine algebraische Function von* z sein, nämlich dann, wenn $\int w\,dz$ der *Logarithmus einer algebraischen Function* ist; die Bedingung dafür hat *Abel* aufgestellt: es muss dann nämlich $\int w\,dz = \frac{1}{\delta} \log R(z, w)$ sein, worin R eine rationale Function ihrer Argumente und δ eine ganze Zahl bedeutet (vgl. *Königsberger*, Allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen (1882), S. 123).

Eine Ausdehnung der vorliegenden Abhandlung in der Richtung der *Painlevé*schen Untersuchungen behalte ich mir vor.

Ueber die Zurückführung der Divisorensysteme auf ihre reducirte Form.

(Zweite Abhandlung.)

(Von Herrn *Kurt Hensel*.)

In einer kürzlich in diesem Journale veröffentlichten Abhandlung*) habe ich gezeigt, dass jedes Modulsystem $(F_1(x), F_2(x), \ldots, F_\mu(x))$ einem eindeutig bestimmten, sog. *reducirten* Systeme äquivalent ist, und damit die Frage, unter welchen Bedingungen zwei derartige Systeme:

$$(F_1(x), \ldots, F_\mu(x)) \quad \text{und} \quad (G_1(x), \ldots, G_\nu(x))$$

äquivalent sind, durch den folgenden Satz beantwortet:

> Zwei Modulsysteme sind dann und nur dann äquivalent, wenn die zugehörigen reducirten Systeme identisch sind.

In jener Arbeit wurde aber kein Verfahren angegeben, um das zu einem beliebig gegebenen Systeme gehörige reducirte System wirklich zu finden, und daher sind, solange ein solches Verfahren fehlt, die dort gefundenen Resultate praktisch unbrauchbar. In dieser Arbeit will ich daher ein endliches und leicht anwendbares Verfahren auseinandersetzen, um diese Ueberführung eines beliebig gegebenen Divisionssystemes in seine reducirte Form wirklich durchzuführen.

1.

Es sei

$$(M) = (F_1(x), F_2(x), \ldots, F_\mu(x))$$

ein Modulsystem, dessen Elemente $F_i(x)$ beliebige ganze ganzzahlige Functionen von x sind. Da man zunächst einzig und allein durch Anwendung des Euklidischen Verfahrens den grössten gemeinsamen Theiler jener μ

*) *K. Hensel,* Ueber die Zurückführung der Divisorensysteme auf eine reducirte Form, erste Abhandlung; dieses Journal, Bd. 118 S. 234—251.

Functionen finden, und ihn dann durch einfache Division beseitigen kann, so will ich von vornherein annehmen, dass diese Elemente keinen Theiler dieser Art besitzen. Ein solches System nenne ich nach *Kronecker* ein *reines Divisorensystem zweiter Stufe.*

Haben nun $F_1(x), \ldots, F_\mu(x)$ keinen gemeinsamen Theiler, so kann man wieder allein durch das Euklidische Verfahren μ ganze Functionen von x so bestimmen, dass die Gleichung:

$$\varphi_1(x)F_1(x)+\varphi_2(x)F_2(x)+\cdots+\varphi_\mu(x)F_\mu(x) = 1$$

identisch erfüllt ist, jedoch werden die Zahlencoefficienten jener Functionen im allgemeinen rationale Brüche sein. Multiplicirt man aber diese Gleichung mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen m aller in ihr auftretenden Nenner, so erhält man eine neue Gleichung:

$$(1.) \qquad \Phi_1(x)F_1(x)+\Phi_2(x)F_2(x)+\cdots+\Phi_\mu(x)F_\mu(x) = m,$$

in der die Coefficienten $\Phi_i(x)$ jetzt ganz *und* ganzzahlig sind, und aus ihr geht hervor, dass das ursprüngliche System (M) dem neuen:

$$(m, F_1(x), F_2(x), \ldots, F_\mu(x))$$

äquivalent ist, weil die hinzugefügte ganze Zahl m nach (1.) durch das System (M) theilbar ist. Ist nun:

$$m = p^a q^b \ldots r^c$$

die Zerlegung von m in seine Primzahlpotenzen, so folgt aus der Aequivalenz:

$$(2.) \quad (m, \ldots, F_i(x)\ldots) = (p^a, \ldots, F_i(x)\ldots)(q^b, \ldots, F_i(x)\ldots)\ldots(r^c, \ldots, F_i(x)\ldots),$$

dass die Reduction der allgemeinen Modularsysteme (M) zurückgeführt ist auf die Betrachtung der Systeme:

$$(3.) \qquad (M_a) \backsim (p^a, F_1(x), \ldots, F_\mu(x))$$

welche sich von dem ursprünglichen nur dadurch unterscheiden, dass seinen Elementen noch die Potenz einer Primzahl hinzugefügt ist, welche durch das soeben auseinandergesetzte Verfahren rational bestimmt wurde.

Aber diese Systeme (M_a) können nun weiter in das Product von noch einfacheren Systemen zerlegt werden; hierzu führt die folgende Betrachtung: Von den Elementen $F_1(x), \ldots, F_\mu(x)$ muss mindestens eins, etwa $F_1(x)$ durch p nicht theilbar sein, da sonst alle Elemente den gemeinsamen Theiler p besässen, also (M) kein reines Divisorensystem wäre. Denkt man sich nun $F_1(x)$ modulo p in seine irreductiblen Factoren zerlegt, so

ergiebt sich eine Gleichung von der Form:

$$F_1(x) = P^a P_1^{a_1} \cdots - p\bar{F}_1(x)$$

aus welcher hervorgeht, dass die Differenz auf der rechten Seite durch das Divisorensystem (M) also a fortiori durch (M_a) theilbar ist. Erhebt man nun beide Seiten der aus dieser Identität folgenden Congruenz:

$$P^a P_1^{a_1} \ldots \equiv p\bar{F}_1 \pmod{M_a}$$

zur $a$ten Potenz, so wird auch ihre rechte Seite $p^a.\bar{F}_1^a$ durch (M_a) theilbar; setzt man also links zur Abkürzung $a\alpha = b$, $a\alpha_1 = b_1$, ... so erhält man:

$$P^b P_1^{b_1} \ldots \equiv 0 \pmod{M_a},$$

d. h. es kann das Product $P^b P_1^{b_1} \ldots$ den Elementen des Systemes hinzugefügt werden, ohne es im Sinne der Aequivalenz zu ändern. Da aber die Functionen P^b, $P_1^{b_1}$, ..., modulo p theilerfremd sind, so erhält man hieraus die folgende Zerlegung von (M_a):

$$(M_a) \backsim (p^a,\ F_1 \ldots F_\mu,\ P^b P_1^{b_1} \ldots) \backsim (p^a,\ F_1 \ldots F_\mu,\ P^b)(p^a,\ F_1 \ldots F_\mu,\ P_1^{b_1}) \ldots,$$

in welcher sich die Factoren auf der rechten Seite nur dadurch von dem ursprünglichen Systeme (M) unterscheiden, dass seinen Elementen als Zahlenelement eine Primzahlpotenz p^a und als primitives Element die Potenz einer modulo p irreductiblen Function hinzugefügt sind, welche beide allein durch Anwendung des Euklidischen Verfahrens bestimmt werden können. Im Folgenden brauchen daher nur diese Factoren von (M) weiter untersucht und in ihre reducirte Form übergeführt zu werden, und dies ist die eigentliche Aufgabe der vorliegenden Arbeit.

§ 2.

Es sei jetzt

(4.) $$(\Pi) = (p^a,\ F_1(x),\ \ldots,\ F_\mu(x),\ P^b)$$

ein System der am Ende des vorigen Abschnittes angegebenen Art, in welchem also p^a eine beliebige Primzahlpotenz und

$$P(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c_n$$

irgend eine modulo p irreductible ganzzahlige Function von x bedeutet, in welcher der Coefficient der höchsten Potenz von x offenbar gleich Eins angenommen werden kann.

Die einfachsten Systeme dieser Art sind von der Form:

(4^a.) $$(\bar{\Pi}) = (p,\ P(x));$$

für sie ist also $a = b = 1$ und $\mu = 0$. Mit ihnen haben sich die Mathematiker schon sehr oft beschäftigt, und *Leopold Kronecker* hat bereits gezeigt, dass ihnen und ihnen allein diejenige Eigenschaft zukommt, welche in der reinen Zahlentheorie für die Primzahlen charakteristisch ist, dass nämlich eine beliebig gegebene Function $F(x)$ entweder durch (Π) theilbar, oder zu $(\overline{\Pi})$ relativ prim ist, dass also stets:

$$(F(x),\ \overline{\Pi}) \sim 1 \quad \text{oder} \quad \sim (\overline{\Pi})$$

sein muss. Aus diesem Grunde sollen diese einfachsten Systeme im Anschlusse an ***Kronecker Primdivisoren*** oder ***Primmodulsysteme*** genannt werden.

Die Systeme (4.) sind also im allgemeinen keine Primdivisoren $(\overline{\Pi})$, aber sie haben die charakteristische Eigenschaft, dass sie, falls sie nicht äquivalent Eins, also überhaupt keine Divisorensysteme sind, stets einen und auch nur einen Primdivisor dieser Art als Theiler enthalten. In der That beweist man zunächst leicht die Richtigkeit des folgenden Satzes:

> Ein Modulsystem $(\Pi) = (p^a,\ F(x),\ P^b)$ ist dann und nur dann äquivalent Eins, wenn $F(x)$ durch den zugehörigen Primdivisor $(\overline{\Pi}) = (p,\ P)$ nicht theilbar ist.

Ist nämlich $F(x)$ durch $(p,\ P)$ divisibel, so gilt dasselbe auch von dem System (Π), da dann seine drei Elemente den Primdivisor $(\overline{\Pi})$ enthalten; dann kann also (Π) nicht äquivalent Eins sein. Ist dagegen $F(x)$ durch den Primdivisor $(\overline{\Pi})$ nicht theilbar, ist also:

$$(F(x),\ p,\ P(x)) \sim 1$$

so gilt dasselbe auch von jeder Potenz dieses Systemes; insbesondere ist also:

$$(F,\ p,\ P)^{a+b} \sim (\ldots F^\lambda p^\mu P^\nu \ldots) \sim 1. \qquad (\lambda+\mu+\nu = a+b)$$

Diese Potenz ist aber durch $(\Pi) = (F,\ p^a,\ P^b)$ theilbar, denn jedes seiner Elemente $F^\lambda p^\mu P^\nu$ ist für $\lambda > 0$ ein Multiplum von F, dagegen für $\lambda = 0$ also $\mu+\nu = a+b$ entweder durch p^a oder durch P^b theilbar, je nachdem $\mu \geqq a$ oder $\mu < a,\ \nu > b$ ist. Also ist unter dieser Voraussetzung in der That $(\Pi) \sim 1$, w. z. b. w. Hieraus folgt aber weiter der Satz:

> Ein beliebig gegebenes System:
>
> $$(\Pi) = (p^a,\ F_1 \ldots F_\mu,\ P^b)$$
>
> ist dann und nur dann nicht äquivalent Eins, wenn alle seine Elemente $F_i(x)$ den zugehörigen Primdivisor $(\overline{\Pi}) = (p,\ P)$ enthalten, wenn also (Π) durch $(\overline{\Pi})$ theilbar ist.

Andererseits enthält aber (Π) auch keinen einzigen anderen Primfactor $(\overline{\Pi_1}) \sim (p_1, P_1(x))$, für welchen beide Elemente p_1, P_1 oder auch nur eins von denen von $(\overline{\Pi})$ verschieden sind, denn dann ist ja $(\overline{\Pi_1})$ nicht einmal in den beiden Elementen (p^a, P^b) von (Π) enthalten. Aus diesem Grunde sollen die Systeme (Π) in (4.) *einfache Divisoren- oder Modulsysteme* genannt werden.

Hiernach können in der im ersten Abschnitte dieser Abhandlung durchgeführten Zerlegung alle und nur die einfachen Systeme $(p^a, F_1 \ldots F_\mu, P^b)$ fortgelassen werden, für welche auch nur ein Element $F_i(x)$ durch den zugehörigen Primtheiler $(\overline{\Pi}) = (p, P(x))$ nicht theilbar ist. Das Resultat jenes ersten Abschnittes kann dann in dem Satze ausgesprochen werden:

> Jedes reine Modulsystem zweiter Stufe kann auf rationalem Wege in ein Product von theilerfremden einfachen Divisorensystemen zerlegt werden.

§ 3.

Der Untersuchung des einfachen Systems (Π) schicke ich einige allgemeinere Bemerkungen voraus, welche die enge Beziehung zwischen diesem Probleme und dem der gleichzeitigen Betrachtung einer Anzahl von algebraischen Curven in der Umgebung eines beliebigen Punktes darlegen sollen.

Will man eine Curve $F(x, y) = 0$ in der Umgebung einer Stelle $(x = \alpha, y = \beta)$ untersuchen, so vereinfacht man die Frage dadurch, dass man die Function $F(x, y)$ in eine nach Potenzen der zugehörigen Linearfactoren $(x-\alpha)$ und $(y-\beta)$ fortschreitende Reihe entwickelt, und alsdann nur eine durch die Bedingungen der Aufgabe jedesmal vollständig bestimmte Anzahl ihrer ersten Glieder untersucht, während man von allen späteren absieht. Dies heisst aber nichts anderes, als dass jene Function $F(x, y)$ nicht an und für sich, sondern nur für ein ganz bestimmtes Modulsystem $((x-\alpha)^a, (y-\beta)^b)$ zu untersuchen ist, denn bei dieser Betrachtung können in der Entwickelung

$$(5.) \qquad F(x, y) = \Sigma a_{ik}(x-\alpha)^i(y-\beta)^k$$

auf der rechten Seite alle und nur die Glieder fortgelassen werden, für welche $i \geqq a$ oder $k \geqq b$ ist. Die gleichzeitige Untersuchung einer Anzahl

von Curven:

$$F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0, \quad \ldots, \quad F_\mu(x, y) = 0$$

in der Umgebung einer Stelle (α, β) deckt sich also vollständig mit der Betrachtung eines Divisorensystemes:

$$(6.) \qquad (\Pi) \backsim ((x-\alpha)^a, F_1(x, y), \ldots, F_\mu(x, y), (y-\beta)^b).$$

In einer demnächst erscheinenden Arbeit wird gezeigt werden, in welcher Weise diese neue Anschauung für die genaue Untersuchung der Curvenschaaren verwendet werden kann. Hier soll nur darauf aufmerksam gemacht werden, dass die hier zu betrachtenden Systeme:

$$(\Pi) \backsim (p^a, F_1(x), \ldots, F_\mu(x), P^b)$$

den in (6.) angegebenen vollständig entsprechen, wenn man an Stelle des Bereiches $[x, y]$ der ganzen Functionen *zweier* Variablen mit *beliebigen* Coefficienten, den Bereich $[1, x]$ der Functionen von *einer* Variablen mit *ganzzahligen* Coefficienten zu Grunde legt. Die Untersuchung der einfachen Divisorensysteme (Π) des Bereiches $[1, x]$ kann also interpretirt werden als die gleichzeitige Betrachtung der ganzzahligen Functionen $F_1(x), \ldots, F_\mu(x)$ in der Umgebung einer durch die beiden primitiven Elemente p und $P(x)$ charakterisirten Stelle des Bereiches $[1, x]$.

Ebenso nun, wie die im Anfange dieses Abschnittes betrachtete Aufgabe der Curventheorie wesentlich übersichtlicher wird, wenn man jene Functionen $F(x, y)$ in die Reihen (5.) entwickelt, erhält man auch hier eine ganz überraschende Einfachheit und Anschaulichkeit bei der Reduction des Systems (Π), wenn man seine Elemente $F_i(x)$ nach Potenzen der beiden zugehörigen Elemente p und P entwickelt.

Die Möglichkeit einer solchen Betrachtungsweise ergiebt sich unmittelbar aus dem folgenden Satze:

Jede ganzzahlige Function $F(x)$ ist modulo (p^a, P^b) stets in der Form darstellbar:

$$(7.) \qquad F(x) \equiv \sum_{i=0}^{a-1} \sum_{k=0}^{b-1} a_{ik} p^i P^k \quad (\text{modd. } p^a, P^b),$$

in welcher die Coefficienten a_{ik} für den zugehörigen Primdivisor $(\overline{\Pi}) = (p, P(x))$ reducirt, d. h. solche Functionen von x sind, deren Grad kleiner als π ist, und deren Zahlencoefficienten der Reihe $0, 1, 2, \ldots, p-1$ angehören.

In der That: entwickelt man $F(x)$ zunächst nach Potenzen von P, so erhält man eine Congruenz modulo P^b:

$$F(x) \equiv B_0 + B_1 P + \cdots + B_{b-1} P^{b-1} \pmod{P^b},$$

in welcher die Coefficienten $B_i(x)$ von niedrigerem als dem πten Grade sind, und aus ihr geht die obige Congruenz (7.) hervor, wenn man alle Zahlencoefficienten der Functionen $B_i(x)$ modulo p^a in der Form $\alpha_0 + \alpha_1 p + \cdots + \alpha_{a-1} p^{a-1}$ darstellt. Im Folgenden sollen die ab Glieder $a_{ik} p^i P^k$ dieser Entwickelung stets in *der* Weise geordnet werden, dass sie nach der Reihenfolge der aus ihren Exponenten i und k als Ziffern gebildeten zweistelligen Zahlen (i, k) auf einander folgen, so dass also ein Glied $a_{i_1 k_1} p^{i_1} P^{k_1}$ von höherer Ordnung ist, als ein anderes $a_{ik} p^i P^k$, wenn $i_1 > i$, oder, falls $i_1 = i$ sein sollte, wenn $k_1 > k$ ist.

Alle Functionen $F(x)$ zerfallen dann modulo (p^a, P^b) in zwei Klassen, nämlich in die, welche mit jenem Divisorensysteme einen gemeinsamen Theiler haben, und solche welche zu (p^a, P^b) relativ prim sind. Die letzteren sollen *Einheiten modulo* (p^a, P^b) genannt werden; aus den Bemerkungen am Ende des vorigen Abschnittes folgt dann, dass $F(x)$ dann und nur dann eine Einheit modulo (p^a, P^b) ist, wenn in ihrer Entwickelung (7.) nach Potenzen von p und P der erste Coefficient a_{00} von Null verschieden ist, denn nur in diesem Falle ist $F(x)$ durch den zugehörigen Primdivisor nicht theilbar.

§ 4.

Die Entwickelungen des vorigen Abschnittes können nun dazu benutzt werden, um die Elemente eines Modulsystemes auf eine möglichst einfache Form zu bringen. Zu diesem Zwecke beweise ich zunächst den folgenden Satz:

Ein einfaches Modulsystem:

$$(\Pi) = (p^a, F_1(x), \ldots, F_\mu(x), P^b)$$

wird im Sinne der Aequivalenz nicht geändert, wenn man irgend eines seiner Elemente $F_i(x)$ mit einer beliebigen Einheit modulo (p^a, P^b) multiplicirt.

Offenbar genügt es, diesen Satz für ein System $(p^a, F(x), P^b)$ von nur drei Elementen zu beweisen. Ist aber $\varepsilon(x)$ irgend eine Einheit, so be-

steht nach einem bekannten Satze die Aequivalenz:

$$(\varepsilon.F,\ p^a,\ P^b) \sim (\varepsilon,\ p^a,\ P^b)(F,\ p^a,\ P^b),$$

weil das System $(\varepsilon, F, p^a, P^b) \sim 1$ ist, und da auch $(\varepsilon, p^a, P^b) \sim 1$ ist, weil ε u. d. V. eine Einheit ist; so geht die obige Aequivalenz über in die folgende:

$$(\varepsilon F,\ p^a,\ P^b) \sim (F,\ p^a,\ P^b),$$

welche bewiesen werden sollte.

Dieses Resultat benutze ich nun, um die Elemente eines einfachen Modulsystemes in der oben angedeuteten Art umzuformen. Es besteht nämlich der folgende Fundamentalsatz:

> Ist $F(x)$ eine beliebige Function von x, deren Entwickelung modulo (p^a, P^b) mit dem Gliede niedrigster Ordnung p^iP^k beginnt, so kann man sie stets mit einer solchen Einheit $\varepsilon(x)$ multipliciren, dass das Product die folgende Gestalt hat
>
> $$\bar{F}(x) = \varepsilon(x)F(x) \equiv p^i(P^k + A_1P^{k-1} + A_2P^{k-2} + \cdots + A_k) \pmod{p^a,\ P^b},$$
>
> wo die Coefficienten A_i modulo $P(x)$ reducirt und sämmtlich durch p theilbar sind. Diese Form $\bar{F}(x)$, in welche somit jedes Element $F(x)$ durch Multiplication mit einer Einheit stets übergeführt werden kann, soll ***die primäre Form*** von $F(x)$ modulo (p^a, P^b) genannt werden.

Zunächst kann man nämlich $F(x)$ mit einer solchen Einheit multipliciren, dass der Coefficient des niedrigsten Gliedes gleich Eins wird. Hat nämlich in der Entwickelung von $F(x)$ das Glied niedrigster Ordnung p^iP^k den Coefficienten a_{ik}, so sei

$$F(x) \equiv a_{ik}p^iP^k + \Sigma a_{i_1k_1}p^{i_1}P^{k_1} \quad (\text{modd.}(p^a,\ P^b));$$

wählt man dann für $\varepsilon(x)$ den complementären Factor zu a_{ik} modulis (p, P), so vertritt die Congruenz $\varepsilon.a_{ik} \equiv 1$ modd.(p, P) eine andere

$$\varepsilon a_{ik} \equiv 1 + \alpha_{10}p + \alpha_{01}P + \cdots \quad \text{modd.}(p^a,\ P^b).$$

Multiplicirt man also $F(x)$ mit $\varepsilon(x)$, entwickelt alle Producte $\varepsilon a_{i_1k_1}$ nach Potenzen von p und P und ordnet dann wieder nach Potenzen von p und P, so erhält man eine Entwickelung

$$\varepsilon F(x) \equiv p^iP^k + \Sigma b_{i_1k_1}p^{i_1}P^{k_1} \quad (\text{mod.}p^a,\ P^b),$$

in welcher der Coefficient des niedrigsten Gliedes gleich Eins ist. Es kann daher jener Coefficient von vornherein gleich Eins angenommen werden.

Es sei also jetzt

$$F(x) = p^i P^k + \Sigma a_{i_1 k_1} p^{i_1} P^{k_1} \quad (\text{modd.} p^a,\ P^b),$$

wo die auf das erste folgenden Glieder sämmtlich von höherer Ordnung sind. Dann spricht der zu beweisende Satz nur aus, dass man durch Multiplication von $F(x)$ mit einer Einheit alle Glieder $a_{i_1 k_1} p^{i_1} P^{k_1}$ fortschaffen kann, in welchen *zugleich* $i_1 \geqq i$, $k_1 \geqq k$ ist. Es sei nun

$$a_{i_0 k_0} p^{i_0} P^{k_0}$$

das niedrigste Glied dieser Art in der Entwickelung von $F(x)$. Dann fällt in der Differenz:

$$F(x) - a_{i_0 k_0} p^{i_0 - i} P^{k_0 - k} F(x) = F(x)(1 - a_{i_0 k_0} p^{i_0 - i} P^{k_0 - k})$$

jenes Glied offenbar fort, aber ebenso leicht sieht man auch, dass in jener Differenz nicht etwa ein niedrigeres Glied dieser Art neu hinzutreten kann, denn ein solches Glied kommt im Minuendus jener Differenz n. d. V. nicht vor, ebenso wenig aber auch im Subtrahendus, da in ihm das sich forthebende Element überhaupt das niedrigste ist. Ebenso nun, wie man durch Multiplication mit der Einheit $\varepsilon(x) = 1 - a_{i_0 k_0} p^{i_0 - i} P^{k_0 - k}$ das niedrigste auf $p^i P^k$ folgende Element dieser Art fortschaffen konnte, kann man jetzt in der umgeformten Function das nächst niedrige Element zum Fortfallen bringen und hiermit so lange fortfahren, bis man die primäre Form erhalten hat, und hiermit ist jener Hauptsatz vollständig bewiesen.

Ist $F(x)$ speciell eine Einheit, also $i = k = 0$, so ist die zugehörige primäre Form offenbar gleich Eins, und man erhält so als Corollar den Satz:

Zu jeder Einheit $e(x)$ kann man stets eine complementäre Einheit $e'(x)$ so finden, dass die Congruenz:

$$e(x) e'(x) \equiv 1 \quad (\text{modd.} p^a,\ P^b)$$

erfüllt ist.

Denkt man sich eine ganze Function $F(x)$ von x statt nach Potenzen dieser Variablen nach Potenzen der irreductiblen Function P geordnet, so erhält man eine Darstellung

$$F(P) = A_0 P^s + A_1 P^{s-1} + \cdots + A_s,$$

in welcher die Coefficienten $A_0, \ldots, A_s$ modulo P reducirt, d. h. von niedrigerem als dem πten Grade in x sind. Dividirt man nun $F(x)$ durch eine Function

$$\Phi(P) = P^k + B_1 P^{k-1} + \cdots + B_k,$$

in welcher der Coefficient der höchsten Potenz von P gleich Eins ist, so gilt genau ebenso wie bei der gewöhnlichen Darstellung der folgende wichtige Satz:

Eine ganze Function $F(P)$ kann stets in der Form geschrieben werden:

$$(7^a.) \qquad F(P) = \Phi(P)G(P)+R(P),$$

in welcher $G(P)$ eine ganze Function des $(s-k)$-ten und $R(P)$ eine solche von niedrigerem als dem $k$ten Grade von P mit modulo P reducirten Coefficienten ist.

Setzt man nämlich $G(P)$ und $R(P)$ als ganze Functionen jener Grade mit unbestimmten Coefficienten an, so ergeben sich bekanntlich für jene $(s+1)$ Coefficienten ebenso viele lineare Gleichungen, aus denen sie sich als ganze ganzzahlige Functionen der Coefficienten A_i und B_k bestimmen. Jedoch werden dieselben im allgemeinen keineswegs modulo P reducirt, sondern von viel höherem Grade als dem πten sein. Betrachtet man aber jetzt dieselben Gleichungen nur als Congruenzen modulo P, so bestimmen sich jene $(s+1)$ unbekannten Coefficienten ebenfalls, aber als reducirte Functionen, und man erhält so zwei Functionen $G_0(P)$ und $R_0(P)$ derart, dass in der Differenz $F(P)-G_0(P)\Phi(P)-R_0(P)$ alle Coefficienten durch P theilbar sind. Setzt man jetzt

$$F(P)-G_0(P)\Phi(P)-R_0(P) = F_1(P),$$

so ist $F_1(P)$ eine ganze Function von x, welche in x von niedrigerem Grade ist, als $F(P)$, denn auf der linken Seite dieser Gleichung hebt sich das höchste Glied in $F(P)$, nämlich A_0P^s gegen das höchste Glied in dem Producte der beiden *reducirten* Functionen $G_0(P)$ und $\Phi(P)$ fort, weil in $\Phi(P)$ der Coefficient von P^k gleich Eins ist. Ordnet man also jetzt $F_1(P)$ nach Potenzen von P, so erhält man durch genau dasselbe Verfahren für diese Function eine neue Gleichung derselben Art:

$$F_1(P)-G_1(P)\Phi(P)-R_1(P) = F_2(P),$$

wo $F_2(P)$ wieder von niedrigerem Grade in x ist als $F_1(P)$. Fährt man also in derselben Weise fort, so gelangt man zuletzt zu einer Function $F_\nu(P)$, für welche die zugehörige Differenz gleich Null ist, d. h. zu einer Gleichung:

$$F_\nu(P)-G_\nu(P)\Phi(P)-R_\nu(P) = 0,$$

und wenn man alle jene Gleichungen addirt, so fallen $F_1(P)$, $F_2(P)$, ..., $F_\nu(P)$

auf beiden Seiten fort, und man erhält eine Gleichung:

$$F(P) = \Big(\sum_{i=0}^{\nu} G_i(P)\Big)\Phi(P)+\Big(\sum_{i=0}^{\nu} R_i(P)\Big),$$

und diese stimmt mit der in (7ª.) angegebenen vollständig überein, wenn man

$$G(P) = G_0(P)+G_1(P)+\cdots+G_\nu(P),$$
$$R(P) = R_0(P)+R_1(P)+\cdots+R_\nu(P)$$

setzt; damit ist jene Behauptung bewiesen, weil ja $G(P)$ und $R(P)$ als Summen reducirter Functionen selbst wieder reducirt sind. Ist speciell der höchste Coefficient A_0 in $F(P)$ gleich Eins, so lehrt die Vergleichung der höchsten Glieder in der Gleichung (7ª.), dass dasselbe auch für $G(P)$ der Fall ist.

Multiplicirt man nun die Gleichung (7ª.) mit einer beliebigen Potenz p^r von p, ersetzt darin $p^r F(P)$, $p^i\Phi(P)$, $p^{r-i}G(P)$ und $p^r R(P)$ wieder bezw. durch $F(P)$, $\Phi(P)$, $G(P)$ und $R(P)$, so ergiebt sich der wichtige Satz, welcher am Ende dieser Abhandlung benutzt werden soll.

Ist $F(P)$ eine beliebige ganze Function welche vom $s$ten Grade in P ist, und den Zahlentheiler p^r besitzt, und ist $\Phi(P)$ eine primäre Function vom Grade $k \leqq s$ und vom Zahlentheiler $p^i \leqq p^s$, so besteht stets eine Gleichung von der Form:

$$F(P) = G(P)\Phi(P)+R(P),$$

in welcher $G(P)$ den Grad $s-k$ und den Zahlentheiler p^{r-i} besitzt, während $R(P)$ von niedrigerem als dem $k$ten Grade ist und den Theiler p^r hat. Ist speciell $F(P)$ ebenfalls primär, so gilt dasselbe von dem Quotienten $G(P)$.

§ 5.

Nunmehr kann das Verfahren zur Reduction eines einfachen Modulsystemes:

$$(\Pi) = (p^a,\ F_1(x),\ \ldots,\ F_\mu(x),\ P^b)$$

leicht angegeben werden: Zu diesem Zwecke denke ich mir seine Elemente modulo (p^a, P^b) nach Potenzen von p und P entwickelt und greife dasjenige heraus, dessen Anfangsglied von der niedrigsten Ordnung ist; dasselbe muss dann eine Potenz von P allein sein, da ja unter den Elementen

von (Π) auch die Potenz P^b vorkommt. Es sei also

$$F^{(0)}(x) \equiv P^{n_0}+\cdots \pmod{p^a,\ P^b}$$

jenes Element; führt man dasselbe in seine reducirte Form über, so erhält man ein neues Element von der Form

$$\Phi_0(P) = P^{n_0}+A_1P^{n_0-1}+A_2P^{n_0-2}+\cdots+A_{n_0},$$

welches den Elementen von (Π) zugefügt werden kann, und dessen Coefficienten $A_1, A_2, \ldots, A_{n_0}$ sämmtlich modulo $P(x)$ reducirt und durch p theilbar sind. In dem so sich ergebenden äquivalenten Systeme können nun alle übrigen Elemente modulo $\Phi_0(P)$ in P auf den (n_0-1)-ten Grad reducirt werden; und so erhält man jetzt ein äquivalentes System:

$$(\Pi) \backsim (\Phi_0(P),\ F_1^{(1)}(x),\ F_2^{(1)}(x),\ \ldots),$$

dessen Elemente mit Ausnahme des ersten von niedrigerem als dem $n_0$ten Grade und alle mindestens durch die erste Potenz von P theilbar sind, und zwar sei p^{d_1} die höchste Potenz von p, welche in *allen* jenen Elementen $F_1^{(1)}(x)$, ... enthalten ist.

Ich betrachte nun den Bereich $[\Pi]$ aller durch den einfachen Divisor (Π) theilbaren Elemente, d. h. alle Functionen

$$F(x) = u_0\Phi_0(P)+u_1F_1^{(1)}(x)+u_2F_2^{(1)}(x)+\cdots \tag{8.}$$

mit beliebigen ganzen ganzzahligen Coefficienten, und greife aus ihm alle Elemente heraus, welche durch p^{d_1} theilbar sind. Da alle Elemente $F_1^{(1)}, F_2^{(1)}, \ldots$ diesen Zahlentheiler enthalten, so ist $F(x)$ in (8.) dann und nur dann durch p^{d_1} theilbar, wenn dasselbe von u_0 gilt, wenn also $u_0 = p^{d_1}u_0'$ ist. Alle jene Functionen und nur sie sind also in der Form darstellbar

$$F(x) = u_0'(p^{d_1}\Phi_0)+u_1F_1^{(1)}+u_2F_2^{(1)}+\cdots,$$

d. h. ihr Bereich $[\Pi_1]$ ist die Gesammtheit aller durch das einfache Divisorensystem:

$$(\Pi_1) = (p^{d_1}\Phi_0(P),\ F_1^{(1)}(x),\ F_2^{(1)}(x)\ldots)$$

theilbaren Functionen, dessen Elemente alle den Zahlentheiler p^{d_1} enthalten und mit Ausnahme des ersten von niedrigerem als dem $n_0$ten Grade sind. Zwischen den beiden einfachen Divisorensystemen (Π) und (Π_1) besteht die Beziehung

$$(\Pi) \backsim (\Phi_0(P),\ \Pi_1),$$

und man braucht daher jetzt nur das einfachere System (Π_1) oder den zu-

gehörigen Bereich $[\Pi_1]$ weiter zu untersuchen. Dieser neue Bereich ist ein Theilbereich von $[\Pi]$, und beide unterscheiden sich nur um die Multipla von $\Phi_0(P)$; da nun alle Elemente von $[\Pi_1]$ Vielfache von p^{d_1} sind, so erkennt man ohne Weiteres, dass $\Phi_0(P)$ als eine Function des Bereiches $[\Pi]$ definirt werden kann, welche durch p nicht theilbar und von einem möglichst niedrigen Grade in P ist.

Um nun das so gewonnene System

$$(\Pi_1) \backsim (p^{d_1}\Phi_0,\ F_1^{(1)}(x),\ F_2^{(1)}(x),\ \ldots)$$

weiter zu reduciren, verfahre ich genau ebenso wie bei dem ursprünglichen Systeme (Π): Es sei wieder $F_1^{(1)}(x)$ dasjenige Element von (Π_1), welches bei seiner Entwickelung mit einem Gliede $p^{\delta_1}P^{n_1}$ von möglichst niedriger Ordnung anfängt. Dann ist

$$\delta_1 = d_1 \quad \text{und} \quad n_1 < n_0,$$

weil alle jene Elemente von niedrigerem als dem $n_0$ten Grade sind, und genau den Theiler p^{d_1} enthalten. Transformirt man nun wieder $F_1^{(1)}(x)$ in seine primäre Form, so erhält man ein neues Element

$$\Phi_1(P) = p^{d_1}(P^{n_1} + B_1P^{n_1-1} + \cdots + B_{n_1-1}),$$

dessen Coefficienten $B_i(x)$ wieder modulo P reducirt und alle durch p theilbar sind; fügt man nun dieses Element dem Systeme (Π_1) hinzu, und reducirt dann die übrigen Elemente modulo $\Phi_1(P)$ in Bezug auf P unter den $n_1$ten Grad, so erhält man ein äquivalentes System

$$(\Pi_1) \backsim (\Phi_1(P),\ F_1^{(2)}(x),\ F_2^{(2)}(x),\ \ldots),$$

dessen Elemente $F_i^{(2)}(x)$ jetzt alle von niedrigerem als dem $n_1$ten Grade in P und mindestens durch p^{d_1+1} theilbar sind.

Es sei jetzt $p^{d_2} > p^{d_1}$ der grösste gemeinsame Theiler aller jener Functionen. Greift man dann aus dem Bereiche $[\Pi_1]$ aller durch (Π_1) theilbaren Functionen:

$$F^{(1)}(x) = v_0\Phi_1(P) + v_1F_1^{(2)}(x) + \cdots$$

alle diejenigen heraus, welche nicht bloss durch p^{d_1} sondern mindestens durch p^{d_2} theilbar sind, so findet man genau wie oben, dass ihr Bereich $[\Pi_2]$ mit der Gesammtheit aller durch das einfache System:

$$(\Pi_2) = (p^{d_2-d_1}\Phi_1(P),\ F_1^{(2)}(x),\ F_2^{(2)}(x),\ \ldots)$$

theilbaren Functionen zusammenfällt und, indem man die oben angeführten Schlüsse wiederholt, findet man den Satz:

Alle Elemente des Bereiches $[\Pi_1]$ welche durch p^{d_1} theilbar sind, bilden einen Theilbereich $[\Pi_2]$ von $[\Pi_1]$, welcher zu dem einfachen Systeme

$$(\Pi_2) = (p^{d_2-d_1}\Phi_1,\ F_1^{(2)},\ F_2^{(2)},\ \ldots)$$

gehört. Die Elemente $F_1^{(2)}, \ldots$ sind in P alle von niedrigerem als dem $n_1$ten Grade und enthalten den grössten gemeinsamen Theiler p^{d_2}. Die drei einfachen Systeme (Π), (Π_1), (Π_2) hängen durch die Aequivalenz

$$(\Pi) \sim (\Phi_0(P),\ \Pi_1) \sim (\Phi_0(P),\ \Phi_1(P),\ \Pi_2)$$

mit einander zusammen, und $\Phi_1(P)$ ist eine Function des Bereiches $[\Pi_1]$, welche von möglichst niedrigem Grade in P, und genau durch p^{d_1} theilbar ist.

In derselben Weise kann man jetzt offenbar das System (Π_2) umformen, und entsprechend weiter fortschreiten. Man erhält so eine Reihe primärer Functionen:

$$\Phi_0(P),\quad \Phi_1(P),\quad \Phi_2(P),\quad \ldots$$

deren Grade

$$n_0,\qquad n_1,\qquad n_2,\qquad \ldots$$

immer kleiner, ihre Zahlentheiler

$$1,\qquad p^{d_1},\qquad p^{d_2},\quad \ldots$$

aber immer grösser werden. Bei Fortsetzung dieses rationalen Verfahrens muss man also zuletzt zu einem primären Elemente $\Phi_\nu(P)$ kommen, welches in P vom nullten Grade, also einfach gleich einer Potenz p^{d_ν} von p ist. Da aber in dem zugehörigen Systeme

$$(\Pi_\nu) = (p^{d_\nu},\ F_1^{(\nu)},\ F_2^{(\nu)},\ \ldots)$$

alle Elemente $F_i^{(\nu)}$ mindestens durch $p^{d_\nu+1}$ theilbar sind, so können diese fortgelassen werden, d. h. für dieses letzte Element ist

$$(\Pi_\nu) \sim p^{d_\nu} \sim \Phi_\nu(P),$$

und aus dem Zusammenhange der Systeme (Π), (Π_1), $\ldots$, (Π_ν) ergiebt sich unmittelbar die Aequivalenz:

$$(\Pi) \sim (\Phi_0(P),\ \Phi_1(P),\ \ldots,\ \Phi_\nu(P)),$$

in welcher im Wesentlichen die gesuchte Reduction von (Π) enthalten ist.

§ 6.

Die im vorigen Abschnitte auseinandergesetzte Reduction der einfachen Modulsysteme (Π) kann aufgefasst werden als eine successive Zerlegung des zugehörigen Bereiches $[\Pi]$ in immer einfachere Theilbereiche.

Innerhalb des Bereiches $[\Pi]$ kann nämlich die erste Function $\Phi_0(P)$ als ein Element von möglichst niedrigem Grade in P ohne Zahlentheiler charakterisirt werden. Alle Elemente von noch niedrigerem Grade besitzen mindestens die Potenz p^{d_1} als Zahlentheiler. *Alle* Elemente von $[\Pi]$, welche jenen Theiler p^{d_1} besitzen, und deren Grad in P beliebig gross ist, bilden dann den Theilbereich $[\Pi_1]$ von $[\Pi]$, und dieser gehört zu dem einfachen Divisor (Π_1), dessen Herleitung aus (Π) eben im vorigen Abschnitte angegeben werde. Innerhalb $[\Pi_1]$ ist nun die zweite Function $\Phi_1(P)$ diejenige des niedrigsten Grades, welche den Zahlentheiler p^{d_1} hat; alle von noch niedrigerem Grade enthalten mindestens die Potenz p^{d_2}; dann constituiren *alle* Elemente von $[\Pi_1]$, die diesen Theiler enthalten, den Theilbereich $[\Pi_2]$ von $[\Pi_1]$, und in derselben Weise hängen alle jene auf einander folgenden Bereiche $[\Pi]$, $[\Pi_1]$, ..., $[\Pi_\nu]$ unter einander zusammen. Da nun für die zugehörigen Divisoren (Π), ..., (Π_ν) die Aequivalenzen bestehen:

$$(\Pi_i) \sim (\Phi_i(P),\ \Pi_{i+1}), \quad (\Pi_\nu) \sim p^{d_\nu} = \Phi_\nu, \qquad (i = 0, 1, \ldots, \nu)$$

so erhält man allgemein die folgende Darstellung aller Divisoren (Π_i):

$$(\Pi_i) \sim (\Phi_i(P),\ \Phi_{i+1}(P),\ \ldots,\ \Phi_\nu(P)). \qquad (i = 0, 1, \ldots, \nu)$$

Beachtet man aber jetzt, dass allgemein jedes Product

$$p^{d_{i+1}-d_i}\Phi_i(P)$$

dem nächst folgenden Bereiche $[\Pi_{i+1}]$ angehört, da es den Zahlentheiler $p^{d_{i+1}}$ besitzt, so findet man so eine Congruenz:

$$(8^a.) \qquad p^{e_{i+1}}\Phi_i(P) \equiv 0 \mod (\Phi_{i+1}, \ldots, \Phi_\nu),$$

in welcher, wie in der vorigen Arbeit allgemein

$$d_{i+1} - d_i = e_{i+1}$$

gesetzt ist.

Diese Congruenz $(8^a.)$ kann man nun benutzen, um das System $(\Phi_0(P), \Phi_1(P), \ldots, \Phi_\nu(P))$ auf eine eindeutig bestimmte reducirte Form zu bringen. Dividirt man nämlich zunächst das erste jener Producte $p^{e_1}\Phi_0(P)$ durch

$\Phi_1(P)$, und beachtet, dass beide primäre Functionen mit demselben Zahlentheiler sind, so folgt aus dem am Schlusse von § 4 bewiesenen Satze, dass der Quotient b_{11} ebenfalls primär ist, keinen Zahlentheiler hat, und dass sein Grad in P gleich der Differenz

$$f_1 = n_0 - n_1$$

der Grade von Φ_0 und Φ_1 ist.

Der Divisionsrest

$$R_1(P) = \Phi_0 - b_{11}\Phi_1$$

ist dann ein Element von $[\Pi]$ von niedrigerem als dem $n_1$ten Grade, und muss daher mindestens den Zahlentheiler p^{d_2} haben. Dividirt man daher jetzt $R_1(P)$ durch $\Phi_2(P)$ so wird der Quotient b_{12} von niedrigerem als dem $(n_1 - n_2)$-ten Grade in P; fährt man in derselben Weise fort, so erhält man zuletzt eine Gleichung, in welcher $p^{e_1}\Phi_0$ folgendermassen durch die Elemente des Modulsystemes $(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_\nu)$ ausgedrückt wird:

$$p^{e_1}\Phi_0 = b_{11}\Phi_1 + b_{12}\Phi_2 + \cdots + b_{1\nu}\Phi_\nu,$$

in welcher b_{11} primär und vom Grade $f_1 = n_0 - n_1$ ist, während allgemein b_{1k} von niedrigerem als dem $f_k$ten Grade ist, wenn allgemein

$$f_k = n_{k-1} - n_k$$

gesetzt ist, und in genau derselben Weise findet man die folgenden ν Gleichungen:

$$(9.) \quad \begin{cases} p^{e_1}\Phi_0 = b_{11}\Phi_1 + b_{12}\Phi_2 + \cdots + b_{1\nu}\Phi_\nu, \\ p^{e_2}\Phi_1 = b_{22}\Phi_2 + \cdots + b_{2\nu}\Phi_\nu, \\ \cdots\cdots\cdots\

Gleichungssystem (9.) von der letzten anfangend, durchgeführt, so erhält man ein System dieser Art, dessen charakteristischen Eigenschaften in dem folgenden Satze ausgesprochen sind:

Jedes einfache Divisorensystem $(p^a, F_1, \ldots, F_\mu, P^b)$ kann auf rationalem Wege in ein äquivalentes System $(\Phi_0(P), \Phi_1(P), \ldots, \Phi_\nu(P))$ von lauter primären Elementen transformirt werden, welche mit einander durch die Gleichungen

$$p^{e_i}\Phi_{i-1} = \sum_{k=i}^{\nu} b_{ik}\Phi_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

zusammenhängen. In dem hier auftretenden Coefficientensysteme

$$(b_{ik}) = \begin{Bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \ldots & b_{1\nu} \\ & b_{22} & b_{23} & \ldots & b_{2\nu} \\ & & b_{33} & \ldots & b_{3\nu} \\ & & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ & & & & b_{\nu\nu} \end{Bmatrix}$$

sind alle Diagonalglieder b_{kk} primäre Functionen von P ohne Zahlentheiler und allgemein ist jedes Element b_{ik} für das Modulsystem (p^{e_i}, b_{kk}) auf seinen kleinsten Rest reducirt.

Endlich beweist man nun wörtlich ebenso, wie dieses am Schlusse der vorigen Abhandlung geschehen ist, dass diese Reduction nur auf eine einzige Art möglich ist, und hiermit ist die im Anfange dieser Abhandlung gestellte Aufgabe vollständig gelöst.

Ich möchte noch die Bemerkung hinzufügen, dass ich diese Arbeit am 1. Juli 1896 der Redaction dieses Journals übergeben habe; inzwischen bin ich bei Gelegenheit einer über diesen Gegenstand im Winter 1896/7 gehaltenen Universitätsvorlesung noch einmal auf die hier behandelten Probleme zurückgekommen, und es ist mir gelungen, die früheren Ueberlegungen und Beweismethoden wesentlich zu vereinfachen. Dies gilt besonders für den hier zum ersten Male eingeführten Begriff des „einfachen Modulsystemes“, für die Entwickelung der Functionen $F(x)$ nach Potenzen von p und $P(x)$ und endlich für die Einführung der primären Functionen modulo (p^a, P^b). Aus diesem Grunde habe ich die frühere Darstellung nach den neu gewonnenen Gesichtspunkten umgestaltet.

Ueber lineare Differentialgleichungen mit mehrwerthigen algebraischen Coefficienten.

(Zweite Abhandlung; die erste siehe Bd. 115 dieses Journals.)

(Von Herrn *L. W. Thomé* in Greifswald.)

In der im 115ten Bande dieses Journals von dem Verfasser veröffentlichten Abhandlung: „Ueber lineare Differentialgleichungen mit mehrwerthigen algebraischen Coefficienten“ war vorausgesetzt, dass die Zweige der algebraischen Functionen, wenn mehrere solche Functionen nebst der unabhängigen Variablen rational in den Coefficienten der Differentialgleichung vorkommen, beliebig combinirt werden durften, ohne dass einer der Nenner in den Coefficienten identisch gleich Null wurde. Hier soll diese Voraussetzung fallen gelassen werden; es kommen dann nur solche Combinationen der Zweige in Betracht, bei denen keiner der Nenner identisch verschwindet.

Es wird in No. 1 im Anschluss an No. 1 der Abhandlung Bd. 115 gezeigt, wie eine Combination von Zweigen mehrerer algebraischen Functionen und die mit dieser Combination zusammenhängenden Combinationen rational durch die unabhängige Variable und eine andere algebraische Function mit soviel Zweigen, als die Anzahl der zusammenhängenden Combinationen beträgt, auszudrücken ist, alsdann wird letztere algebraische Function in die Coefficienten der Differentialgleichung eingeführt. Auf diese Weise treten an Stelle der ursprünglichen linearen Differentialgleichung eine oder mehrere lineare Differentialgleichungen, von welchen jede in den Coefficienten nur eine einzige algebraische Function enthält. Die Behandlung dieses Falles ist in den in Abhandlung Bd. 115 angestellten Untersuchungen einbegriffen.

Eine verwandte Betrachtungsweise dient in No. 2 dazu, die homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten, deren Integrale

die linear unabhängigen Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung mit beliebigen algebraischen Coefficienten sind, in allen Fällen thatsächlich aufzustellen, nachdem deren Bestehen in No. 8 der Abhandlung Bd. 115 nachgewiesen und dieselbe dort zunächst mit Coefficienten, die rational die Zweige algebraischer Functionen enthalten, hergeleitet war. Aus dieser Darstellung der Coefficienten waren die rationalen Ausdrücke derselben l. c. unter einer besonderen Voraussetzung ermittelt, hier geschieht die Herleitung dieser rationalen Functionen aus der genannten Darstellung in einheitlichem Verfahren völlig allgemein. Die Anzahl jener linear unabhängigen Integrale kann niedriger sein, als das Product aus Ordnung der Differentialgleichung und Anzahl aller Combinationen der Zweige in den Coefficienten beträgt.

Die Nummern 3 und 4 enthalten Zusätze zu früheren Abhandlungen des Verfassers namentlich in Bezug auf Darstellung der Untergruppen in einer Gruppe von Integralen mit Exponenten, die sich nur um ganze Zahlen unterscheiden.

1.

Die Coefficienten der Differentialquotienten in einer linearen Differentialgleichung mit dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 sollen rationale Functionen der unabhängigen Variablen x und von einer oder mehreren irreductibelen algebraischen Functionen sein. Hier wird das Schema von drei solchen Functionen u, v, w angenommen. Von diesen Functionen kann vorausgesetzt werden, dass in den irreductibelen Gleichungen derselben mit ganzen rationalen Coefficienten der Coefficient der höchsten Potenz gleich 1 ist. Die ganzen rationalen Functionen von $x, u, v, w,$ in den Nennern der Coefficienten der Differentialgleichung sollen für eine in Betracht gezogene Combination von Zweigen der algebraischen Functionen nicht identisch verschwinden. Es können auch einige der Functionen u, v, w eine und dieselbe algebraische Function, vertreten durch verschiedene Zweige, sein. Wenn z. B. u_1 und u_2 zwei verschiedene Zweige von u sind, so verschwindet die Differenz $u_1 - u_2$ nicht identisch und wird durch den Ausdruck $u - v$ vorgestellt, in welchem u und v dieselbe Function, vertreten durch verschiedene Zweige, bedeuten.

Nun soll eine beliebige Combination eines Zweiges von u, eines solchen von v, eines solchen von w rational durch die unabhängige Variable x und eine andere algebraische Function ausgedrückt werden.

Die Function u enthalte α Zweige u_1 bis u_α, die Function v deren β, v_1 bis v_β, die Function w deren γ, w_1 bis w_γ, wobei auch der Fall aufgenommen ist, dass unter den betrachteten Functionen u, v, w einige ein und dieselbe algebraische Function sind. Es wird der Ausdruck

$$\lambda_1 u_{\mathfrak{a}} + \lambda_2 v_{\mathfrak{b}} + \lambda_3 w_{\mathfrak{c}} = S_{\mathfrak{abc}} \qquad \begin{pmatrix} \mathfrak{a}=1, \ldots, \alpha \\ \mathfrak{b}=1, \ldots, \beta \\ \mathfrak{c}=1, \ldots, \gamma \end{pmatrix} \tag{1.}$$

gebildet. Für die Grössen λ_1, λ_2, λ_3 kann man rationale Zahlen wählen, so dass die $\alpha\beta\gamma$ Werthe von $S_{\mathfrak{abc}}$ alle unter einander verschieden sind. Denn nimmt man einen Punkt $x = a$, wo die α Werthe von u alle endlich und unter einander verschieden sind, desgleichen die β Werthe von v, die γ Werthe von w, und ist $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ eine beliebige Combination der Zeiger, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$ eine beliebige andere Combination derselben, so sind die Differenzen

$$u_{\mathfrak{a}_1} - u_{\mathfrak{a}_2}, \quad v_{\mathfrak{b}_1} - v_{\mathfrak{b}_2}, \quad w_{\mathfrak{c}_1} - w_{\mathfrak{c}_2} \tag{2.}$$

nicht alle gleich Null. Für $x = a$ und beliebige Werthe der λ ist daher keine der Grössen

$$S_{\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1} - S_{\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2} \tag{3.}$$

identisch Null, demnach giebt es Gebiete der Variablen λ, welche ein Stück der Axe des Reellen einschliessen, in denen keine der Grössen (3.) verschwindet. In dem Producte

$$\prod_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=\alpha} \prod_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=\beta} \prod_{\mathfrak{c}=1}^{\mathfrak{c}=\gamma} (S - S_{\mathfrak{abc}}) \tag{4.}$$

sind die Coefficienten der Potenzen von S symmetrische Functionen in Bezug auf die Wurzeln jeder einzelnen der irreductibelen Gleichungen von u, v, w und ergeben sich mittelst derselben als ganze rationale Functionen von x mit Constanten, die sich rational aus den Constanten dieser Gleichungen zusammensetzen. Das Gleichungspolynom (4.) sei durch $F(S)$ bezeichnet, der Grad $\alpha\beta\gamma$ desselben durch r und die r Grössen

$$S_{\mathfrak{abc}} \qquad \begin{pmatrix} \mathfrak{a}=1, \ldots, \alpha \\ \mathfrak{b}=1, \ldots, \beta \\ \mathfrak{c}=1, \ldots, \gamma \end{pmatrix} \tag{5.}$$

seien durch S_1, S_2 bis S_r bezeichnet. Bei der Function u sei nun $u_{(1)}$ der Zweig von u in S_1, $u_{(2)}$ derjenige in S_2, bis $u_{(r)}$ in S_r. Dann erhält man nach der *Lagrange*schen Formel

$$F(S)\left\{\frac{u_{(1)}}{S-S_1} + \frac{u_{(2)}}{S-S_2} + \cdots + \frac{u_{(r)}}{S-S_r}\right\} = L(S) \tag{6.}$$

$L(S)$ als ganze rationale Function von S $(r-1)$-ten Grades, deren Coefficienten symmetrische Functionen in Bezug auf die Wurzeln jeder einzelnen der irreductibelen Gleichungen von u, v, w sind und daher als ganze rationale Functionen von x mit Constanten, welche aus den Constanten dieser Gleichungen sich rational zusammensetzen, hervorgehen. Die der vorhergehenden entsprechenden Formeln bei den Functionen v, w seien

$$(7.) \qquad F(S)\left\{\frac{v_{(1)}}{S-S_1}+\frac{v_{(2)}}{S-S_2}+\cdots+\frac{v_{(r)}}{S-S_r}\right\} = M(S),$$

$$(8.) \qquad F(S)\left\{\frac{w_{(1)}}{S-S_1}+\frac{w_{(2)}}{S-S_2}+\cdots+\frac{w_{(r)}}{S-S_r}\right\} = N(S).$$

Der erste Differentialquotient von $F(S)$ nach S werde durch $F'(S)$ bezeichnet. Dann ergiebt sich aus (6.) (7.) (8.)

$$(9.) \qquad u_{(n)} = \frac{L(S_n)}{F'(S_n)}, \quad v_{(n)} = \frac{M(S_n)}{F'(S_n)}, \quad w_{(n)} = \frac{N(S_n)}{F'(S_n)} \qquad (n=1, \ldots, r)$$

(vgl. *Weber* Lehrbuch der Algebra I. S. 459).

Die Function $F(S)$ sei nun in irreductibele Factoren zerlegt. Dieselben sind ganze rationale Functionen von S mit ganzen rationalen Functionen von x als Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Potenz gleich 1. Diese Zerlegung geschieht, indem mittelst der Entwickelungen der Zweige von u, v, w bei $x=a$ die Entwickelungen der r Grössen S_{abc}, die in a alle von einander verschieden sind, aufgestellt werden, alsdann wird das in der Abhandlung des Verfassers Bd. 104 S. 2 beschriebene Verfahren angewandt. Eine beliebige Combination $u_{(n)}, v_{(n)}, w_{(n)}$ und das entsprechende S_n gehört einem der irreductibelen Factoren von $F(S)$ an, derselbe sei $\Phi(S)$ und σten Grades, also $\Phi(S_n)=0$. Die *Riemann*sche Fläche als Gebiet für die Variable x in der irreductibelen algebraischen Function S aus $\Phi(S)=0$ werde durch T bezeichnet. Diese Fläche T ist σ-blättrig. Dann entsprechen den σ Blättern von T σ verschiedene und unter einander zusammenhängende Combinationen der Zweige von u, v, w. Man erhält diese Combinationen durch die Wurzeln der Gleichung $\Phi(S)=0$ in dem Punkte $x=a$. Das Gebiet der unabhängigen Variablen x in u (entsprechend bei v, w) breitet sich wieder über die Fläche T aus, es besteht daher eine Gleichung für u mit ganzen rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Potenz gleich 1, wenn die Variable x auf die Fläche T bezogen wird, und das Gleichungspolynom derselben ist eine

Potenz des Gleichungspolynoms der irreductibelen Gleichung von u (*Riemann, Abel*sche Functionen No. 5). Also ist σ ein gemeinschaftliches Vielfache der Grade α, β, γ. Sind diese Zahlen relative Primzahlen, so ist $F(S)$ irreductibel.

Die Wurzeln von $\Phi(S)=0$ seien $S^{(1)}$ bis $S^{(\sigma)}$. S_n in (9.) sei durch $S^{(1)}$ bezeichnet. Nun werden Zähler und Nenner in (9.) durch $\Phi(S)=0$ auf einen Grad $\leqq \sigma-1$ gebracht, und wenn der Nenner $G(S^{(1)})$ ist, mit $G(S^{(2)})\ldots G(S^{(\sigma)})$ multiplicirt. Mittelst $\Phi(S)=0$ erhält man jetzt für die σ zusammenhängenden Combinationen, welche den σ Wurzeln der irreductibelen Gleichung $\Phi(S)=0$ entsprechen, die Darstellung

$$(10.)\qquad \begin{cases} u^{(\varrho)}=\varphi(S^{(\varrho)}), \quad v^{(\varrho)}=\chi(S^{(\varrho)}), \quad w^{(\varrho)}=\psi(S^{(\varrho)}), \\ S^{(\varrho)}=\lambda_1 u^{(\varrho)}+\lambda_2 v^{(\varrho)}+\lambda_3 w^{(\varrho)}, \quad \Phi(S^{(\varrho)})=0, \end{cases} \qquad (\varrho=1,\ldots,\sigma)$$

wo φ, χ, ψ ganze rationale Functionen von S höchstens $(\sigma-1)$-ten Grades sind mit rationalen Functionen von x als Coefficienten, deren Constanten sich rational aus den Constanten der irreductibelen Gleichungen von u, v, w und der Gleichung $\Phi(S)=0$ zusammensetzen. *Durch* (10.) *ist die Darstellung einer beliebigen Combination eines Zweiges von u, eines solchen von v, eines solchen von w und der mit dieser Combination zusammenhängenden Combinationen ausgedrückt rational durch die unabhängige Variable und eine andere algebraische Function, die bekannt ist, welche so viel Zweige hat, als die Anzahl der verschiedenen und unter einander zusammenhängenden Combinationen beträgt.*

Wenn nun eine lineare Differentialgleichung vorliegt, in welcher die Coefficienten der Differentialquotienten rational die unabhängige Variable und eine Combination von Zweigen von u, v, w enthalten, für welche die Nenner der rationalen Ausdrücke nicht identisch verschwinden, so können diese Zweige durch die Ausdrücke (10.) dargestellt werden. Dann kommt in den Coefficienten der Differentialgleichung nur eine algebraische Function S aus der irreductibelen Gleichung $\Phi(S)=0$ vor und keiner der Nenner verschwindet identisch. Eine oder mehrere Differentialgleichungen letzterer Art treten also an Stelle der ursprünglichen Differentialgleichung. Die Behandlung der linearen Differentialgleichungen, die nur eine algebraische Function nebst der unabhängigen Variablen rational in den Coefficienten, enthalten, fällt unter die in Abhandlung Band 115 angestellten Untersuchungen.

2.

I. Die linear unabhängigen Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung, deren Coefficienten die unabhängige Variable x und eine oder mehrere irreductibele algebraische Functionen z. B. drei Functionen u, v, w rational enthalten, und in welcher alle Combinationen der Zweige von u, v, w vorgenommen werden können, ohne dass einer der Nenner in den Coefficienten identisch verschwindet, sind, wie in Abhandlung Bd. 115 No. 8 bewiesen ist, die Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten. Wenn nicht alle Combinationen der Zweige zulässig sind, so kommt man durch die Transformation in No. 1 auf lineare Differentialgleichungen, die nur eine algebraische Function in den Coefficienten enthalten, und für jede solche Differentialgleichung auf den vorigen Fall zurück.

Bei der l. c. angegebenen Herleitung der gesuchten homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten waren die Coefficienten der Differentialgleichung zunächst unter der Form eines Quotienten aufgestellt, in dem Zähler und Nenner ganze rationale Ausdrücke der unabhängigen Variablen x und der Zweige von u, v, w sind. Die Existenz der rationalen Functionen von x als Ausdrücke der Coefficienten der Differentialgleichung war dort nachgewiesen. Diese rationalen Functionen können nun aus den vorhin genannten Quotienten auf folgende Weise immer hergestellt werden.

Die Zweige derjenigen in den Coefficienten der ursprünglichen Differentialgleichung enthaltenen algebraischen Functionen, welche unter einander verschieden sind, werden rational durch eine algebraische Function und die unabhängige Variable x ausgedrückt. Dieses könnte nach No. 1 geschehen, wo dann der Fall eintritt, dass nach dem verallgemeinerten dortigen Schema von u, v, w No. 1 (1.) einige der Functionen eine und dieselbe algebraische Function sind. Man erhält jedoch an Stelle der dortigen Gleichung $F(S) = 0$ durch folgende verwandte Betrachtungen eine Gleichung niedrigeren Grades.

Eine oder mehrere von einander verschiedene irreductibele algebraische Functionen, etwa u, v, w, seien gegeben. Die Zweige von u seien u_1 bis u_α, die von v v_1 bis v_β, die von w w_1 bis w_γ. Nun wird der Ausdruck aufgestellt

$$(1.)\quad \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_\alpha u_\alpha + \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_\beta v_\beta + \nu_1 w_1 + \cdots + \nu_\gamma w_\gamma = S_1.$$

In diesem Ausdrucke sollen die $\alpha!$ Permutationen von u_1 bis u_α, die $\beta!$ Permutationen von v_1 bis v_β, die $\gamma!$ Permutationen von w_1 bis w_γ vorgenommen werden. Die auf diese Weise erhaltenen $\alpha!\beta!\gamma! = r$ Ausdrücke seien durch S_1, S_2 bis S_r bezeichnet. Für die λ, μ, ν können gemäss dem in No. 1 bei (2.), (3.) Gesagten rationale Zahlen so gewählt werden, dass in dem dort genannten Punkte $x = a$ nicht je zwei Grössen aus der Reihe S_1 bis S_r einander gleich sind. Das Product

$$(2.) \qquad \prod_{n=1}^{n=r} (S - S_n) = F(S)$$

ist eine ganze rationale Function von S, deren Coefficienten symmetrische Ausdrücke der Wurzeln jeder einzelnen der irreductibelen Gleichungen von u, v, w und daher ganze rationale Functionen von x sind mit Constanten, die sich rational aus den Constanten dieser Gleichungen zusammensetzen. In dem Ausdrucke

$$(3.) \qquad 0u_1 + \cdots + 0u_{h-1} + u_h + 0u_{h+1} + \cdots + 0u_\alpha = U^{(h)}$$

sei dieselbe Permutation der u vorgenommen wie in S_n, derselbe sei dann durch $U_n^{(h)}$ bezeichnet. Aus der Formel

$$(4.) \qquad F(S)\left\{\frac{U_1^{(h)}}{S-S_1} + \frac{U_2^{(h)}}{S-S_2} + \cdots + \frac{U_r^{(h)}}{S-S_r}\right\} = L^{(h)}(S)$$

geht $L^{(h)}(S)$ als ganze rationale Function von S $(r-1)$-ten Grades hervor, deren Coefficienten, symmetrische Ausdrücke der Wurzeln jeder einzelnen der irreductibelen Gleichungen von u, v, w, sich als ganze rationale Functionen von x ergeben mit Constanten, die rational aus den Constanten dieser Gleichungen zusammengesetzt sind. Die entsprechenden Formeln bei v, w seien

$$(5.) \qquad F(S)\left\{\frac{V_1^{(k)}}{S-S_1} + \frac{V_2^{(k)}}{S-S_2} + \cdots + \frac{V_r^{(k)}}{S-S_r}\right\} = M^{(k)}(S),$$

$$(6.) \qquad F(S)\left\{\frac{W_1^{(l)}}{S-S_1} + \frac{W_2^{(l)}}{S-S_2} + \cdots + \frac{W_r^{(l)}}{S-S_r}\right\} = N^{(l)}(S).$$

Der erste Differentialquotient von $F(S)$ nach S sei durch $F'(S)$ bezeichnet. Aus den Formeln (4.), (5.), (6.) folgt

$$(7.) \qquad U_n^{(h)} = \frac{L^{(h)}(S_n)}{F'(S_n)}, \quad V_n^{(k)} = \frac{M^{(k)}(S_n)}{F'(S_n)}, \quad W_n^{(l)} = \frac{N^{(l)}(S_n)}{F'(S_n)}. \qquad (n = 1, \ldots, r)$$

$F(S)$ sei in irreductibele Factoren zerlegt. Derjenige dieser Factoren, welcher durch den Werth $S = S_1$ (1.) in dem Punkte $x = a$ gleich Null wird,

sei $\Phi(S)$ und σten Grades. Die *Riemann*sche Fläche als Gebiet der unabhängigen Variablen x in der irreductibelen algebraischen Function S aus $\Phi(S)=0$ sei durch T bezeichnet. Dann entsprechen den σ Blättern von T die σ verschiedenen Ausdrücke, welche aus S_1 (1.) durch diejenigen Permutationen der Zweige von u unter einander, der Zweige von v unter einander, der Zweige von w unter einander hervorgehen, die man erhält, wenn x sich auf beliebigen Wegen, die nicht durch die Verzweigungspunkte von u, v, w führen, bewegt. Diese Permutationen werden bestimmt durch die Wurzeln der Gleichung $\Phi(S)=0$ in dem Punkte $x=a$. Die diesen Permutationen entsprechenden Substitutionen bilden die Monodromiegruppe der zusammen betrachteten Functionen u, v, w. Gemäss dem in No. 1 nach (9.) Bemerkten (oder nach dem Verfahren in Abh. Bd. 115 No. 1) ist der Grad σ ein gemeinschaftliches Vielfaches der Grade α, β, γ. Die Wurzeln von $\Phi(S)=0$ seien S_1 bis S_σ. S_n in (7.) sei S_1. Dann werden Zähler und Nenner in (7.) auf einen Grad $\leqq \sigma-1$ gebracht, und wenn der Nenner $G(S_1)$ ist, mit $G(S_2)\ldots G(S_\sigma)$ multiplicirt. Dadurch erhält man mittelst $\Phi(S)=0$ für die Zweige in den σ Permutationen der Monodromiegruppe folgende Darstellung

$$(8.)\quad \begin{cases} U_\varrho^{(h)} = \varphi^{(h)}(S_\varrho), \quad V_\varrho^{(k)} = \chi^{(k)}(S_\varrho), \quad W_\varrho^{(l)} = \psi^{(l)}(S_\varrho), \\ \qquad (h=1,\ldots,\alpha) \qquad\quad (k=1,\ldots,\beta) \qquad\quad (l=1,\ldots,\gamma) \\ S_\varrho = \lambda_1 U_\varrho^{(1)} + \lambda_2 U_\varrho^{(2)} + \cdots + \lambda_\alpha U_\varrho^{(\alpha)} + \mu_1 V_\varrho^{(1)} + \cdots + \mu_\beta V_\varrho^{(\beta)} \\ \qquad\qquad + \nu_1 W_\varrho^{(1)} + \cdots + \nu_\gamma W_\varrho^{(\gamma)}, \\ \Phi(S_\varrho) = 0, \qquad\qquad (\varrho=1,\ldots,\sigma) \end{cases}$$

wo die Functionen $\varphi^{(h)}(S)$ $(h=1,\ldots,\alpha)$, $\chi^{(k)}(S)$ $(k=1,\ldots,\beta)$, $\varphi^{(l)}(S)$ $(l=1,\ldots,\gamma)$ ganze rationale Functionen von S höchstens $(\sigma-1)$-ten Grades mit rationalen Functionen von x als Coefficienten sind, deren Constanten rational aus den Constanten in den irreductibelen Gleichungen von u, v, w und in der Gleichung $\Phi(S)=0$ sich zusammensetzen.

Es waren nun die Coefficienten der gesuchten homogenen linearen Differentialgleichung bereits unter der Form $H:K$ aufgestellt, wo H und K ganze rationale Functionen von x und den Zweigen von u, v, w sind. Hier werden für die Zweige von u, v, w die Ausdrücke (8.) durch S_1 eingesetzt. Der Nenner in einem beliebigen Coefficienten wird dadurch eine nicht identisch verschwindende ganze rationale Function von S_1, dieselbe sei durch $K(S_1)$ bezeichnet. Dann werden Zähler und Nenner des Coefficienten mit dem Producte $K(S_2), K(S_3), \ldots, K(S_\sigma)$ multiplicirt. Der Nenner ergiebt

sich mittelst der Gleichung $\Phi(S) = 0$ als eine nicht identisch verschwindende rationale Function von x. Der Zähler wird zunächst eine ganze rationale Function von S_1 und eine rationale von x. Nachdem der Grad dieser Function mittelst $\Phi(S) = 0$ unter σ erniedrigt ist, müssen die Potenzen von S_1 ausfallen wegen der Irreductibilität der Gleichung $\Phi(S) = 0$, da der Gesammtcoefficient in der Differentialgleichung bereits als rationale Function von x nachgewiesen war.

Man erhält also auf diese Weise die rationalen Coefficienten in der gesuchten linearen Differentialgleichung hergestellt. Die Constanten in denselben setzen sich rational aus den Constanten in der ursprünglichen Differentialgleichung, den Constanten in den irreductibelen Gleichungen von u, v, w und den Constanten in der die Monodromiegruppe bestimmenden Gleichung $\Phi(S) = 0$ zusammen.

II. In Abhandlung Bd. 115 No. 8 war bemerkt, dass eine homogene lineare Differentialgleichung $m$ter Ordnung, deren Coefficienten eine oder mehrere irreductibele algebraische Functionen nebst der unabhängigen Variablen x rational enthalten, $F_m(y, u, v, w, x) = 0$, wo die algebraische Function u aus einer irreductibelen Gleichung αten Grades, v aus einer solchen βten Grades, w aus einer solchen γten Grades vorkommt, und in welcher alle Combinationen der Zweige zulässig sind, zwar für jede Combination m linear unabhängige Integrale hat, dass aber die $m\alpha\beta\gamma$ Integrale, die allen Combinationen entsprechen, nicht linear unabhängig zu sein brauchen. Als Beispiel war eine Differentialgleichung $F = 0$ genommen, worin F durch das System homogener linearer Differentialausdrücke mit in x, u, v, w rationalen Coefficienten

$$(9.) \qquad f(y, x) = y_1, \quad g(y_1, u, v, w, x)$$

dargestellt ist, in dem $f(y, x)$ die Functionen u, v, w nicht enthält.

Es seien nun in die Differentialgleichung $F_m(y, u, v, w, x) = 0$ die sämmtlichen Combinationen der Zweige eingesetzt, dann werden nach den l. c. gemachten Angaben successive die linear unabhängigen Integrale dieser Differentialgleichungen in einer Differentialgleichung vereinigt. Nun sollen nur bei einer Anzahl n von Combinationen die Integrale unter einander linear unabhängig sein und für diese sei eine homogene lineare Differentialgleichung mnter Ordnung hergestellt. Dieselbe enthält in den Coefficienten diese Combinationen rational. Die Integrale von $F_m(y, u, v, w, x) = 0$ bei

einer folgenden Combination seien von den vorhergehenden nicht alle linear unabhängig, aber wenigstens bei einem sei dieses der Fall, so ergiebt sich aus beiden Differentialgleichungen für die gemeinschaftlichen Integrale eine homogene lineare Differentialgleichung niedrigerer als $m$ter Ordnung, in deren Coefficienten die bisherigen Combinationen der Zweige rational vorkommen. Diese Coefficienten enthalten also Zweige von u, v, w. Man kann nun für diese Zweige die Ausdrücke (8.) bei S_1 einsetzen, wodurch die Coefficienten der Differentialgleichung die neue algebraische Function S aus $\Phi(S) = 0$ enthalten. In einem solchen Falle erfüllen also einige Integrale der ursprünglichen Differentialgleichung eine homogene lineare Differentialgleichung niedrigerer Ordnung mit algebraischen Coefficienten.

3.

I. Bei einem singulären Punkte einer homogenen linearen Differentialgleichung, deren Coefficienten in der Umgebung dieses Punktes einwerthige und abgesehen von demselben stetige analytische Functionen sind, kann eine Gruppe von Integralen der Differentialgleichung, welche linear unabhängige Integrale, in denen die Exponenten sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, in höchster Anzahl enthält, durch eine Reihe von Untergruppen ersetzt werden. Diese Untergruppen hat Herr ***Hamburger*** Bd. 76 dieses Journals angegeben und Herr ***Jürgens*** hat Bd. 80 dieses Journals in folgender Weise Untergruppen einer Gruppe durch Umgang in Integralen um den singulären Punkt hergeleitet. (In Betreff der Untergruppen vergleiche man die Handbücher der Theorie der linearen Differentialgleichungen von ***Heffter*** und ***Schlesinger***).

Wenn das Integral u_λ vorliegt

$$(1.)\quad \left\{ \begin{array}{l} (x-a)^r\{\varphi_\lambda+(\lambda-1)_1\varphi_{\lambda-1}\log(x-a)+(\lambda-1)_2\varphi_{\lambda-2}(\log(x-a))^2+\cdots \\ \qquad\qquad +\varphi_1(\log(x-a))^{\lambda-1}\}, \end{array} \right.$$

wo $(\lambda-1)_s$ den Binomialcoefficienten $\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-s)}{1\cdot 2\cdots s}$ bedeutet, die Functionen φ in der Umgebung von $x = a$ abgesehen von diesem Punkte einwerthige und stetige analytische Functionen sind, φ_1 von Null verschieden ist, so erhält man aus u_λ durch $\varkappa$-maligen Umgang um $x = a$ in positiver oder negativer Richtung wieder ein Integral. Folgende Ausdrücke

$$(2.)\quad \begin{cases} u_1 = (x-a)^r \varphi_1 \\ u_2 = (x-a)^r \{\varphi_2 + \varphi_1 \log(x-a)\} \\ u_3 = (x-a)^r \{\varphi_3 + 2\varphi_2 \log(x-a) + \varphi_1 (\log(x-a))^2\} \\ \vdots \\ u_\lambda = (x-a)^r \{\varphi_\lambda + (\lambda-1)_1 \varphi_{\lambda-1} \log(x-a) + (\lambda-1)_2 \varphi_{\lambda-2} (\log(x-a))^2 + \cdots \\ \qquad + \varphi_1 (\log(x-a))^{\lambda-1}\} \end{cases}$$

werden dadurch aus (1.) als Integrale der Differentialgleichung hergeleitet. Das Resultat des z-maligen Umganges in u_λ (1.) in positiver oder negativer Richtung sei durch $u_\lambda^{(\pm z)}$ bezeichnet, so ergiebt sich

$$(3.)\quad \begin{cases} u_\lambda^{(\pm z)} = e^{\pm 2\pi i r} \{u_\lambda + (\lambda-1)_1 u_{\lambda-1} (\pm 2\pi i z) + \cdots + (\lambda-1)_l u_{\lambda-l} (\pm 2\pi i z)^l + \cdots \\ \qquad + u_1 (\pm 2\pi i z)^{\lambda-1}\} \end{cases}$$

und aus λ dieser Gleichungen gehen die Ausdrücke (2.) als Integrale hervor. Die Ausdrücke (2.) haben die Eigenschaft, dass die höchsten Logarithmenpotenzen mit einem und demselben Factor multiplicirt sind, die Exponenten derselben von Null an successive um 1 wachsen, dass die in dem γten Integrale enthaltenen Factoren der Logarithmenpotenzen auch in dem $(\gamma+1)$-ten Integrale in derselben Reihenfolge bei den um 1 erhöhten Potenzen multiplicirt mit $(\gamma)_{s+1} : (\gamma-1)_s$ $(s = 0, \ldots, \gamma-1)$ vorkommen, und dass vermittelst der Ausdrücke (2.) das Resultat des z-maligen Umganges in u_λ durch Formel (3.) gegeben wird. Eine Gruppe, welche so viele linear unabhängige Integrale der Differentialgleichung, in denen die Exponenten sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, als möglich ist, enthält, wird durch eine Reihe von Untergruppen der Form (2.) ersetzt, in denen die Integrale mit übereinstimmender höchster Logarithmenpotenz linear unabhängige Factoren dieser Potenz enthalten.

II. Es seien nun die Coefficienten der homogenen linearen Differentialgleichung rational und bei dem Punkte $x = a$ alle Integrale regulär. Dann kann man für eine Gruppe von Integralen eine Reihe von Untergruppen von der in I. angegebenen Beschaffenheit durch nachstehendes Verfahren aufstellen. Sind die Coefficienten der homogenen linearen Differentialgleichung mehrwerthig algebraisch, so findet das Entsprechende gemäss Abh. Bd. 115 No. 6 I, No. 9 II A. statt.

Die sämmtlichen Integrale der Differentialgleichung $m$ter Ordnung bei dem Punkte $x = a$ gehen aus den Ausdrücken hervor

$$(4.)\quad \nu_1,\quad \nu_1 \int \nu_1^{-1} \nu_2 dx,\quad \ldots,\quad \nu_1 \int dx \nu_1^{-1} \nu_2 \int \cdots \int \nu_{m-1}^{-1} \nu_m dx,$$

wo $\nu_a = (x-a)^{r_a-a+1}\psi_a(x)$, $\psi_a(x)$ von der Form $1+\sum_1^\infty c_b(x-a)^b$ ist, die Exponenten r_1 bis r_m die Wurzeln der Exponentengleichung sind, und bei den Integrationen das absolute Glied annullirt wird. Ueber die Reihenfolge der Wurzeln r_1 bis r_m wird keine Voraussetzung gemacht; die Integrale (4.) können z. B. aus einem gleich Null gesetzten Systeme bei $x=a$ regulärer Differentialausdrücke

$$(5.)\quad f(y,\ x)=y_1,\quad f_1(y_1,\ x)=y_2,\quad \ldots,\quad f_{k-1}(y_{k-1},\ x)=0$$

hervorgegangen sein. Indem man eine gewisse Anzahl ε Glieder in den $\psi_a(x)$ entwickelt, alsdann die Integrationen in (4.) ausführt, erhält man dieselbe Anzahl ε Glieder in jedem Factor der Logarithmenpotenzen, und es ergiebt sich, welches die höchste Logarithmenpotenz mit nicht verschwindendem Factor in jedem Integrale ist. Wenn in einer Gruppe von Exponenten aus der Reihe r_1 bis r_m, die sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, worin sämmtliche Exponenten dieser Art vorkommen, der Exponent ϱ_1 den grössten, ϱ_s den kleinsten reellen Theil hat, so ist hierbei für die betreffende Gruppe von Integralen in den ψ jene Anzahl $\varepsilon \geqq \varrho_1-\varrho_s+1$ zu nehmen (vgl. Abh. Bd. 96 S. 242, Bd. 107 S. 78). Aus der ursprünglichen Differentialgleichung lässt sich eine homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten, die bei $x=a$ regulär ist, herleiten, welcher die Factoren der Logarithmenpotenzen genügen (Abh. Bd. 87 S. 276, Bd. 96 No. 15). Aus der hergeleiteten Differentialgleichung werden deren linear unabhängige Integrale ohne Logarithmen, in denen die Exponenten sich von denen in der betrachteten Gruppe nur um ganze Zahlen unterscheiden, aufgestellt unter der Form, dass die Anfangsexponenten in diesen Integralen sich um positive von Null verschiedene ganze Zahlen unterscheiden (Abh. Bd. 87 S. 286, etc.). Nun werden durch diese Integrale linear und homogen mit constanten Coefficienten die Factoren der Logarithmenpotenzen in den Integralen (4.) ausgedrückt. Diese constanten Coefficienten gehen aus den Entwickelungen der darzustellenden Functionen unmittelbar hervor. Zugleich ergiebt sich aus der genannten Differentialgleichung eine Recursionsformel für die Coefficienten der Entwickelungen mit constanter Anzahl der Glieder (l. c. S. 289).

Es sind also nun alle Factoren der Logarithmenpotenzen in den Integralen einer Gruppe aus (4.) *vermittelst derselben linear unabhängigen Func-*

tionen Y_1 *bis* Y_N *unter der Form*

$$k_1 Y_1 + k_2 Y_2 + \cdots + k_N Y_N \tag{6.}$$

ausgedrückt, wo die k bekannte Constanten sind, welche sich rational aus den Constanten der Differentialgleichung, aus welcher die Entwickelungen (4.) *hervorgehen, dem Punkte a und Wurzeln der Exponentengleichung bei a zusammensetzen.* Wenn man ϱ Grössen F_1, F_2 bis F_ϱ unter der Form (6.) gegeben hat, und von F_1 bis $F_{\varrho-1}$ bereits die Linearunabhängigkeit nachgewiesen ist, so kann man letztere Grössen successive für ebenso viele Y in den Ausdruck F_ϱ einführen. Je nachdem dann in diesem Ausdrucke noch ein Y mit von Null verschiedenem Coefficienten vorkommt oder nicht, ist F_ϱ von F_1 bis $F_{\varrho-1}$ linear unabhängig, oder durch letztere Grössen dargestellt.

Jetzt kann man aus einer Gruppe der aus (4.) hervorgehenden Ausdrücke von Integralen, welche alle Integrale umfasst, deren Exponenten sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, in folgender Weise eine aus Untergruppen bestehende Gruppe herleiten.

Aus der betrachteten Gruppe I von Integralen aus (4.) werden diejenigen Integrale, welche die höchste Logarithmenpotenz enthalten, herausgenommen. Dann werden nach dem bei (6.) Bemerkten unter den Factoren dieser Potenz die linear unabhängigen ermittelt und die Ausdrücke der übrigen linear und homogen mit constanten Coefficienten durch die linear unabhängigen aufgestellt. Von einem Integrale, welches einen der letzteren Ausdrücke enthält, werden die Integrale, in denen die linear unabhängigen Factoren vorkommen, bezüglich multiplicirt mit den genannten Constanten abgezogen, und diese Differenz wird an Stelle jenes Integrales gesetzt. Auf diese Weise erhält man eine neue Gruppe II mit linear unabhängigen Integralen in derselben Anzahl, in welcher die Integrale mit der höchsten Logarithmenpotenz unter einander linear unabhängige Factoren haben.

Jedes der letzteren Integrale liefert eine Untergruppe (2.). In der vorhin genannten Gruppe II sind weiter die Integrale zu betrachten, deren höchste Logarithmenpotenz um 1 niedriger, als die höchste in der Gruppe ist. Auf gleiche Weise wie vorhin werden unter den Factoren dieser Potenz die linear unabhängigen ermittelt und die Ausdrücke der übrigen linear und homogen mit constanten Coefficienten durch die linear unabhängigen hergestellt. Dann werden von einem der Integrale, in dem einer der letzteren Ausdrücke sich findet, die Integrale welche die linear unabhängigen Factoren enthalten, multiplicirt mit den genannten zugehörigen

Constanten abgezogen und diese Differenz wird an Stelle jenes Integrales gesetzt. Man erhält dadurch eine neue Gruppe III linear unabhängiger Integrale in derselben Anzahl, in welcher die Integrale mit der höchsten Logarithmenpotenz diejenigen aus den bisherigen Untergruppen sind, und in welcher die Integrale, deren höchste Logarithmenpotenz um 1 niedriger ist, linear unabhängige Factoren dieser Potenz haben. Durch letztere Integrale und die mit niedrigeren Logarithmenpotenzen ist nun das Integral aus je einer der bisherigen Untergruppen, dessen höchste Logarithmenpotenz um 1 niedrigerer als die höchste der Untergruppen ist, linear und homogen mit constanten Coefficienten darstellbar. Man kann den Factor dieser Logarithmenpotenz in dem Integral der Untergruppe durch die Factoren derselben Logarithmenpotenz in den Integralen der Gruppe III, in denen diese Logarithmenpotenz die höchste ist, nach (6.) ausdrücken und dadurch erkennen, welche von diesen Integralen in den vorhin genannten linearen Ausdruck eingehen, alsdann eines dieser Integrale durch das Integral der Untergruppe ersetzen. Man erhält dadurch eine neue Gruppe an Stelle der vorigen. Auf diese Weise stellt man schliesslich eine Gruppe IV von linear unabhängigen Integralen in der ursprünglichen Anzahl her, in welcher die Integrale mit der höchsten Logarithmenpotenz diejenigen aus den bisherigen Untergruppen sind, die Integrale, deren höchste Logarithmenpotenz um 1 niedriger ist, linear unabhängige Factoren dieser Potenz haben und unter diesen Integralen die aus den bisherigen Untergruppen vorkommen.

Wenn unter letzteren Integralen neben den aus den bisherigen Untergruppen noch andere sich finden, so erfolgen aus diesen nach (2.) weitere Untergruppen. Nun ist das vorige Verfahren wieder einzuschlagen und fortzusetzen, bis die Gesammtanzahl der Integrale in den erlangten Untergruppen die Zahl der Integrale in der Gruppe erreicht hat.

Um dann ein Integral aus der ursprünglichen Gruppe aus (4.) durch die Integrale der Untergruppen darzustellen, wird zuerst der Factor der höchsten Logarithmenpotenz nach (6.) durch die Factoren derselben Logarithmenpotenz in den Integralen der Untergruppen, welche diese als höchste Potenz enthalten, linear und homogen mit constanten Coefficienten ausgedrückt. Dann werden bei der um 1 niedrigeren Logarithmenpotenz von dem Factor in dem darzustellenden Integral die Factoren in den vorigen Integralen der Untergruppen bezüglich multiplicirt mit den genannten Con-

stanten abgezogen und es wird diese Differenz nach (6.) linear und homogen mit constanten Coefficienten durch die Factoren derselben Logarithmenpotenz in den Integralen der Untergruppen, welche dieselbe als höchste Potenz enthalten, ausgedrückt. In gleicher Weise ist fortzufahren.

III. Ein System normaler Elementarintegrale

$$(7.) \qquad \mu_1 \int dx \mu_1^{-1} \mu_2 \int \cdots \int dx \mu_{l-1}^{-1} \mu_l \int \mu_l^{-1} e^w S\, dx$$

sei vorgelegt, wo S die Integrale (4.) sind, w gleich Null oder von der Form $\sum_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$ ist, und die Exponenten in den μ sich von einer betrachteten Gruppe nur um ganze Zahlen verschiedener Exponenten in den ν (4.) nicht um ganze Zahlen unterscheiden sollen. Bei den Integrationen wird das constante Glied annullirt. Der betreffenden vollständigen Gruppe nur um ganze Zahlen verschiedener Exponenten in den ν entspricht eine Gruppe von Integralen (4.), in denen die Exponenten sich nur um ganze Zahlen unterscheiden. Diese Gruppe wird nach II. durch eine Reihe von Untergruppen vertreten. Ein Integral S dieser Gruppe sei durch die Integrale S'_α, S'_β etc. der Untergruppen ausgedrückt

$$(8.) \qquad S = c_\alpha S'_\alpha + c_\beta S'_\beta + \cdots,$$

wo also die c_α, c_β etc. nach II. bekannte Constanten sind. Der Ausdruck (7.), worin die Entwickelung des Integrales S steht, sei durch T bezeichnet, und wenn in dem Ausdrucke (7.) an Stelle von S die Entwickelungen S'_α, S'_β etc. stehen, so seien die entsprechenden Ausdrücke durch T'_α, T'_β etc. bezeichnet. Dann ergiebt sich aus (8.)

$$(9.) \qquad T = c_\alpha T'_\alpha + c_\beta T'_\beta + \cdots.$$

Durch (9.) ist der Zusammenhang zwischen den ursprünglichen Integralen T und den Integralen T' bestimmt. Es wird nun gezeigt, dass die Integrale T', welche durch Einsetzen der S' aus einer Untergruppe der Form (2.) an Stelle von S in (7.) gebildet werden, selbst eine Untergruppe der Form (2.) liefern. Dieses ergiebt sich aus der Formel (3.) für einen z-maligen Umgang. In (7.) wird für S die Grösse $S'_\lambda = u_\lambda$ aus einer der Untergruppen (2.) gesetzt und in dem hierdurch hervorgehenden Integrale (7.) ein z-maliger Umgang vollzogen. Das Resultat dieses Umganges wird erhalten, wenn in (7.) an Stelle von S der aus S'_λ hergeleitete Ausdruck (3.) tritt und die Integrationen vollzogen werden (da die Integrationsconstante jedesmal anullirt wird und die Exponenten in den μ sich von denen in der

Gruppe nicht um ganze Zahlen unterscheiden, vgl. Abh. Bd. 96 No. 13 (17.)). Dieses Resultat wird also durch Formel (3.) ausgedrückt, wenn dort an Stelle von u_λ, $u_{\lambda-1}$ bis u_1 tritt bezüglich T'_λ, $T'_{\lambda-1}$ bis T'_1. Andererseits wird dasselbe Resultat durch Formel (3.) gegeben, wenn T'_λ gleich u_λ in (2.) gesetzt wird, alsdann $u_{\lambda-1}$ bis u_1 aus (2.) entnommen werden. Es müssen nun in der auf diese Weise hervorgehenden Gleichung die Factoren gleich hoher Potenzen des Logarithmus auf beiden Seiten übereinstimmen und zwar für beliebige ganzzahlige Werthe von x. Hieraus folgt dann $T'_\lambda = u_\lambda$, $T'_{\lambda-1} = u_{\lambda-1}$ bis $T'_1 = u_1$. Aus der Formel (7.) ergiebt sich: Wenn in einem Ausdrucke von S der Factor der höchsten Logarithmenpotenz $(x-a)^r\varphi$ ist, so bleibt diese Logarithmenpotenz als höchste in der Entwickelung des Integrales (7.) und hat als Factor den Ausdruck (7.), worin $(x-a)^r\varphi$ an Stelle von S steht. Daraus folgt, dass in verschiedenen Untergruppen die Integrale T' von übereinstimmender höchster Logarithmenpotenz linear unabhängige Factoren dieser Potenz haben. *Also wird durch Einsetzen der Integrale S' einer Untergruppe an Stelle von S in* (7.) *eine Untergruppe von Integralen T' der Form* (2.) *erhalten, und es geht vermittelst der Reihe von Untergruppen der Integrale S' eine Reihe von Untergruppen der Integrale T' von der in I. angegebenen Beschaffenheit hervor.*

Wenn man mehrere Ausdrücke (7.) hat, in denen die μ dieselben, dagegen die Grössen w in e^w unter einander verschieden, S dieselben oder andere reguläre Integrale sind, und wenn man für jeden dieser Ausdrücke (7.) nach dem Vorhergehenden Untergruppen bildet mit Exponenten, die sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, so erzielt man im Ganzen wieder eine Reihe von Untergruppen von der in I. angegebenen Eigenschaft. Denn die Factoren der nämlichen Logarithmenpotenz in den Integralen, welche diese Potenz als höchste enthalten, sind linear unabhängig, was darauf zurückkommt, dass Grössen $e^w\varphi$, in denen die w von der Form in (7.) aber unter einander verschieden sind, die Entwickelungen der φ nur positive ganzzahlige Exponenten enthalten, linear unabhängig sind (vgl. Abh. Bd. 83 S. 101). Dieser Fall tritt bei einer Differentialgleichung, deren Differentialausdruck ein System normaler Differentialausdrücke ist, ein, sobald die in Abh. Bd. 96 No. 22 I A. c. angegebenen Bedingungen erfüllt sind.

Bei einem singulären Punkte einer Differentialgleichung, in welcher ein System normaler Differentialausdrücke gleich Null gesetzt ist, seien die Gruppen der ursprünglich aufgestellten Integrale (Abh. Bd. 96 No. 21,

No. 22 I A) durch Reihen von Untergruppen in der bei (7.), (8.), (9.) angegebenen Weise ersetzt. Der Zusammenhang der ursprünglichen Integrale mit den neuen wird unter Anwendung der Substitutionen (9.) gegeben; die von Null verschiedene Determinante der Substitutionsconstanten ist bekannt. Die Differentialdeterminante der neuen Integrale ist gleich derjenigen der ursprünglichen, welche nach den Angaben Bd. 96 No. 21 hergestellt wird, dividirt durch die vorhin genannte Determinante der Substitutionsconstanten.

4.

Der Differentialausdruck in einer homogenen linearen Differentialgleichung sei ein System normaler Differentialausdrücke. Die homogene lineare Differentialgleichung, welche durch die erste Ableitung der Integrale und nur durch diese erfüllt wird, enthält als Differentialausdruck wieder ein System normaler Differentialausdrücke, dessen determinirende Factoren der Reihe nach dieselben wie vorhin sind, wobei in diesem Systeme als Bestandtheil auch ein Differentialausdruck nullter Ordnung mit dem determinirenden Factor 1 auftreten kann. (Entsprechend für ein System bei einem Punkte normaler Differentialausdrücke (Abh. Bd. 96 No. 9)). Für jenen Differentialausdruck war ein System normaler Differentialausdrücke in Abh. Bd. 87 S. 281 hergeleitet und durch ein etwas anderes Verfahren in Abh. Bd. 107 S. 60. Um das eine Verfahren mit dem anderen in Beziehung zu bringen, dienen folgende Bemerkungen. Die in Abh. Bd. 87 angegebene Herleitung wird erhalten, wenn die in Abh. Bd. 107 aufgestellte in folgender Weise abgeändert wird. Es wird hier bei (7.) nach den Worten „wo A_r^{-1} der Coefficient von y'_{r-1} in dem Ausdrucke $S_r(A_{r-1}^{-1}y'_{r-1}, x)$, und wenn dieser Coefficient gleich Null“ gesetzt „so soll A_r, A_{r+1} etc. gleich 1 sein“. Alsdann wird der Satz nach (8.) durch folgenden ersetzt: „Ist in einem Bestandtheile von (7.) der Coefficient der nullten Ableitung gleich Null und in den vorhergehenden Bestandtheilen gleich Null oder 1, so werden diese vorhergehenden Ausdrücke differentiirt und $\frac{dy}{dx} = z$ gesetzt, die übrigen Bestandtheile bleiben unverändert. In Abh. Bd. 87 waren die dem ersten derartigen Bestandtheile vorhergehenden differentiirt.

Bemerkung: Bd. 115 S. 121 Zeile 10 von unten ist „Exponenten“ statt „Coefficienten“ zu setzen, S. 131 Zeile 10 von unten ist nach als „der reelle Theil von“ hinzuzufügen.

Canonical forms for the unique representation of *Kroneckers* modular systems*).

(By Mr. *Harris Hancock* in Chicago.)

The fundamental conceptions of modular systems are found in *Kroneckers „Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen“*, a *Festschrift zu Kummers Doctorjubiläum*, which is reprinted in this journal, vol. XCII, p. 1—123.

Professor *Kronecker* emphasized in this memoir the arithmetical side of algebra and gave a more extended and complete exposition of the results of previous publications and of his University lectures. Algebraic questions are treated by arithmetical methods. In a more recent work (this journal, vol. XCIX, p. 329—371) *Kronecker* employed his modular systems in the discussion of algebraic problems.

Kronecker developed still farther the subject-matter of the „Grundzüge“ in his later lectures at the University of Berlin. With the help of notes on these lectures Mr. *Molk* (Acta Math., vol. 6) has extended some of *Kroneckers* ideas in a paper entitled *„Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité et sur la théorie générale de l'élimination“*.

Prof. *Hensel* has contributed many valuable papers to this subject in the recent numbers of this journal.

Guided much by *Kronecker* lectures I (Quart. Journ. of Pure and Applied Math., No. 106, 1894) have discussed the question of the *„Reduction of Kroneckers Modular Systems“*.

In the present work I have shown that the most general modular system may be reduced to a form, which is of such a nature that, however

*) Diese Arbeit, welche am 15. Januar 1897 der Redaction zugestellt worden ist, ist ohne Kenntniss der von Herrn *Hensel* in diesem Journal Bd. 118 Heft 3 über diesen Gegenstand veröffentlichten Resultate abgefasst worden.

Der Herausgeber.

the reduction of the original system may have been performed, the final form which is equivalent to my form, is identical to it.

I.

Reduction of modular systems into forms which have as constant elements prime numbers raised perhaps to certain powers.

In the present discussion only integers and integral functions of the variable x with integral coefficients are admitted into the realm of integrity*), which may be denoted by $[1, x]$.

Let $A, M_1, M_2, \ldots, M_\mu, A', M_1', M_2', \ldots, M_\nu'$ be integral quantities that belong to the prescribed realm of integrity. The equivalence (see also references in the footnote below) of two modular systems

$$(M_1, M_2, \ldots, M_\mu), \quad (M_1', M_2', \ldots, M_\nu'),$$

and the congruence of the two quantities A, A' with regard to one of these systems may be defined by a system of equations:

$$\text{(A.)} \qquad A = A' + \sum_k C_{k0}' M_k', \quad A' = A + \sum_h C_{h0} M_h,$$

$$\text{(B.)} \qquad M_h = \sum_k C_{kh}' M_k', \qquad M_k' = \sum_h C_{hk} M_h, \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots, \mu \\ k = 1, 2, \ldots, \nu \end{pmatrix}$$

in which the C's and C''s are also integral quantities of the realm of integrity $[1, x]$.

These same equations serve also to define the equivalence of the linear forms

$$A + \sum_{h=1}^{h=\mu} M_h X_h, \quad A' + \sum_{k=1}^{k=\nu} M_k' X_k',$$

since by means of equations (A.) and (B.) these forms may be transformed the one into the other by means of substitutions with integral coefficients which belong to the realm of integrity $[1, x]$; and the equivalence of these two linear forms is in turn characterized by the congruence

$$A \equiv A' \pmod{M_1, M_2, \ldots, M_\mu},$$

in connection with the equivalence

$$(M_1, M_2, \ldots, M_\mu) \backsim (M_1', M_2', \ldots, M_\nu').$$

---

*) See *Kronecker*, „Grundzüge etc.“, this journal, vol. XCIX p. 3 et sq., and vol. XCII p. 332 et sq.; or *Molk*, Acta Math., vol. 6, p. 20; or *Hancock*, Quart. Journ., No. 106, p. 152 et sq.

Again, if the μ congruences

$$M_h \equiv 0 \pmod{M_1', M_2', \ldots, M_\nu'} \qquad (h = 1, 2, \ldots, \mu)$$

exist, the modular system $(M_1, M_2, \ldots, M_\mu)$ *contains* the system $(M_1', M_2', \ldots, M_\nu')$ and, if the systems mutually contain each other, we have the equivalence

$$(M_1, M_2, \ldots, M_\mu) \backsim (M_1', M_2', \ldots, M_\nu').$$

It is evident that any system $(M_1, M_2, \ldots, M_\mu)$ may be transformed into an equivalent system by adding to or subtracting from any element in the system one or more of the other elements; and any element may be added to a modular system or taken away from it, when this element is a linear homogeneous function of the remaining elements of the modular system.

If $m_1, m_2, \ldots, m_\mu$ are integers, then

$$(m_1, m_2, \ldots, m_\mu) \backsim (d),$$

where d is the greatest common divisor of the elements that compose the system.

Consider next the modular system

$$(\mathrm{I.}) \qquad (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_\mu(x)),$$

where the f's are integral functions of x with integral coefficients.

The greatest common divisor of two integral functions

$$f_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m,$$
$$f_2(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n,$$

where the a's and b's denote integers, and where $m \gtreqless n$, may be found as follows:

Divide $f_1(x)$ by $f_2(x)$ and let the quotient be $g(x)$ and the remainder $r(x)$, so that

$$f_1(x) = g(x) f_2(x) + r(x).$$

Further let $g(x) = \dfrac{g_1(x)}{n_1}$, where n_1 is the least common multiple of the fractions that may occur in the coefficients of $g(x)$, so that therefore $g_1(x)$ has only integral coefficients. Also write $r(x) = -\dfrac{f_3(x)}{n_1}$.

Hence

$$n_1 f_1(x) - g_1(x) f_2(x) + f_3(x) = 0,$$

and similarly

$$\begin{aligned} n_2 f_2(x) - g_2(x) f_3(x) + f_4(x) &= 0, \\ n_3 f_3(x) - g_3(x) f_4(x) + f_5(x) &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\

The system may therefore be written in the form

$$(m,\ f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots,\ f_\mu(x),\ f_\nu(x),\ \ldots).$$

The coefficients in $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... may be reduced so as to be at most equal to $m-1$. This we shall suppose has been done, and we shall retain the same notation.

The functions $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... may have constant factors, so that we may write the reduced modular system in its most general form

$$\text{(II.)} \qquad (m,\ m_1f_1(x),\ m_2f_2(x),\ \ldots),$$

where m_1, m_2, ... are less than m.

If the integers m_1, m_2, ... are not all divisors of m, we can replace the system $(m,\ m_1f_1(x),\ m_2f_2(x),\ \ldots)$ by an equivalent system, in which all the constant factors of the functions are divisors of m. For we may add to the given system any element $nf_1(x)$, and we may so choose constants α and β that $\alpha m_1+\beta n = t_1$, where t_1 is a divisor of m, and similarly for m_2, etc.

If $m = \mu.\nu$, where μ and ν are relatively prime to each other, then

$$(m,\ t_1f_1(x),\ t_2f_2(x).\ \ldots) \backsim (\mu,\ t_1f_1(x),\ t_2f_2(x),\ \ldots).(\nu,\ t_1f_1(x),\ t_2f_2(x),\ \ldots).$$

For the right-hand side of this equivalence is composed of the four elements

$$\mu.\nu;\ (\mu t_1f_1(x),\ \mu t_2f_2(x),\ \ldots);\quad (\nu t_1f_1(x),\ \nu t_2f_2(x),\ \ldots);$$
$$(t_1f_1(x),\ t_2f_2(x),\ \ldots)(t_1f_1(x),\ t_2f_2(x),\ \ldots),$$

we may add to the system that contains these four elements

$$(\alpha\mu+\beta\nu)(t_1f_1(x),\ t_2f_2(x),\ \ldots) = H \quad \text{(say)},$$

where α and β are integers that have been so chosen that $\alpha\mu+\beta\nu = 1$.

The second, third and fourth elements of the system are linear homogeneous functions of $\mu.\nu$ and H, and as they add nothing new to the system, may be left out of it. The system then becomes

$$(\mu\nu,\ (\alpha\mu+\beta\nu)(t_1f_1(x),\ t_2f_2(x),\ \ldots),$$

or

$$(m,\ t_1f_1(x),\ t_2f_2(x),\ \ldots).$$

Hence, since $m = p_1^{h_1}.p_2^{h_2},\ \ldots$, where the p's denote prime integers, any modular system

$$(m,\ m_1f_1(x),\ m_2f_2(x),\ \ldots)$$

can be decomposed into

$$(p_1^{h_1},\ m_1f_1(x),\ m_2f_2(x),\ \ldots)(p_2^{h_2},\ m_1f_1(x),\ m_2f_2(x),\ \ldots)(\ldots)(\ldots)\ldots(\ldots).$$

We have therefore te consider the modular systems where the constants of the systems are primes or powers of primes.

The general form of such a system is

$$(p_k^{h_k},\ m_1 f_1(x),\ m_2 f_2(x),\ \ldots).$$

Since m_1, m_2, ... are divisors of $p_k^{h_k}$, the most general form of modular systems, which may arise in the present investigation is of the nature

$$\text{(III.)}\quad \begin{cases} (p^h,\ p^{h-1}g_1(x),\ p^{h-1}g_2(x),\ p^{h-1}g_3(x),\ \ldots,\ p^{h-2}\Phi_1(x),\ p^{h-2}\Phi_2(x),\ \ldots, \\ \qquad\qquad pX_1(x),\ pX_2(x),\ \ldots,\ \Psi_1(x),\ \Psi_2(x),\ \ldots). \end{cases}$$

II.

Further reduction of modular systems.

1⁰ When the prime is of the first degree, the most general form of the system is

$$(p,\ f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x)),$$

in which the functions of x are so arranged that the degree of $f_1(x)$ is greater than or equal to that of $f_2(x)$, the degree of $f_2(x)$ being greater than or equal to that of $f_3(x)$, etc.

Suppose that

$$f_1(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots.$$

The equivalence of the system is not altered if we add $f_1(x)$ repeated $k-1$ times, where k is an integer such that $ka_0 \equiv 1 \pmod{p}$. The other coefficients we suppose reduced (mod.p). Hence keeping the same notation we may suppose that the coefficient of the highest degree of x in each of the functions $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... is unity, while the other coefficients are reduced (mod.p).

We may take out of $f_1(x)$ all multiples of $f_2(x)$ as follows:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = q_1 - \frac{f_\lambda(x)}{f_2(x)},$$

where q_1 is an integer or an integral function of x, as is also $f_\lambda(x)$.

Hence

$$f_1(x) - q_1f_2(x) + f_\lambda(x) = 0,$$

or

$$f_\lambda(x) \equiv 0(f_1(x),\ f_2(x));$$

and therefore

$$(p,\ f_1(x),\ f_2(x)) \backsim (p,\ f_2(x),\ f_3(x)),$$

where $f_3(x)$ is of lower degree than either $f_1(x)$ or $f_2(x)$.

Continuing this process, the system finally reduces to the form

$$(p,\ f_{\nu-1}(x),\ f_\nu(x)).$$

In this system *either* $f_{\nu-1}(x)$ is divisible by $f_\nu(x)$, and the system is then equivalent to

$$(p,\ f_\nu(x)),$$

where $f_\nu(x)$ is an integral function of x, whose coefficients are all positive and less than p, *or* f_ν is an integer, and then the system is equivalent to unity, and ceases to be of interest.

Proceeding as above, we may replace $f_\nu(x)$ by $f(x)$, where the coefficients of the highest power of x in $f(x)$ is unity, and the other coefficients are reduced (mod.p), so that $f(x)$ has the form $\tau_0+\tau_1 x+\tau_2 x^2+\cdots+x^m$,

$$\text{where}\quad 0 \leqq \tau_k \leqq p-1.$$

The equivalent modular system of the system $(p, f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ is therefore

(1.) $$(p,\ f(x)).$$

2^0. When the prime occurs raised to the second degree in the system, its most general form is

(a.) $$(p^2,\ p\varphi_1(x),\ p\varphi_2(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots).$$

We make the auxiliary system

$$(p,\ f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots).$$

From (1.) above

$$(p,\ f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots) \backsim (p,\ \bar{f}(x)),$$

where $\bar{f}(x)$ is a function having similar properties as $f(x)$ in the system (1.). From this equivalence follows that

$$\begin{aligned} f_1(x) &= pF_1(x)+\bar{f}(x)\bar{f}_1(x),\\ f_2(x) &= pF_2(x)+\bar{f}(x)\bar{f}_2(x),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

where $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $\bar{f}_1(x)$, $\bar{f}_2(x)$, ... are integers or integral functions of x with integral coefficients, which belong to the realm of integrity $[1, x]$.

It also follows that

$$\bar{f}(x) = \sum_{k=1,2,\ldots} f_k(x)g_k(x)+pF(x),$$

where $g_k(x)$ and $F(x)$ are likewise quantities of the realm $[1, x]$.

We define the function $f(x)$ by the relation

$$f(x) = \bar{f}(x)-pF(x) = \sum_{k=1,2,\ldots} f_k(x)g_k(x).$$

We have at once from the relations above

$$f_k(x) = p\bar{F}_k(x)+f(x)\bar{f}_k(x), \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

where $F(x)$ belongs to the realm of integrity $[1, x]$.

The function $f(x)$ may be added to the system (a.), and writing in this system the values of $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... just derived, it becomes

$$(p^2,\ p\varphi_1(x),\ p\varphi_2(x),\ \ldots,\ p\bar{F}_1(x)+f(x)\bar{f}_1(x),\ p\bar{F}_2(x)+f(x)\bar{f}_2(x),\ \ldots,\ f(x)),$$

which system is equivalent to

$$(p^2,\ p\varphi_1(x),\ p\varphi_2(x),\ \ldots,\ p\bar{F}_1(x),\ p\bar{F}_2(x),\ \ldots f(x)),$$

that is, to

$$(p(p,\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \bar{F}_1(x),\ \bar{F}_2(x),\ \ldots),\ f(x)),$$

which from (1.) above, becomes

$$(p(p,\ g(x)),\ f(x)) \backsim (p^2,\ pg(x),\ f(x)).$$

The coefficient in $g(x)$ may be considered reduced (mod.p), and those of $f(x)$, reduced (mod.p^2).

Hence

(2.) $(p^2,\ p\varphi_1(x),\ p\varphi_2(x),\ \ldots,\ f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots) \backsim (p^2,\ pg(x),\ f(x))$.

3°. When the third power of the prime enters the system, it may be written

(b.) $(p^3,\ p^2f_1(x),\ p^2f_2(x),\ \ldots,\ p\Phi_1(x),\ p_2\Phi_2(x),\ \ldots,\ \Psi_1(x),\ \Psi_2(x),\ \ldots)$.

From the auxiliary system

$$(p^2,\ p\Phi_1(x),\ p\Phi_2(x),\ \ldots,\ \Psi_1(x),\ \Psi_2(x),\ \ldots) \backsim (p^2,\ pG(x),\ F(x)),$$

we have

$$\Psi_k(x) = p^2H_k(x)+pG(x)\bar{G}_k(x)+F(x)\bar{F}_k(x), \qquad (k=1, 2, \ldots)$$

where $H_k(x)$, $\bar{G}_k(x)$ and $\bar{F}_k(x)$ are quantities belonging to the realm $[1, x]$; and

$$F(x) = p^2h(x)+p\sum_{k=1,2,\ldots}\Phi_k(x)\bar{\Phi}_k(x)+\sum_{\lambda=1,2,\ldots}\Psi_\lambda(x)\bar{\Psi}_\lambda(x),$$

where $h(x)$, $\overline{\Phi}_\varkappa(x)$, $\overline{\Psi}_\lambda(x)$ belong to the realm of integrity $[1, x]$. Now write

$$f(x) = F(x) - p^2 h(x) = p \sum_{\varkappa=1,2,\ldots} \Phi_\varkappa(x)\overline{\Phi}_\varkappa(x) + \sum_{\lambda=1,2,\ldots} \psi_\lambda(x)\overline{\psi}_\lambda(x).$$

Then it follows that

$$\Psi_\varkappa(x) = p^2\overline{H}_\varkappa(x) + pG(x)\overline{G}_\varkappa(x) + f(x)\overline{F}_\varkappa(x),$$

where $\overline{H}_\varkappa(x)$ is an integral function of x or an integer.

It is clear that $f(x)$ may be added to the system (b.), which becomes, when the above values are written for $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ...

$$(p^3, p^2 f_1(x), p^2 f_2(x), \ldots, p\Phi_1(x), p\Phi_2(x), \ldots, p^2\overline{H}_1(x) + pG(x)\overline{G}_1(x) + f(x)\overline{F}_1(x),$$
$$p^2\overline{H}_2(x) + pG(x)G_2(x) + f(x)\overline{F}_2(x), \ldots, f(x)).$$

This system is equivalent to

$$(3.)\quad \begin{cases} (p^3, p^2 f_1(x), p^2 f_2(x), \ldots, p\Phi_1(x), p\Phi_2(x), \ldots, p^2\overline{H}_1(x) + pG(x)\overline{G}_1(x), \\ \qquad\qquad p^2\overline{H}_2(x) + pG(x)\overline{G}_2(x), \ldots, f(x)) \\ \sim (p(p^2, pf_1(x), pf_2(x), \ldots, \Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots, p\overline{H}_1(x) + G(x)\overline{G}_1(x), \\ \qquad\qquad p\overline{H}_2(x) + G(x)\overline{G}_2(x), \ldots), f(x)) \\ \sim (p(p^2, p\theta(x), g(x)), f(x)) \sim (p^3, p^2\theta(x), pg(x), f(x)). \end{cases}$$

The coefficients of $\theta(x)$ may be considered reduced (mod.p), those of $g(x)$ reduced (mod.p^2), while those of $f(x)$ are reduced (mod.p^3); and this is an essential reason why the auxiliary system was taken having p raised to the second power.

Proceeding in the same manner and taking the auxiliary system whith p raised to the third power, it is easy to see that the most general form of modular system with p to the fourth power is equivalent to

$$(4.)\qquad (p^4, p^3 f(x), p^2 g(x), ph(x), k(x)),$$

where the coefficients of $f(x)$ are reduced (mod.p), of $g(x)$ (mod.p^2), of $h(x)$ (mod.p^3) and of $k(x)$ (mod.p^4).

In general the modular system having as constant term the nth power of p is equivalent to

$$(\text{n.})\quad (p^n, p^{n-1}f(x), p^{n-2}g(x), p^{n-3}h(x), \ldots, r(x), s(x), t(x)),$$

where $f(x)$ has nothing to do with $f(x)$ used above, and is reduced (mod.p), $g(x)$ is reduced (mod.p^2), ..., $r(x)$ is reduced (mod.p^{n-2}), $s(x)$ (mod.p^{n-1}) and $t(x)$ (mod.p^n).

III.

Canonical forms for these systems.

Let us return to system (1.) p. 154 which has the form

$$(p,\ \theta(x)),$$

where the coefficient of the highest power of x in $\theta(x)$ is unity, and the other coefficients have been reduced (mod.p).

1^0 Suppose that the original system $(p, f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ has been reduced by a different method to the form

$$(p,\ \theta_1(x)),$$

where the coefficient of the highest power of x in $\theta_1(x)$ is unity, and the other coefficients are at most equal to $p-1$.

The question naturally arises *is $\theta_1(x)$ the same function of x as is $\theta(x)$, that is, is $(p, \theta(x))$ the unique reduction of the original system.*

From the equivalence

$$(I.) \qquad (p,\ \theta(x)) \sim (p,\ \theta_1(x)),$$

we have

$$\theta(x) \equiv \Phi(x)\theta_1(x) \pmod{p},$$
$$\theta_1(x) \equiv \Psi(x)\,\theta(x) \pmod{p},$$

where $\Phi(x)$ and $\Psi(x)$ are quantities belonging to $[1, x]$.

Multiplying both sides of the above congruences together, we have

$$\theta(x)\theta_1(x) = \Phi(x)\Psi(x)\theta(x)\theta_1(x) \pmod{p}.$$

Since neither $\theta(x)$ nor $\theta_1(x)$ is divisible by p, we may divide this congruence by the product $\theta(x)\theta_1(x)$, so that

$$1 \equiv \Phi(x)\Psi(x) \pmod{p}.$$

Let the degrees of $\Phi(x)$ and $\Psi(x)$ be m and n respectively, so that the congruence takes the form

$$(a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots)(b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots) \equiv 1 \pmod{p}.$$

Since this congruence exists when the variable vanishes, and since the coefficients of the highest powers of x in $\theta(x)$ and $\theta_1(x)$ are each unity, the congruence is of the form

$$(0+0+\cdots+0+1)(0+0+\cdots+0+1) \equiv 1 \pmod{p},$$

or $\Phi(x) = \Psi(x) = 1$; and consequently $\theta(x) \equiv \theta_1(x) \pmod{p}$.

The coefficients of like powers of x in these two functions must be equal, since they are all less than p. *Hence* $\theta(x) = \theta_1(x)$ *and* $(p, \theta(x))$ *may therefore be considered a canonical form for the unique representation of the modular system*

$$(p, f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)).$$

2^0 We consider next the reduced system in which p enters to the second degree. This is (p. 155) of the form

$$(p^2, pg(x), f(x)).$$

From the auxiliary system

$$(p, g(x), f(x)) \backsim (p, \theta(x),$$

where the initial coefficient of $\theta(x)$ is unity and the others are reduced (mod.p), we have

$$\theta(x) \equiv 0 \quad (\text{modd.}p, g(x), f(x)),$$

or

$$p\theta(x) \equiv 0 \quad (\text{modd.}p^2, pg(x), f(x));$$

and also

$$f(x) = \theta(x)\theta^{(1)}(x) + p\varphi(x),$$

in which $\theta^{(1)}(x)$ and $\varphi(x)$ are integral functions of the realm of integrity $[1, x]$. To save repetition all new quantities that are introduced may once for all be considered as belonging to this realm, and for brevity we shall use the function sign alone for the function of x.

The reduced system may be then written

$$(p^2, pg, p\theta, p\varphi + \theta\theta^{(1)}).$$

But from (1.)

$$g \equiv 0 \quad (\text{modd.}p, \theta),$$

and therefore

$$pg \equiv 0 \quad (\text{modd.}p^2, p\theta),$$

so that we may omit pg from the above system, which becomes

$$(p^2, p\theta, p\varphi + \theta\theta^{(1)}).$$

Owing to the presence of p^2, $p\theta$ within this system, we may suppose that the coefficient of the highest power of x in $\theta^{(1)}$ is unity, while the others are reduced (mod.p); that the coefficients of φ have all been reduced (mod.p), and that the degree of φ is less than that of θ.

We may therefore assume in this system that:

(A.)
a) Initial coefficients of θ and $\theta^{(1)}$ are unity;
b) φ is of less degree than θ;
c) all the coefficients of the respective functions have been reduced (mod.p).

If by any other method of procedure the general system (a.) p. 154 has been reduced to a form

$$(p^2,\ p\theta_1,\ p\varphi_1+\theta_1\theta_1^{(1)}),$$

and if the conditions (A.) are true for the corresponding elements of this system, then from the equivalence

(II.) $$(p^2,\ p\theta,\ p\varphi+\theta\theta^{(1)}) \backsim (p^2,\ p\theta_1,\ p\varphi_1+\theta_1\theta_1^{(1)}),$$

it may be shown that $\theta=\theta_1$, $\varphi=\varphi_1$ and $\theta^{(1)}=\theta_1^{(1)}$.

For it follows from (II.) that

$$p\varphi_1+\theta_1\theta_1^{(1)} \equiv p\theta f+(p\varphi+\theta\theta^{(1)})g \pmod{p^2};$$

and therefore

$$\theta_1\theta_1^{(1)} \equiv \theta\theta^{(1)}g \pmod{p}.$$

And in a similar manner

$$\theta\theta^{(1)} \equiv \theta_1\theta_1^{(1)}g_1 \pmod{p}.$$

These two congruences, when multiplied together, give

$$\theta\theta^{(1)}\theta_1\theta_1^{(1)} \equiv \theta\theta^{(1)}\theta_1\theta_1^{(1)}gg_1 \pmod{p},$$

or

$$1 \equiv gg_1 \pmod{p}.$$

Hence as on p. 157, $g=g_1=1$, and consequently

(1.) $$\theta\theta^{(1)} \equiv \theta_1\theta_1^{(1)} \pmod{p}.$$

Further from (II.) we have

$$p\theta_1 \equiv p\theta.F+(\theta\theta^{(1)}+p\varphi)G \pmod{p^2}.$$

Hence $\varphi\theta^{(1)}G$ is divisible by p, and consequently also G, so that we write $G=G_1.p$; then from the above congruence

$$\theta_1 \equiv \theta.F+(\theta\theta^{(1)}+p\varphi)G_1 \pmod{p},$$

or

$$\theta_1 \equiv \theta[F+\theta^{(1)}G_1) \pmod{p}.$$

In the same manner it may be proved that

$$\theta \equiv \theta_1[F_1+\theta_1^{(1)}G_1^{(1)}] \pmod{p},$$

and consequently

$$\theta\theta_1 \equiv \theta\theta_1[F+\theta^{(1)}G_1][F_1+\theta_1^{(1)}G_1^{(1)}] \pmod{p}.$$

Hence as above

$$F+\theta^{(1)}G_1 = F_1+\theta_1^{(1)}G_1^{(1)} = 1,$$

and therefore

$$\theta \equiv \theta_1 \pmod{p};$$

but as the coefficients of both θ and θ_1 have been reduced (mod.p),

$$\theta = \theta_1;$$

and consequently from (1.)

$$\theta^{(1)} = \theta_1^{(1)}.$$

Owing to the equivalence (II.) we have

$$(p^2, p\theta, p\varphi+\theta\theta^{(1)}) \backsim (p^2, p\theta_1, p\varphi_1+\theta_1\theta_1^{(1)}, p\varphi+\theta\theta^{(1)})$$

or, since $\theta = \theta_1$ and $\theta^{(1)} = \theta_1^{(1)}$,

$$(p^2, p\theta, p\varphi+\theta\theta^{(1)}) \backsim (p^2, p\theta, p\varphi_1+\theta\theta^{(1)}, p(\varphi-\varphi_1)).$$

From the last equivalence follows that

$$p(\varphi-\varphi_1) \equiv p\theta.B+(p\varphi+\theta\theta^{(1)})A, \pmod{p^2},$$

and consequently $A\theta\theta^{(1)}$ must be divisible by p and therefore A is divisible by p, so that we may write $A = A_1p$.

The congruence becomes then

$$\varphi-\varphi_1 \equiv \theta.B+(p\varphi+\theta\theta^{(1)})A_1 \pmod{p},$$

or

$$\varphi-\varphi_1 \equiv \theta[B+A_1\theta^{(1)}] \pmod{p}.$$

Since the degree of θ is greater than that of either φ or φ_1, it follows that $B+A_1\theta^{(1)} \equiv 0 \pmod{p}$, and consequently also $\varphi-\varphi_1 \equiv 0 \pmod{p}$ and therefore

$$\varphi = \varphi_1.$$

We may therefore regard $(p^2, p\theta, p\varphi+\theta\theta^{(1)})$ *as a canonical form for the unique representation of modular systems that have a prime ocurring to the* 2nd *degree.*

3^0 The reduced form of modular systems, in which p^3 enters, was found (p. 156) to be of the form

$$(p^3, p^2f(x), pg(x), h(x)).$$

Make the auxiliary system

1) $(p^2, pf(x), g(x), h(x)) \backsim (p^2, p\theta(x), p\varphi(x)+\theta(x)\theta^{(1)}(x))$,

the conditions (A.) p. 159 being fulfilled.

It is evident from 1) that the equivalence of the reduced form is not affected when the elements $p^2\theta(x)$, $p^2\varphi(x)+p\theta(x)\theta^{(1)}(x)$ are added to it (see p. 158). The system becomes then

$$(p^3,\ p^2f,\ p^2\theta,\ pg,\ p^2\varphi+p\theta\theta^{(1)},\ h).$$

Since p^2f is linearly expressible in p^3, $p^2\theta$, $p^2\varphi+p\theta\theta^{(1)}$, as is also pg, these terms may be omitted from the system, which becomes then

$$(p^3,\ p^2\theta,\ p^2\varphi+p\theta\theta^{(1)},\ h).$$

Further from 1) we have

$$h = p^2\psi(x)+p\theta\theta^{(2)}+(p\varphi+\theta\theta^{(1)})\varphi^{(1)}.$$

The system which we have to discuss is

$$(p^3,\ p^2\theta,\ p^2\varphi+p\theta\theta^{(1)},\ p^2\psi+p\theta\theta^{(2)}+p\varphi\varphi^{(1)}+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}).$$

Owing to the presence of p^3, $p^2\theta$, $p^2\varphi+p\theta\theta^{(1)}$ whithin this system, we may suppose that the initial coefficient of $\varphi^{(1)}$ is unity; and we may assume:

(B.)
a) the initial coefficients of θ, $\theta^{(1)}$ and $\varphi^{(1)}$ are each unity;
b) φ and ψ are of lower degree than θ;
c) $\theta^{(2)}$ is of lower degree than $\theta^{(1)}$;
d) the coefficients of all the functions are reduced (mod.p).

Suppose that the original system was reduced by another method to a form corresponding to the one just written, where the corresponding elements conform to the conditions (B.), so that

(III.)
$$\begin{cases} (p^3,\ p^2\theta,\ p^2\varphi+p\theta\theta^{(1)},\ p^2\psi+p\theta\theta^{(2)}+p\varphi\varphi^{(1)}+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}) \\ \quad\sim (p^3,\ p^2\theta_1,\ p^2\varphi_1+p\theta_1\theta_1^{(1)},\ p^2\psi_1+p\theta_1\theta_1^{(2)}+p\varphi_1\varphi_1^{(1)}+\theta_1\theta_1^{(1)}\varphi_1^{(1)}.) \end{cases}$$

Whe shall see that the corresponding elements are identically equal.

As in the preceding investigations it follows at once from this equivalence that

$$\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)} \equiv \theta_1\theta_1^{(1)}\varphi_1^{(1)}f_1 \pmod{p},$$

and

$$\theta_1\theta_1^{(1)}\varphi_1^{(1)} \equiv \theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}f \pmod{p};$$

consequently $ff_1 \equiv 1 \pmod{p}$, and therefore $f_1 = f = 1$, to that

(1.)
$$\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)} \equiv \theta_1\theta_1^{(1)}\varphi_1^{(1)} \pmod{p}.$$

We have further from (III.)

$$p\theta_1\theta_1^{(1)} \equiv p\theta\theta^{(1)}B+(p\theta\theta^{(2)}+p\varphi\varphi^{(1)}+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)})A \pmod{p^2},$$

from which follows that A must be divisible by p; and writing $A = pA_1$,

we have

$$\theta_1\theta_1^{(1)} \equiv \theta\theta^{(1)}[B+\varphi^{(1)}A_1] \pmod{p},$$

and similarly

$$\theta\theta^{(1)} \equiv \theta_1\theta_{(1)}^{(1)}[B_1+\varphi_1^{(1)}A_1^{(1)}] \pmod{p}.$$

Hence as has been shown above

$$B+\varphi^{(1)}A_1 = B_1+\varphi_1^{(1)}A_1^{(1)} = 1,$$

and

$$\theta\theta^{(1)} \equiv \theta_1\theta_{(1)}^{(1)} \pmod{p}. \tag{2.}$$

Whence on referring to (1.)

$$\varphi^{(1)} = \varphi_1^{(1)}.$$

We find again from (III.) that

$$p^2\theta_1 \equiv p^2\theta C+[p^2\varphi+p\theta\theta^{(1)}]B+[p^2\psi+p\theta\theta^{(2)}+p\varphi\varphi^{(1)}+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}]A \pmod{p^3},$$

where A, B and C are used for convenience and have nothing to do with the same quantities previously used.

From this congruence one sees that $A = pA_1$, and therefore

$$p\theta_1 \equiv p\theta C+[p\varphi+\theta\theta^{(1)}]B+[p^2\psi+p\theta\theta^{(2)}+p\varphi\varphi^{(1)}+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}]A_1 \pmod{p^2}, \tag{α.}$$

and also

$$\theta\theta^{(1)}[B+\varphi^{(1)}A_1] \equiv 0 \pmod{p},$$

or

$$B = -\varphi^{(1)}A_1+pB_1.$$

Write this value of B in the above congruence, and it becomes

$$p\theta_1 \equiv p\theta C+p\varphi[-\varphi^{(1)}A_1+pB_1]+\theta\theta^{(1)}[-\varphi^{(1)}A_1+pB_1] \\ +[p^2\psi+p\theta\theta^{(2)}+p\varphi\varphi^{(1)}+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}]A_1 \pmod{p^2},$$

or

$$p\theta_1 \equiv p\theta C+p^2\varphi B_1+p\theta\theta^{(1)}B_1+[p^2\psi+p\theta\theta^{(2)}]A_1 \pmod{p^2}.$$

Hence

$$\theta_1 \equiv \theta[C+\theta^{(1)}B_1+\theta^{(2)}A_1] \pmod{p};$$

and similarly

$$\theta \equiv \theta_1[C^{(1)}+\theta_1^{(1)}B_1^{(1)}+\theta_1^{(2)}A_1^{(1)}] \pmod{p},$$

and consequently as above

$$\theta = \theta_1. \tag{3.}$$

This combined with (2.) gives

$$\theta^{(1)} = \theta_1^{(1)}.$$

Remark. It might happen in (α.) that $B = pB_1$ and $A = p^2A_1$.

It follows then at once that

$$\theta_1 \equiv \theta C+\theta\theta^{(1)}B_1+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}A_1 \pmod{p},$$

or

$$\theta_1 \equiv \theta[C+\theta^{(1)}B_1+\theta^{(1)}\varphi^{(1)}A_1] \pmod{p},$$

with an analogous expression for θ. The same reasoning is then applicable as was used before.

Proceeding as on p. 160, we write the equivalence (III.) in the form

$$\text{(III'.)}\quad \begin{cases} (p^3,\ p^2\theta,\ p^2\varphi+p\theta\theta^{(1)},\ p^2\psi+p\theta\theta^{(2)}+p\varphi\varphi^{(1)}+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}) \\ \sim (p^3,\ p^2\theta,\ p^2\varphi_1+p\theta\theta^{(1)},\ p^2[\varphi_1-\varphi],\ p^2\psi_1+p\theta\theta_1^{(2)}+p\varphi_1\varphi^{(1)}+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}, \\ \qquad\qquad p^2(\psi_1-\psi)+p\theta[\theta_1^{(2)}-\theta^{(2)}]+p\varphi^{(1)}[\varphi_1-\varphi]). \end{cases}$$

From this equivalence we have

$$p^2[\varphi_1-\varphi] \equiv p^2\theta c+[p^2\varphi+p\theta\theta^{(1)}]b+[p^2\psi+p\theta\theta^{(2)}+p\varphi\varphi^{(1)}+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}]a \pmod{p^3}.$$

It may be shown precisely as in the derivation of (3.) above, that

$$\varphi_1-\varphi \equiv \theta[c+\theta^{(1)}b_1+\theta^{(2)}a_1] \pmod{p}.$$

Since the degrees of φ_1 and φ are both less than the degree of θ (cf. (B.) p. 161), it follows that

$$\varphi = \varphi_1.$$

Again from the equivalence (III'.) we have

$$p^2(\psi_1-\psi)+p\theta[\theta_1^{(2)}-\theta^{(2)}] \equiv p^2\theta C+[p^2\varphi+p\theta\theta^{(1)}]B$$
$$+[p^2\psi+p\theta\theta^{(2)}+p\varphi\varphi^{(1)}+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}]A \pmod{p^3}.$$

Hence

$$A = pA_1,$$

and

$$\theta[\theta_1^{(2)}-\theta^{(2)}] \equiv \theta\theta^{(1)}[B+\varphi^{(1)}A_1] \pmod{p},$$

or

$$[\theta_1^{(2)}-\theta^{(2)}] \equiv \theta^{(1)}[B+\varphi^{(1)}A_1].$$

Since $\theta^{(1)}$ is of higher degree than either $\theta_1^{(2)}$ or $\theta^{(2)}$, it is evident as above that

$$\theta^{(2)} = \theta_1^{(2)}.$$

Since ψ_1 and ψ are of less degree than θ, it follows also as above that

$$\psi = \psi_1.$$

We have thus proved that all of the corresponding elements in the equivalence (III.) are identically equal, *so that we may consider the system*

$$(p^3,\ p^2\theta,\ p^2\varphi+p\theta\theta^{(1)},\ p^2\psi+p\theta\theta^{(2)}+\varphi\varphi^{(1)}+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)})$$

as the canonical form for the unique representation of modular systems that have as constant element p^3.

4°. The reduced system which contained p^4, was found (p. 156) to be

$$(p^4,\ p^3f,\ p^2g,\ ph,\ k).$$

Making use of the auxiliary system

$$(p^3,\ p^2f,\ pg,\ h,\ k) \backsim (p^3,\ p^2\theta,\ p^2\varphi+p\theta\theta^{(1)},\ p^2\psi+p\theta\theta^{(2)}+p\varphi\varphi^{(1)}+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}),$$

where the conditions (B.) p. 161, are fulfilled, it is found that the equivalence that corresponds to those hitherto discussed, is

$$\text{(IV.)}\quad \left\{\begin{array}{l} (p^4,\ p^3\theta,\ p^3\varphi+p^2\theta\theta^{(1)},\ p^3\psi+p^2\theta\theta^{(2)}+p^2\varphi\varphi^{(1)}+p\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)},\ p^3\chi+p^2\theta\theta^{(3)} \\ +p^2\varphi\varphi^{(2)}+p^2\psi\psi^{(1)}+p\theta\theta^{(1)}\varphi^{(2)}+p\theta\theta^{(2)}\psi^{(1)}+p\varphi\varphi^{(1)}\psi^{(1)}+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}\psi^{(1)}) \\ \backsim (p^4,\ p^3\theta_1,\ p^3\varphi_1+p^2\theta_1\theta_1^{(1)},\ p^3\psi_1+p^2\theta_1\theta_1^{(2)}+p^2\varphi_1\varphi_1^{(1)}+p\theta_1\theta_1^{(1)}\varphi_1^{(1)}, \\ \quad p^3\chi_1+p^2\theta_1\theta_1^{(3)}+p^2\varphi_1\varphi_1^{(2)}+p^2\psi_1\psi_1^{(1)}+p\theta_1\theta_1^{(1)}\varphi_1^{(2)}+p\theta_1\theta_1^{(2)}\psi_1^{(1)} \\ \qquad +p\varphi_1\varphi_1^{(1)}\psi_1^{(1)}+\theta_1\theta_1^{(1)}\varphi_1^{(1)}\psi_1^{(1)}). \end{array}\right.$$

Corresponding to, and derived in the same manner as the assumptions (A.) and (B.) p. 159 and 161 respectively, we may assume here that:

a) the initial coefficients in θ, $\theta^{(1)}$, $\varphi^{(1)}$ and $\psi^{(1)}$ are unity;

b) the degrees of φ, ψ and χ are lower than that of θ;

(C.) c) the degrees of $\theta^{(2)}$ and $\theta^{(3)}$ are lower than that of $\theta^{(1)}$;

d) $\varphi^{(2)}$ is of lower degree than $\varphi^{(1)}$;

e) the coefficients of all the functions are reduced (mod.p).

If we consider (1.) p. 161, it is seen that here

$$\text{(1.)}\qquad \theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}\psi^{(1)} \equiv \theta_1\theta_1^{(1)}\varphi_1^{(1)}\psi_1^{(1)} \pmod{p}.$$

From (IV.) we have

$$p\theta_1\theta_1^{(1)}\varphi_1^{(1)} \equiv p\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}B+[p\theta\theta^{(1)}\varphi^{(2)}+p\theta\theta^{(2)}\psi^{(1)}+p\varphi\varphi^{(1)}\psi^{(1)}+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}\psi^{(1)}]A \pmod{p^2};$$

and hence

$$A = pA_1,$$

so that

$$\theta\theta_1^{(1)}\varphi_1^{(1)} \equiv \theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}[B+\psi^{(1)}A_1] \pmod{p}$$

and

$$\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)} \equiv \theta_1\theta_1^{(1)}\varphi_1^{(1)}[B_1+\psi^{(1)}A_1^{(1)}] \pmod{p},$$

therefore

$$\text{(2.)}\qquad \theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)} \equiv \theta_1\theta_1^{(1)}\varphi_1^{(1)} \pmod{p}$$

and consequently from (1.)

$$\psi^{(1)} = \psi_1^{(1)}.$$

From (IV.) we see that

$$p^2\theta_1\theta_1^{(1)} \equiv p^2\theta\theta^{(1)}C+[p^2\theta\theta^{(2)}+p^2\varphi\varphi^{(1)}+p\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}]B$$
$$+[p^2\theta\theta^{(3)}+p^2\varphi\varphi^{(2)}+p^2\psi\psi^{(1)}+p\theta\theta^{(1)}\varphi^{(2)}+p\theta\theta^{(2)}\psi^{(1)}+p\varphi\varphi^{(1)}\psi^{(1)}$$
$$+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}\psi^{(1)}]A \pmod{p^3};$$

hence

$$A = pA_1,$$

and

$$\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}[B+\psi^{(1)}A_1] \equiv 0 \pmod{p},$$

so that

$$B = -\psi^{(1)}A_1+pB_1.$$

The above congruence may then be written

$$p\theta_1\theta_1^{(1)} \equiv p\theta\theta^{(1)}C+[p\theta\theta^{(2)}+p\varphi\varphi^{(1)}+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}][-\psi^{(1)}A_1]$$
$$+[p\theta\theta^{(2)}+p\varphi\varphi^{(1)}+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}]pB_1$$
$$+[p^2\theta\theta^{(3)}+p^2\varphi\varphi^{(2)}+p^2\psi\psi^{(1)}+p\theta\theta^{(1)}\varphi^{(2)}+p\theta\theta^{(2)}\psi^{(1)}+p\varphi\varphi^{(1)}\psi^{(1)}+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}\psi^{(1)}]A_1$$
$$\pmod{p^2},$$

or

$$p\theta_1\theta_1^{(1)} \equiv p\theta\theta^{(1)}C+[p\theta\theta^{(2)}+p\varphi\varphi^{(1)}+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}]pB_1$$
$$+[p^2\theta\theta^{(3)}+p^2\varphi\varphi^{(2)}+p^2\psi\psi^{(1)}+p\theta\theta^{(1)}\varphi^{(2)}]A_1 \pmod{p^2}.$$

Hence

$$\theta_1\theta_1^{(1)} \equiv \theta\theta^{(1)}[C+\varphi^{(1)}B_1+\varphi^{(2)}A_1] \pmod{p},$$

and in an analogous manner

$$\theta\theta^{(1)} \equiv \theta_1\theta_1^{(1)}[C_1+\varphi_1^{(1)}B_1^{(1)}+\varphi_1^{(2)}A_1^{(1)}] \pmod{p}$$

and consequently

(3.) $$\theta\theta^{(1)} \equiv \theta_1\theta_1^{(1)} \pmod{p}.$$

Therefore from (2.)

$$\varphi^{(1)} = \varphi^{(1)}.$$

Owing to (IV.)

$$p^3\theta_1 \equiv p^3\theta.D+[p^3\varphi+p^2\theta\theta^{(1)}]C+[p^3\psi+p^2\theta\theta^{(2)}+p^2\varphi\varphi^{(1)}+p\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}]B$$
$$+[p^3\chi+p^2\theta\theta^{(3)}+p^2\varphi\varphi^{(2)}+p^2\psi\psi^{(1)}+p\theta\theta^{(1)}\varphi^{(2)}+p\theta\theta^{(2)}\psi^{(1)}+p\varphi\varphi^{(1)}\psi^{(1)}$$
$$+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}\psi^{(1)}]A \pmod{p^4}.$$

Hence

$$A = pA_1,$$

and

$$\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}[B+A_1\psi^{(1)}] \equiv 0 \pmod{p},$$

so that

$$B = -A_1\psi^{(1)}+B_1p.$$

Substitute these values in the congruence above, divide by p and it becomes

$$p^2\theta_1 \equiv p^2\theta.D+[p^2\varphi+p\theta\theta^{(1)}]C+[p^2\psi+p\theta\theta^{(2)}+p\varphi\varphi^{(1)}+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}][-A_1\psi^{(1)}+B_1p]$$
$$+[p^3\chi+p^2\theta\theta^{(3)}+p^2\varphi\varphi^{(2)}+p^2\psi\psi^{(1)}+p\theta\theta^{(1)}\varphi^{(2)}+p\theta\theta^{(2)}\psi^{(1)}+p\varphi\varphi^{(1)}\psi^{(1)}$$
$$+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}\psi^{(1)}]A_1 \pmod{p^3},$$

or

$$p\theta_1 \equiv p\theta.D+[p\varphi+\theta\theta^{(1)}]C+[p^2\psi+p\theta\theta^{(2)}+p\varphi\varphi^{(1)}+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}]B_1$$
$$+[p^2\chi+p\theta\theta^{(3)}+p\varphi\varphi^{(2)}+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(2)}]A_1 \pmod{p^2}.$$

Hence

$$\theta\theta^{(1)}[C+\varphi^{(1)}B_1+\varphi^{(2)}A_1] \equiv 0 \pmod{p},$$

and consequently

$$C = -\varphi^{(1)}B_1-\varphi^{(2)}A_1+pC_1.$$

Give this value to C in the above congruence and we have

$$p\theta_1 \equiv p\theta.D+[p\varphi+\theta\theta^{(1)}][-\varphi^{(1)}B_1-\varphi^{(2)}A_1+pC_1]$$
$$+[p^2\psi+p\theta\theta^{(2)}+p\varphi\varphi^{(1)}+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}]B_1+[p^2\chi+p\theta\theta^{(3)}+p\varphi\varphi^{(2)}+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(2)}]A_1 \pmod{p^2},$$

or

$$\theta_1 \equiv \theta.D+[p\varphi+\theta\theta^{(1)}]C_1+[p\psi+\theta\theta^{(2)}]B_1+[p\chi+\theta\theta^{(3)}]A_1 \pmod{p}$$

i. e.

$$\theta_1 \equiv \theta[D+\theta_1C_1+\theta^{(2)}B_1+\theta^{(3)}A_1] \pmod{p},$$

and in a similar manner

$$\theta \equiv \theta_1[D_1+\theta_1^{(1)}C_1^{(1)}+\theta_1^{(2)}B_1^{(1)}+\theta_1^{(3)}A_1^{(1)}] \pmod{p}.$$

Hence

(4.) $$\theta = \theta_1,$$

and therefore from (3.)

$$\theta^{(1)} = \theta_1^{(1)}.$$

From (IV.) we form the equivalence

(IV'.)
$$\left\{\begin{array}{l}(p^4,\ p^3\theta,\ p^3\varphi+p^2\theta\theta^{(1)},\ p^3\psi+p^2\theta\theta^{(2)}+p^2\varphi\varphi^{(1)}+p\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}\\ \qquad p^3\chi+p^2\theta\theta^{(3)}+p^2\varphi\varphi^{(2)}+p^2\psi\psi^{(1)}+p\theta\theta^{(1)}\varphi^{(2)}+p\theta\theta^{(2)}\psi^{(1)}\\ \qquad +p\varphi\varphi^{(1)}\psi^{(1)}+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}\psi^{(1)})\\ \sim(p^4,\ p^3\theta_1,\ p^3\varphi_1+p^2\theta\theta^{(1)},\ p^3[\varphi_1-\varphi]p^3\psi_1+p^2\theta\theta_1^{(2)}+p^2\varphi_1\varphi^{(1)}+p\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)},\\ \quad p^3[\psi_1-\psi]+p^2\theta[\theta_1^{(2)}-\theta^{(2)}]+p^2\varphi^{(1)}[\varphi_1-\varphi],\ p^3\chi_1+p^2\theta\theta_1^{(3)}+p^2\varphi_1\varphi_1^{(2)}\\ +p^2\psi_1\psi^{(1)}+p\theta\theta^{(1)}\varphi_1^{(2)}+p\theta\theta_1^{(2)}\psi^{(1)}+p\varphi_1\varphi^{(1)}\psi^{(1)}+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}\psi^{(1)}\\ +p^3[\chi_1-\chi]+p^2\theta[\theta_1^{(3)}-\theta^{(3)}]+p^2[\varphi_1\varphi_1^{(2)}-\varphi\varphi^{(2)}]+p^2\psi^{(1)}[\psi_1-\psi]\\ \qquad +p\theta\theta^{(1)}[\varphi_1^{(2)}-\varphi^{(2)}]+p\theta\psi^{(1)}[\theta_1^{(2)}-\theta^{(2)}]+p\varphi^{(1)}\psi^{(1)}[\varphi_1-\varphi]).\end{array}\right.$$

Noting the element $p^3[\varphi_1-\varphi]$ in this equivalence and referring back to the method by which (4.) was derived, it is seen that

$$\varphi_1-\varphi \equiv \theta[d+\theta^{(1)}c_1+\theta^{(2)}b_1+\theta^{(3)}a_1] \pmod{p}.$$

Since the degrees of φ_1 and φ are less than that of θ (cf. (C.) p. 164), we must have $\varphi = \varphi_1$.

From the equivalence (IV'.) we derive the congruence

$$p^3[\psi_1-\psi]+p^2\theta[\theta_1^{(2)}-\theta^{(2)}] \equiv p^3\theta.D+[p^3\varphi+p^2\theta\theta^{(1)}]C$$
$$+[p^3\psi+p^2\theta\theta^{(2)}+p^2\varphi\varphi^{(1)}+p\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}]B+[p^3\chi+p^2\theta\theta^{(3)}+p^2\varphi\varphi^{(2)}+p^2\psi\psi^{(1)}$$
$$+p\theta\theta^{(1)}\varphi^{(2)}+p\theta\theta^{(2)}\psi^{(1)}+p\varphi\varphi^{(1)}\psi^{(1)}+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}\psi^{(1)}]A \pmod{p^4};$$

therefore

$$A = A_1 p,$$
$$B = -A_1\psi^{(1)}+pB_1,$$

so that the congruence just written takes the form

$$p[\psi_1-\psi]+\theta[\theta_1^{(2)}-\theta^{(2)}] \equiv p\theta.D+[p\varphi+\theta\theta^{(1)}]C+[p^2\psi+p\theta\theta^{(2)}+p\varphi\varphi^{(1)}+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}]B_1$$
$$+[p^2\chi+p\theta\theta^{(3)}+p\varphi\varphi^{(2)}+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(2)}]A_1 \pmod{p^2}.$$

We must consequently have

$$\theta[\theta_1^{(2)}-\theta^{(2)}] \equiv \theta\theta^{(1)}[C+B_1\varphi^{(1)}+A_1\varphi^{(2)}] \pmod{p},$$

or

$$[\theta_1^{(2)}-\theta^{(2)}] \equiv \theta^{(1)}[C+B_1\varphi^{(1)}+A_1\varphi^{(2)}] \pmod{p}.$$

Since the degrees of $\theta_1^{(2)}$ and $\theta^{(2)}$ are less than the degree of $\theta^{(1)}$ (cf. (C.), p. 164), we conclude that

$$\theta^{(2)} = \theta_1^{(2)}.$$

Then as in the derivation of (4.) above

$$\psi_1-\psi \equiv \theta[D+C_1\theta^{(1)}+B_1\theta^{(2)}+A_1\theta^{(3)}],$$

where the quantities D, C_1, B_1 and A_1 are not necessarily the same as those quantities used above, but are employed here for convenience and as an index for the generalization of the questions under consideration.

The degrees of ψ_1 and ψ being less than that of θ, we have

$$\psi = \psi_1.$$

Finally we obtain from the equivalence (IV'.)

$$p^3[\chi_1-\chi]+p^2\theta[\theta_1^{(3)}-\theta^{(3)}]+p^2\varphi[\varphi_1^{(2)}-\varphi^{(2)}]+p\theta\theta^{(1)}[\varphi_1^{(2)}-\varphi^{(2)}]$$
$$\equiv p^3\theta.D+[p^3\varphi+p^2\theta\theta^{(1)}]C+[p^3\psi+p^2\theta\theta^{(2)}+p^2\varphi\varphi^{(1)}+p\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}]B$$
$$+[p^3\chi+p^2\theta\theta^{(3)}+p^2\varphi\varphi^{(2)}+p^2\psi\psi^{(1)}+p\theta\theta^{(1)}\varphi^{(2)}+p\theta\theta^{(2)}\psi^{(1)}+p\varphi\varphi^{(1)}\psi^{(1)}+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}\psi^{(1)}]A$$
$$\pmod{p^4}.$$

Write $A = pA_1$, and this becomes

$$p^2[\chi_1-\chi]+p\theta[\theta_1^{(3)}-\theta^{(3)}]+p\varphi[\varphi_1^{(2)}-\varphi^{(2)}]+\theta\theta^{(1)}[\varphi_1^{(2)}-\varphi^{(2)}]$$
$$\equiv p^2\theta.D+[p^2\varphi+p\theta\theta^{(1)}]C+[p^2\psi+p\theta\theta^{(2)}+p\varphi\varphi^{(1)}+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}]B+[p^3\chi+p^2\theta\theta^{(3)}$$
$$+p^2\varphi\varphi^{(2)}+p^2\psi\psi^{(1)}+p\theta\theta^{(1)}\varphi^{(2)}+p\theta\theta^{(2)}\psi^{(1)}+p\varphi\varphi^{(1)}\psi^{(1)}+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}\psi^{(1)}]A_1 \pmod{p^3}.$$

Hence we have

$$\theta\theta^{(1)}[\varphi_1^{(2)}-\varphi^{(2)}] \equiv \theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}[B+\psi^{(1)}A_1] \pmod{p},$$

or

$$[\varphi_1^{(2)}-\varphi^{(2)}] \equiv \varphi^{(1)}[B+\psi^{(1)}A_1] \pmod{p}.$$

The degree of $\varphi^{(1)}$ being higher than that of either $\varphi_1^{(2)}$ or $\varphi^{(2)}$, we have

$$\varphi^{(2)} = \varphi_1^{(2)}.$$

Write $B = -\psi^{(1)}A_1+pB_1$ in the above congruence and dividing by p we have

$$p[\chi_1-\chi]+\theta[\theta_1^{(3)}-\theta^{(3)}] \equiv p\theta.D+[p\varphi+\theta\theta^{(1)}]C+[p^2\psi+p\theta\theta^{(2)}+p\varphi\varphi^{(1)}+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}]B_1$$
$$+[p^2\chi+p\theta\theta^{(3)}+p\varphi\varphi^{(2)}+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(2)}]A_1 \pmod{p^2}.$$

It follows that

$$\theta[\theta_1^{(3)}-\theta^{(3)}] \equiv \theta\theta^{(1)}[C+B_1\varphi^{(1)}+A_1\varphi^{(2)}] \pmod{p},$$

or

$$[\theta_1^{(3)}-\theta^{(3)}] \equiv \theta^{(1)}[C+B_1\varphi^{(1)}+A_1\varphi^{(2)}] \pmod{p};$$

and since the degrees of $\theta^{(3)}$ and $\theta_1^{(3)}$ are less than the degree of $\theta^{(1)}$, it is necessary that

$$\theta^{(3)} = \theta_1^{(3)}.$$

As has been repeatedly deduced

$$\chi_1-\chi \equiv \theta[D+C_1\theta^{(1)}+B_1\theta^{(2)}+A_1\theta^{(3)}] \pmod{p}.$$

The degree of θ being greater than that of χ or χ_1, we must have

$$\chi = \chi_1.$$

We have thus seen that corresponding elements in the equivalence (IV.) *are identical, and we may therefore consider the modular system*

$$(p^4,\ p^3\theta,\ p^3\varphi+p^2\theta\theta^{(1)},\ p^3\psi+p^2\theta\theta^{(2)}+p^2\varphi\varphi^{(1)}+p\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)},$$
$$p^3\chi+p^2\theta\theta^{(3)}+p^2\varphi\varphi^{(2)}+p^2\psi\psi^{(1)}+p\theta\theta^{(1)}\varphi^{(2)}+p\theta\theta^{(2)}\psi^{(1)}+p\varphi\varphi^{(1)}\psi^{(1)}+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}\psi^{(1)})$$

as a canonical form for the unique representation of modular systems in which p to the fourth power enters.

5° We consider next the relations that exist among the forms which we have derived:

$(p,\ \theta)$,
$(p^2,\ p\theta,\ p\varphi+\theta\theta^{(1)})$,
$(p^3,\ p^2\theta,\ p^2\varphi+p\theta\theta^{(1)},\ p^2\psi+p\theta\theta^{(2)}+p\varphi\varphi^{(1)}+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)})$,
$(p^4,\ p^3\theta,\ p^3\varphi+p^2\theta\theta^{(1)},\ p^3\psi+p^2\theta\theta^{(2)}+p^2\varphi\varphi^{(1)}+p\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)},$
$p^3\chi+p^2\theta\theta^{(3)}+p^2\varphi\varphi^{(2)}+p^2\psi\psi^{(1)}+p\theta\theta^{(1)}\varphi^{(2)}+p\theta\theta^{(2)}\psi^{(1)}+p\varphi\varphi^{(1)}\psi^{(1)}+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}\psi^{(1)})$.

Write

$M_1 = \theta$,
$M_2 = p\varphi+\theta\theta^{(1)}$,
$M_3 = p^2\psi+p\theta\theta^{(2)}+p\varphi\varphi^{(1)}+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}$,
$M_4 = p^3\chi+p^2\theta\theta^{(3)}+p^2\varphi\varphi^{(2)}+p^2\psi\psi^{(1)}+p\theta\theta^{(1)}\varphi^{(2)}+p\theta\theta^{(2)}\psi^{(1)}+p\varphi\varphi^{(1)}\psi^{(1)}+\theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}\psi^{(1)}$.

Hence

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \theta,\\
M_2 &= p\varphi+M_1\theta^{(1)},\\
M_3 &= p^2\psi+pM_1\theta^{(2)}+M_2\varphi^{(1)},\\
M_4 &= p^3\chi+p^2M_1\theta^{(3)}+pM_2\varphi^{(2)}+M_3\psi^{(1)},\\
M_5 &= p^4\sigma+p^3M_1\theta^{(4)}+p^2M_2\varphi^{(3)}+pM_3\psi^{(2)}+M_4\chi^{(1)},\\
M_6 &= p^5\tau+p^4M_1\theta^{(5)}+p^3M_2\varphi^{(4)}+p^2M_3\psi^{(3)}+pM_4\chi^{(2)}+M_5\sigma^{(1)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

We may therefore write the canonical forms:

$$
\begin{aligned}
&(p,\ M_1),\\
&(p^2,\ pM_1,\ M_2),\\
&(p^3,\ p^2M_1,\ pM_2,\ M_3),\\
&(p^4,\ p^3M_1,\ p^2M_2,\ pM_3,\ M_4),\\
&(p^5,\ p^4M_1,\ p^3M_2,\ p^2M_3,\ pM_4,\ M_5),\\
&(p^6,\ p^5M_1,\ p^4M_2,\ p^3M_3,\ p^2M_4,\ pM_5,\ M_6),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

where M_5 is expressed linearly in terms of M_4, M_3, M_2, M_1 by the formula above, and when expressed in terms of the elements that constitute the system analogous to that given on p. 164,

$$
\begin{array}{l|l|l|l}
M_5 = p^4\sigma + p^3 & \theta\theta^{(4)} + p^2 & \theta\theta^{(1)}\varphi^{(3)} + p & \theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}\psi^{(2)} + \theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}\psi^{(1)}\chi^{(1)}; \\
+ & \varphi\varphi^{(3)} + & \theta\theta^{(2)}\psi^{(2)} + & \theta\theta^{(1)}\varphi^{(2)}\chi^{(1)} \\
+ & \psi\psi^{(2)} + & \varphi\varphi^{(1)}\psi^{(2)} + & \theta\theta^{(2)}\psi^{(1)}\chi^{(1)} \\
+ & \chi\chi^{(1)} + & \theta\theta^{(3)}\chi^{(1)} + & \varphi\varphi^{(1)}\psi^{(1)}\chi^{(1)} \\
 & & \varphi\varphi^{(2)}\chi^{(1)} & \\
 & & \psi\psi^{(1)}\chi^{(1)} &
\end{array}
$$

and

$$
\begin{array}{l|l|l|l|l}
M_6 = p^5\tau + p^4 & \theta\theta^{(5)} + p^3 & \theta\theta^{(1)}\varphi^{(4)} + p^2 & \theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}\psi^{(3)} + p & \theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}\psi^{(1)}\chi^{(2)} + \theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}\psi^{(1)}\chi^{(1)}\sigma^{(1)}. \\
+ & \varphi\varphi^{(4)} + & \theta\theta^{(2)}\psi^{(3)} + & \theta\theta^{(1)}\varphi^{(2)}\chi^{(2)} + & \theta\theta^{(1)}\varphi^{(1)}\psi^{(2)}\sigma^{(1)} \\
+ & \psi\psi^{(3)} + & \varphi\varphi^{(1)}\psi^{(3)} + & \theta\theta^{(2)}\psi^{(1)}\chi^{(2)} + & \theta\theta^{(1)}\varphi^{(2)}\chi^{(1)}\sigma^{(1)} \\
+ & \chi\chi^{(2)} + & \theta\theta^{(3)}\chi^{(2)} + & \varphi\varphi^{(1)}\psi^{(1)}\chi^{(2)} + & \theta\theta^{(2)}\psi^{(1)}\chi^{(1)}\sigma^{(1)} \\
+ & \sigma\sigma^{(1)} + & \varphi\varphi^{(2)}\chi^{(2)} + & \theta\theta^{(1)}\varphi^{(3)}\sigma^{(1)} + & \varphi\varphi^{(1)}\psi^{(1)}\chi^{(1)}\sigma^{(1)} \\
 & + & \psi\psi^{(1)}\chi^{(2)} + & \theta\theta^{(2)}\psi^{(2)}\sigma^{(1)} & \\
 & + & \theta\theta^{(4)}\sigma^{(1)} + & \varphi\varphi^{(1)}\psi^{(2)}\sigma^{(1)} & \\
 & + & \varphi\varphi^{(3)}\sigma^{(1)} + & \theta\theta^{(3)}\chi^{(1)}\sigma^{(1)} & \\
 & + & \psi\psi^{(2)}\sigma^{(1)} + & \varphi\varphi^{(2)}\chi^{(1)}\sigma^{(1)} & \\
 & + & \chi\chi^{(1)}\sigma^{(1)} + & \psi\psi^{(1)}\chi^{(1)}\sigma^{(1)} &
\end{array}
$$

We note that the system which contains p has 2 terms, the one that contains p^2 has 2^2 terms, that in which p^3 enters has 2^3 terms, while 2^6 terms are found in the system that has p^6 as constant element, etc.

Further in M_6 the number of terms that have p^k $(k = 1, 2, \ldots, 6-1)$ as factor, is given by the coefficient of that power of p in the binomial expression $(p+1)^{6-1}$; which is true in general.

When systems of the above forms are placed equivalent to each other, as for example (IV.) p. 164, they are identical. The proof for cases in which higher powers of p enter, is precisely the same as that given for the cases above. These forms may therefore be regarded as canonical forms for the unique representation of *Kronecker*'s modular systems.

Druckfehler.

Es ist zu setzen:

S. 148 Z. 5 v. u. *Kronecker*'s; S. 156 Z. 2 u. 7 Ψ statt ψ; S. 156 Z. 9 $pG(x) - G_2(x)$;
S. 156 Z. 4 v. u. $p^2r(x)$, $ps(x)$, $t(x)$; S. 159 Z. 7 v. u. $\theta\theta^{(1)}G$ statt $\varphi\theta^{(1)}G$;
S. 163 Z. 1 v. u. $p\varphi\varphi^{(1)}$; S. 164 Z. 7 v. u. $\theta_1\theta_1^{(1)}\varphi_1^{(1)} \equiv$ etc.; S. 164 Z. 5 v. u. $\psi_1^{(1)}A_1^{(1)}$;
S. 165 Z. 9 v. u. $\varphi^{(1)} = \varphi_1^{(1)}$; S. 166 Z. 20 $\theta^{(1)}C_1$;
S. 166 Z. 5 v. u. $p^3\theta$, $p^3\varphi_1 + p^2\theta\theta^{(1)}$, $p^3[\varphi_1 - \varphi]$, $p^3\psi_1 +$ etc.
S. 166 Z. 1 v. u. ist $+$ am Anfang zu tilgen.

Ueber die Verzweigung der dreiblätterigen *Riemann*schen Flächen.

(Von Herrn *L. Baur* in Darmstadt.)

In der vorliegenden Note soll gezeigt werden, wie meine Untersuchungen über die Functionen eines kubischen Körpers ein durchaus anschauliches Beispiel liefern zur Erläuterung der allgemeinen Entwickelungen, die Herr *Hensel* in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie vom 17. October und 28. November 1895*) veröffentlicht hat.

Ohne irgend welche Beschränkung der Allgemeinheit kann die Grundgleichung eines beliebigen kubischen Functionenkörpers Ω in die Form

$$y^3+f_2y+f_3 = 0$$

und

$$f_2 = A_1A_2B^2h_2,$$
$$f_3 = A_1^2A_2B^2h_4$$

gesetzt werden derart, dass A_1, A_2, B, h_2, h_4 ganze rationale Functionen von x sind, dass das Product A_1A_2B keine mehrfachen Linearfactoren besitzt, dass h_2 prim zu A_1 und schliesslich h_4 prim zu A_2Bh_2 ist. Bedeutet dann Δ die Discriminante der Grundgleichung, so ergiebt sich

$$\Delta = -A_1^3A_2^2B^4D^2\Delta_3,$$

wo D eine vermittelst des Euklidischen Verfahrens zu bestimmende, mit f_2 und f_3 theilerfremde ganze rationale Function von x ist und das Product $A_1A_2B\Delta_3$ ebenfalls bloss einfache Linearfactoren besitzt.

*) Neben diesen vergleiche für das Folgende meine Arbeiten im 43. und 46. Bande der Math. Ann.

Hiernach erhält man für den grössten gemeinsamen Theiler D_i aller Determinanten $i$ter Ordnung und für die Elementartheiler E_1, E_2, E_3 des Systemes

$$\begin{pmatrix} 1 & y_1 & y_1^2 \\ 1 & y_2 & y_2^2 \\ 1 & y_3 & y_3^2 \end{pmatrix},$$

in welchem y_1, y_2, y_3 die drei conjugirten Werthe von y bezeichnen, die Ausdrücke

$$D_1 = 1,$$
$$D_2 = (y_1,\ y_2,\ y_3) = (f_2^{\frac{1}{2}},\ f_3^{\frac{1}{3}}) = A_1^{\frac{1}{2}} A_2^{\frac{1}{3}} B^{\frac{2}{3}},$$
$$D_3 = \text{const.}\sqrt{\Delta} = A_1^{\frac{3}{2}} A_2 B^2 D \Delta_3^{\frac{1}{2}}$$

und

$$E_1 = 1,$$
$$E_2 = A_1^{\frac{1}{2}} A_2^{\frac{1}{3}} B^{\frac{2}{3}},$$
$$E_3 = A_1 A_2^{\frac{2}{3}} B^{\frac{4}{3}} D \Delta_3^{\frac{1}{2}}.$$

Bedeuten also weiter $x-a_i$, $x-b$, $x-d$, $x-d_3$ beliebige Linearfactoren von bez. A_i, B, D und Δ_3, so sind nach dem oben Gesagten die Factoren $x-a_i$ und $x-b$ alle verschieden von $x-d$ und $x-d_3$, und es heissen demnach die Elementartheiler und die kleinsten positiven Reste ihrer Exponenten

für die Stelle	a_1	bez.	1,	$(x-a_1)^{\frac{1}{2}}$,	$(x-a_1)^1$	und	0, $\frac{1}{2}$, 0,
- - -	a_2	-	1,	$(x-a_2)^{\frac{1}{3}}$,	$(x-a_2)^{\frac{2}{3}}$	-	0, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$,
- - -	b	-	1,	$(x-b)^{\frac{2}{3}}$,	$(x-b)^{\frac{4}{3}}$	-	0, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$.

Auf den Exponenten von $x-d$ haben die Factoren A_1, A_2 und B sicher keinen Einfluss; ist ferner D theilerfremd mit Δ_3, so hat der kleinste positive Exponentenrest von $x-d$ den Werth 0, wodurch die weiteren Schlüsse nicht berührt werden; ist aber ein Factor $x-d$ gleich einem Factor $x-d_3$, so wird dadurch der kleinste Exponentenrest des betreffenden Factors nicht verändert, die kleinsten positiven Reste der Exponenten der Elementartheiler für die Stelle d_3 heissen vielmehr jedenfalls bez. 0, 0, $\frac{1}{2}$.

Die betrachteten Reste bilden also jedesmal nur eine Bruchsequenz

und zwar

für $x-a_1$ und $x-d_3$ die Sequenz $[\frac{1}{2}] = (0, \frac{1}{2})$,
- $x-a_2$ - $x-b$ - - $[\frac{1}{3}] = (0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$,

es findet mithin nach Herrn *Hensel*s erster Arbeit im Endlichen bloss an den Stellen a_1, d_3, a_2 und b eine Verzweigung statt, und zwar hängen in der zugehörigen *Riemann*schen Fläche T an den Stellen a_1 und d_3 je zwei, an den Stellen a_2 und b je drei Blätter zusammen: ein Resultat, welches mit dem meinigen insofern völlig übereinstimmt, als ich gezeigt habe, dass die Discriminante des Körpers Ω durch die Gleichung

$$\Delta(\Omega) = -A_1 A_2^2 B^2 \Delta_3$$

gegeben ist und dass demnach, wenn man die Grade der hier auftretenden Factoren durch die entsprechenden Buchstaben des kleinen griechischen Alphabetes bezeichnet, dieser Körper im Endlichen $\alpha_1+\delta_3$ einfache, $\alpha_2+\beta$ zweifache durch die Gleichung $\Delta(\Omega)=0$ gelieferte Verzweigungspunkte besitzt.

Was die zweite der eingangs erwähnten Arbeiten angeht, in welcher Herr *Hensel* die Verzweigung der drei- und vierblätterigen *Riemann*schen Flächen näher betrachtet, so ist jetzt unter Berücksichtigung der S. 171 erwähnten Eigenschaften der Functionen A_1, A_2, B, h_2 und h_4:

$$(f_2, f_3^{\frac{2}{3}}) = A_1 A_2^{\frac{2}{3}} B^{\frac{4}{3}}$$

und

$$\text{const.}\frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{(f_2, f_3^{\frac{2}{3}})} = A_1^{\frac{1}{3}} A_2^{\frac{1}{3}} B^{\frac{2}{3}} D \Delta_3^{\frac{1}{2}}.$$

Das auf der rechten Seite auftretende Product enthält den rationalen Theiler D oder auch BD, und wenn man durch diesen dividirt, so erhält der betrachtete Quotient die reducirte Form

$$R\Big(\frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{(f_2, f_3^{\frac{2}{3}})}\Big) = (A_1\Delta_3)^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{A_2}{B}\Big)^{\frac{1}{3}},$$

eine Form, welche der von Herrn *Hensel* geforderten vollständig entspricht sowohl bezüglich der Anzahl der Factoren und der Grösse ihrer Exponenten als auch bezüglich der Thatsache, dass die rationalen Functionen $A_1\Delta_3$ und $\frac{A_2}{B}$ beide bloss einfache Linearfactoren besitzen. Nach Herrn *Hensel*

ist hieraus zu folgern, dass im Endlichen den $\alpha_1+\delta_3$ Linearfactoren von $A_1 \Delta_3$ und nur ihnen einfache, den $\alpha_2+\beta$ Linearfactoren von $\frac{A_2}{B}$ und nur ihnen zweifache Verzweigungspunkte der *Riemann*schen Fläche T entsprechen in genauer Uebereinstimmung mit meiner Arbeit*).

*) Bestimmt man die Verzweigung im Unendlichen nach Herrn *Hensel* durch Einführung homogener Coordinaten oder nach der im 43. Bande der Mathematischen Annalen S. 519 von mir angewendeten Methode, so erzielt man auch hier dieselben Resultate.

Ueber die elementaren arithmetischen Eigenschaften der reinen Modulsysteme zweiter Stufe.

(Von Herrn *Kurt Hensel.*)

In zwei soeben in diesem Journale veröffentlichten Abhandlungen*) habe ich gezeigt, dass man jedes reine Modulsystem zweiter Stufe:

$$(M) = (F_1(x), F_2(x), \ldots, F_\nu(x)),$$

dessen Elemente beliebige ganze ganzzahlige Functionen von x sind, auf eine eindeutig bestimmte reducirte Form bringen kann, und die dort gefundenen Resultate will ich jetzt zur Beantwortung der folgenden beiden Fragen benutzen:

1) Wie gross ist die Anzahl $N(M)$ aller modulo (M) incongruenten ganzen ganzzahligen Functionen von x?

2) Wie gross ist die Anzahl $\varphi(M)$ aller modulo (M) incongruenten und zu (M) theilerfremden Functionen von x?

Die Lösung dieser beiden Aufgaben war bisher im wesentlichen nur in dem allereinfachsten Falle bekannt, wenn

$$(\Pi) = (p, P(x))$$

ein Primmodulsystem, wenn nämlich p eine beliebige Primzahl und

$$P(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \cdots + \gamma_{n-1} x^{n-1} + x^n$$

eine modulo p irreductible ganzzahlige Function von x ist. In diesem Falle bestehen nämlich die beiden Sätze:

Jede Function von x ist modulo (p, P) einer und nur einer reducirten Grösse

$$c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-1} x^{n-1} \qquad \begin{pmatrix} c_i = 0, 1, \ldots, p-1 \\ i = 0, 1, \ldots, n-1 \end{pmatrix} \tag{1.}$$

congruent, also ist die Anzahl der modulo (p, P) incongruenten

*) *K. Hensel*, Ueber die Zurückführung der Divisorensysteme auf eine reducirte Form, erste und zweite Abhandlung, dieses Journal Bd. 118 S. 234—251 und Bd. 119 S. 114—130.

Functionen des Bereiches $[1, x]$ durch die Gleichung

$$N(\Pi) = N(p, P) = p^n$$

bestimmt.

Eine Function von x besitzt dann und nur dann mit (p, P) einen gemeinsamen Theiler, wenn sie durch jenes System theilbar ist, wenn also in ihrem reducirten Ausdrucke (1.) alle Coefficienten $c_i = 0$ sind. Daher ist

$$\varphi(\Pi) = \varphi(p, P) = p^n - 1.$$

Diesen Systemen am nächsten stehen nun diejenigen, welche, wie z. B. (p^a, P^b), zwar selbst keine Primdivisorensysteme sind, deren sämmtliche Elemente $(F_1(x), \ldots, F_\nu(x))$ aber nur durch ein einziges solches System $(\Pi) = (p, P(x))$ theilbar sind. Ich habe diese in der zweiten der oben erwähnten Abhandlungen *„einfache Divisorensysteme“* genannt; zunächst sollen die beiden oben gestellten Fragen für diese specielleren Systeme beantwortet werden; aus diesen Resultaten können dann die entsprechenden für beliebige Divisorensysteme leicht hergeleitet werden.

Es sei also

$$(\overline{\Pi}) = (F_1(x), \ldots, F_\nu(x))$$

ein beliebiges *einfaches* und $(\Pi) = (p, P(x))$ das in ihm enthaltene *Primdivisorensystem*. Jede beliebige Function $F(x)$ kann dann auf eine und nur eine Weise nach Potenzen der beiden Elemente p und P in eine Reihe

$$F(x) = \Sigma a_{ik} p^i P^k$$

so entwickelt werden, dass die Coefficienten a_{ik} modulo (Π) reducirte Functionen von x sind. In dieser Entwickelung sollen die einzelnen Glieder $a_{ik} p^i P^k$ von vorn herein so geordnet werden, dass sie nach der Reihenfolge der aus ihren Exponenten i und k als Ziffern gebildeten Zahlen (i, k) aufeinander folgen; es sei also ein Glied $a_{i_1 k_1} p^{i_1} P^{k_1}$ von höherer Ordnung als $a_{ik} p^i P^k$ wenn $i_1 > i$ oder, falls $i_1 = i$ sein sollte, wenn $k_1 > k$ ist.

Ich habe dann im § 4 der zweiten oben erwähnten Abhandlung den folgenden Satz bewiesen, welcher die Grundlage für die weiteren Entwickelungen dieser Arbeit bildet.

Beginnt die Entwickelung einer Function $F(x)$ mit dem Gliede niedrigster Ordnung $p^i . P^k$, so kann man sie mit einem zu $(\overline{\Pi})$ theilerfremden complementären Factor $F'(x)$ so multipliciren, dass

das Product $F(x)F'(x)$ modulo (Π) die folgende Gestalt hat:

(1.) $$\bar{F}(x) = F(x)F'(x) = p^i(P^k + A_1P^{k-1} + A_2P^{k-2} + \cdots + A_k) \pmod{\bar{\Pi}}$$

und hier die Coefficienten $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sämmtlich durch p theilbar sind. Diese Function $\bar{F}(x)$ soll die zu $F(x)$ gehörige *reducirte Function* modulo $\bar{\Pi}$ genannt werden.

In dem Bereiche (F) aller durch das einfache System $(\bar{\Pi})$ theilbaren Elemente F giebt es nun zunächst auch unendlich viele ganze Zahlen, und die kleinste unter diesen ist, wie a. a. O. bewiesen wurde, gleich einer Potenz p^a der Primzahl p*). Ebenso giebt es in jenem Bereiche unendlich viele Elemente, welche bzw. durch die Potenzen $1, p, p^2, \ldots, p^{a-1}$ theilbar sind. Es sei nun allgemein $\Psi_i(x)$ ein Element von (F), welches genau den Zahlentheiler p^i besitzt und in Bezug auf P von möglichst niedrigem Grade ist. Dann kann man $\Psi_i(x)$ stets als ein modulo $(\bar{\Pi})$ reducirtes Element, d. h. in der Form

$$\Psi_i(P) = p^i(P^{\lambda_i} + A_1P^{\lambda_i-1} + \cdots + A_{\lambda_i})$$

annehmen; denn enthielte $\Psi_i(P)$ ausser den hier hingeschriebenen Gliedern noch irgend ein anderes, etwa $p^{i+\alpha}P^{\lambda_i+\beta}$, wo $\alpha \geqq 0$, $\beta > 0$ ist, so würde ja $\Psi_i(P)$ vom Grade $\nu_i+\beta$ und die zugehörige reducirte Function nur vom Grade ν_i, also von niedrigerem Grade sein als $\Psi_i(P)$, was mit der vorher gemachten Annahme im Widerspruche steht. Es sei nun:

$$(\Psi_0(P), \Psi_1(P), \ldots, \Psi_a(P))$$

ein solches System von Elementen von (F), deren Zahlentheiler bzw. $1, p, \ldots, p^a$ sind; dann ist $\Psi_a(P) = p^a$ und die Zahlen

$$\lambda_0, \quad \lambda_1, \quad \ldots, \quad \lambda_a,$$

welche den Grad jener Elemente in P angeben, bilden eine Reihe ganzer Zahlen, deren letzte gleich Null ist, und von denen offenbar jede folgende kleiner oder höchstens gleich der vorhergehenden ist.

Das aus jenen Elementen gebildete Divisorensystem $(\Psi_i(P))$ ist zunächst ein Vielfaches von $(\bar{\Pi})$, aber man zeigt leicht, dass auch umgekehrt

*) Beiläufig werde bemerkt, dass dieses Resultat auch direct aus dem soeben angegebenen Satze folgt; denn gehört $m = p^a m'$ zu dem Systeme (F), so gehört auch die zu m gehörige reducirte Function zu (F), und diese ist gleich p^a, wie man sofort erkennt, wenn man in (1.) $k = 0$ setzt.

$(\overline{\Pi})$ durch $(\Psi_i(P))$ theilbar ist, dass also jene beiden Systeme einander äquivalent sind. Hierzu führt der folgende Satz:

Jede Function $F(x)$ kann modulo $(\Psi_i(P))$ also a fortiori modulo $(\overline{\Pi})$ in der Form dargestellt werden:

$$(2.) \qquad F(x) \equiv \Sigma a_{hk_h} p^h P^{k_h} \pmod{\overline{\Pi}}, \qquad \begin{pmatrix} h=0,\,1,\,\ldots,\,a \\ k_h=0,\,1,\,\ldots,\,\lambda_h-1 \end{pmatrix}$$

deren einzelne Glieder sämmtlich von niedrigerer Ordnung sind als die Anfangsglieder der Elemente $\Psi_i(P)$; und diese Darstellung ist nur auf eine Weise möglich.

In der That, stellt man $F(x)$ zunächst in der Form

$$F(x) = \Sigma a_{ik} p^i P^k$$

dar, so kann man jedes Glied $p^i P^{\lambda_i+\alpha}$ modulo $\Psi_i(P) = p^i P^{\lambda_i} + p^i A_1 P^{\lambda_i-1} + \cdots$ auf solche reduciren, welche mindestens mit p^{i+1} multiplicirt, also von höherer Ordnung als das betrachtete Glied sind; führt man aber diese Reduction von $\Psi_0(P)$ beginnend für alle jene Terme durch, so erhält man eben den oben angegebenen Ausdruck.

Angenommen nun, es seien:

$$F(x) \equiv \Sigma a_{hk_h} p^h P^{k_h} \pmod{\overline{\Pi}},$$

$$F(x) \equiv \Sigma a'_{hk_h} p^h P^{k_h} \pmod{\overline{\Pi}}$$

zwei verschiedene Darstellungen derselben Function modulo $(\overline{\Pi})$ in dieser Form, so ergiebt sich durch Subtraction eine Congruenz:

$$0 \equiv \Sigma(a_{hk_h} - a'_{hk_h}) p^h P^{k_h} \equiv \Sigma \bar{a}_{hk_h} p^h P^{k_h} \equiv 0 \pmod{\overline{\Pi}},$$

in welcher nicht alle Coefficienten $\bar{a}_{hk_h}$ gleich Null sind. Wäre nun etwa $\bar{a}_{i,\lambda'_i}$ der erste von Null verschiedene Coefficient, so ist $\lambda'_i < \lambda_i$ und jener Coefficient $\bar{a}_{i,\lambda'_i}$ ist zu (p, P) theilerfremd. Sucht man also die zu $\Sigma \bar{a}_{hk_h} p^h P^{k_h}$ gehörige reducirte Function modulo $(\overline{\Pi})$, so erhält man eine Function

$$\overline{\Psi}_i(P) = p^i (P^{\lambda'_i} + A'_1 P^{\lambda'_i-1} + \cdots + A'_{\lambda'_i}),$$

welche ebenfalls durch $(\overline{\Pi})$ theilbar und von niedrigerem als dem $\lambda_i$ten Grade in P ist, und dies steht mit der vorher über $\Psi_i(P)$ gemachten Annahme im Widerspruch. Hieraus folgt zunächst, dass eine Function $F(x)$ dann und nur dann das ursprüngliche System $(\overline{\Pi})$ enthält, wenn bei ihrer Darstellung in der Form (2.) alle Coefficienten a_{hk_h} gleich Null sind, wenn also F das System $(\Psi_i(P))$ enthält, d. h. es besteht der Satz:

Jedes einfache Divisorensystem $(\overline{\Pi})$ ist einem Systeme

$$(\Psi_0(P),\ \Psi_1(P),\ \ldots,\ \Psi_a(P))$$

äquivalent. Es werde daher diese Form von $(\overline{\Pi})$ die kanonische Form jenes Systemes genannt.

Da aber ferner jede Function $F(x)$ modulo $(\overline{\Pi})$ betrachtet auf eine und nur eine Weise in der Form:

$$\sum_{h=0}^{a}\sum_{k_h=0}^{\lambda_h-1} a_{hk_h}p^h P^{k_h}$$

dargestellt werden, in welcher jeder der

$$\lambda = \lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_a$$

Coefficienten a_{hk_h} unabhängig von dem anderen genau p^π Werthe annehmen kann, so ergiebt sich der folgende Satz, durch welchen die erste jener beiden Fragen für einfache Divisorensysteme vollständig beantwortet wird:

Ist $(\overline{\Pi}) = (F_1(x), \ldots, F_\mu(x))$ ein beliebiges einfaches Divisorensystem mit dem Primtheiler $(\Pi) = (p, P(x))$ so ist die Anzahl $N(\overline{\Pi})$ aller modulo $(\overline{\Pi})$ incongruenten Grössen

$$N(\overline{\Pi}) = (N(\Pi))^\lambda = p^{\lambda\pi}$$

wenn $\lambda = \lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_a$ der Gesammtgrad in P der Elemente des Systemes (Π) in seiner kanonischen Form $(\Psi_0(P), \Psi_1(P), \ldots, \Psi_a(P))$ bedeutet.

Ebenso einfach kann jetzt auch die zweite Frage für diese einfachen Systeme $(\overline{\Pi})$ beantwortet werden. In der That, besitzt ein Element $F(x)$ mit $(\overline{\Pi})$ dann und nur dann einen gemeinsamen Theiler, wenn es durch den zugehörigen Primtheiler $(\Pi) = (p, P)$ theilbar ist, und dies ist dann und nur dann der Fall, wenn in dem reducirten Ausdrucke (2.) für F der erste Coefficient $a_{00} = 0$ ist, da alle übrigen Elemente $p^h P^{k_h}$ durch (Π) theilbar sind. Also ist die Anzahl aller incongruenten Elemente, welche mit $(\overline{\Pi})$ einen gemeinsamen Theiler haben, gleich $p^{(\lambda-1)\pi}$, und hieraus folgt der zweite Satz:

Ist $(\overline{\Pi})$ ein einfaches Divisorensystem mit dem Primtheiler (Π) so ist die Anzahl $\varphi(\overline{\Pi})$ aller incongruenten zu $(\overline{\Pi})$ theilerfremden

Elemente

$$\varphi(\overline{\Pi}) = p^{(\lambda-1)n}(p^n-1)$$
$$= N(\overline{\Pi})\left(1-\frac{1}{N(\Pi)}\right),$$

wenn λ wieder den Gesammtgrad der Elemente von $(\overline{\Pi})$ in der kanonischen Form bedeutet.

Es handelt sich jetzt nur noch um die wirkliche Bestimmung jener Exponenten $\lambda = \lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_a$, wenn das zu untersuchende System $(\overline{\Pi})$ nicht in seiner kanonischen Form, sondern ganz beliebig gegeben ist. In der mehrfach erwähnten Arbeit habe ich nun den folgenden Satz bewiesen:

Jedes einfache Modulsystem $(\overline{\Pi}) = (F_1(x), \ldots, F_\mu(x))$ kann stets auf rationalem Wege in ein äquivalentes reducirtes System

$$(\Phi_0(P), \Phi_1(P), \ldots, \Phi_\nu(P))$$

transformirt werden, dessen Elemente bzw. in P vom Grade

$$n_0, \quad n_1, \quad \ldots, \quad n_\nu \ (=0)$$

sind, und der Reihe nach die Zahlentheiler

$$1, \quad p^{d_1}, \quad \ldots, \quad p^{d_\nu} \ (=p^a)$$

besitzen; und jene Elemente sind dadurch charakterisirt, dass allgemein jede durch $(\overline{\Pi})$ theilbare Function $F(P)$ von niedrigerem als dem n_{i-1}ten Grade in P nothwendig mindestens durch die Primzahlpotenz p^{d_i} theilbar sein muss, und dass andererseits $\Phi_i(P)$ die Function niedrigsten Grades ist, welche genau jene Primzahlpotenz und keine höhere enthält.

Hiernach überzeugt man sich sehr leicht, dass die folgenden $d_\nu = a$ Functionen

$$p^{\varrho_i}\Phi_i \qquad \begin{pmatrix} i=0,\ 1,\ \ldots,\ \nu \\ \varrho_i=0,\ 1,\ \ldots,\ d_{i+1}-d_i-1 \end{pmatrix}$$

oder ausgeführt, die Elemente

$$\Phi_0,\ p\Phi_0,\ \ldots,\ p^{d_1-1}\Phi_0;\quad \Phi_1,\ p\Phi_1,\ \ldots,\ p^{d_2-d_1-1}\Phi_1;\quad \ldots;$$
$$\Phi_{\nu-1},\ p\Phi_{\nu-1},\ \ldots,\ p^{d_\nu-d_{\nu-1}-1}\Phi_{\nu-1},\ \Phi_\nu,$$

für die Elemente $(\Psi_0, \Psi_1, \ldots, \Psi_a)$ unserer kanonischen Form von $(\overline{\Pi})$ gesetzt werden können. In der That besitzen sie einmal offenbar der Reihe nach genau die Potenzen

$$1,\ p,\ \ldots,\ p^{d_1-1},\ p^{d_1},\ p^{d_1+1},\ \ldots,\ p^{d_2-1},\ \ldots,\ p^{d_\nu-1},\ p^{d_{\nu-1}+1},\ \ldots,\ p^{d_\nu-1},\ p^{d_\nu}$$

als Zahlentheiler, dann aber sind es auch die Functionen niedrigsten Grades, welche jene Theiler besitzen, denn da alle durch $(\overline{\Pi})$ theilbaren Elemente von niedrigerem als dem $n_i$ten Grade mindestens den Zahlentheiler $p^{d_{i+1}}$ enthalten, so kann eine solche Function, deren Zahlentheiler zwischen p^{d_i} und $p^{d_{i+1}-1}$ liegt, nicht von niedrigerem als dem $n_i$ten Grade sein. Da nun die Grade jener Elemente der Reihe nach

$$\underbrace{n_0 \; n_0 \ldots n_0}_{d_1 \text{ Male}}; \quad \underbrace{n_1 \; n_1 \ldots n_1}_{d_2 - d_1 \text{ Male}}; \quad \ldots; \quad \underbrace{n_{\nu-1} \; n_{\nu-1} \ldots n_{\nu-1}}_{d_\nu - d_{\nu-1} \text{ Male}}; \quad 0$$

sind, so ergiebt sich für den gesuchten Gesammtgrad λ der Elemente $(\Psi_i(P))$ der einfache Ausdruck:

$$\begin{aligned} \lambda &= n_0 d_1 + n_1(d_2 - d_1) + \cdots + n_{\nu-1}(d_\nu - d_{\nu-1}) \\ &= n_0 e_1 + n_1 e_2 + \cdots + n_{\nu-1} e_\nu \\ &= d_1 f_1 + d_2 f_2 + \cdots + d_\nu f_\nu, \end{aligned}$$

wenn wieder wie in der vorigen Abhandlung

$$d_i - d_{i-1} = e_i, \quad n_{i-1} - n_i = f_i$$

gesetzt wird. Ersetzt man in diesem Ausdrucke die Zahlen n_i und d_i bzw. durch $e_1, \ldots, e_\nu$ und $f_1, \ldots, f_\nu$ so erhält man endlich für λ den eleganten Ausdruck:

$$\lambda = \sum_{\varrho, \varrho'} e_\varrho f_{\varrho'}. \qquad (\varrho, \varrho' = 1, 2, \ldots, \nu, \; \varrho' \geqq \varrho)$$

Mit Hülfe der soeben gefundenen Resultate über die einfachen Divisorensysteme können nun jene beiden Aufgaben auch für ganz beliebige Divisorensysteme gelöst werden. Hierzu führt zunächst der folgende Satz, den ich in der ersten der beiden mehrfach erwähnten Arbeiten bewiesen habe:

> Jedes reine Modulsystem zweiter Stufe kann stets als das Product von einfachen theilerfremden Divisorensystemen dargestellt werden.

Ein einfaches Modulsystem $(\overline{\Pi})$ war dadurch charakterisirt, dass es nur einen einzigen Primdivisor $(p, P(x))$ enthält, und hieraus ergab sich, dass seine beiden primitiven Elemente Potenzen p^a und $P^\alpha(x)$ bzw. von p und P sind. Ein derartiges einfaches System $(\overline{\Pi})$ ist also dadurch charakterisirt, dass es ein Vielfaches von (p, P) und ein Theiler von (p^a, P^α) ist, wenn a und α geeignet gewählte ganze Zahlen sind.

Man kann nun die jetzt für beliebige Systeme zu lösenden beiden Aufgaben ganz ähnlich auf diejenigen für einfache Systeme reduciren, wie dies in der elementaren Arithmetik bei denselben Problemen geschieht, wenn man ihre Lösung für eine beliebige zusammengesetzte Zahl auf diejenigen für eine Primzahlpotenz zurückführt.

Dies geschieht durch den folgenden wichtigen Hülfssatz, welcher auch sein Analogon in der elementaren Theorie der ganzen Zahlen besitzt:

Sind (M) und (N) zwei theilerfremde reine Modulsysteme zweiter Stufe, so kann man stets eine ganze Grösse $\mathfrak{N}$ so bestimmen, dass

$$\mathfrak{N} \equiv 1 \mod.(N), \qquad \mathfrak{N} \equiv 0 \mod.(M)$$

ist.

Zum Beweise denke ich mir (M) und (N) in ihre einfachen Factoren zerlegt und es sei:

$$(M) \sim (\overline{\Pi}_1)\ldots(\overline{\Pi}_r), \quad (N) \sim (\overline{P}_1)\ldots(\overline{P}_s)$$

jene Zerlegung. Sind dann

$$(p_g^{a_g},\ P_g^{a_g}(x)) \quad \text{und} \quad (q_h^{b_h},\ Q_h^{\beta_h}(x) \qquad \binom{g=1,\ \ldots,\ r}{h=1,\ \ldots,\ s}$$

die primitiven Elemente der einfachen Systeme

$$(\overline{\Pi}_g) \quad \text{und} \quad (\overline{P}_h),$$

so sind die beiden folgenden Producte:

$$\Phi = \prod_{g=1}^{r}(u_g p_g^{a_g} + \bar{u}_g P_g^{a_g}),$$

$$\Psi = \prod_{h=1}^{s}(v_h q_h^{b_h} + \bar{v}_h Q_h^{\beta_h})$$

für jeden ganzen Werth der unbestimmten $(u_g, \bar{u}_g, v_h, \bar{v}_h)$ bzw. durch (M) und (N) theilbar, weil jeder ihrer Factoren eines der einfachen Systeme $(\overline{\Pi}_g)$ oder $(\overline{P}_h)$ enthält. Endlich bezeichne ich die s Producte, welche man aus Ψ durch Weglassung je eines Factors erhält, der Reihe nach durch $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_s$ d. h. ich setze:

$$\Psi_h = \frac{\Psi}{v_h q_h^{b_h} + \bar{v}_h Q_h^{\beta_h}}.$$

Legt man nun in jenen Formen Φ oder Ψ_h den Unbestimmten $(u, \bar{u}, v, \bar{v})$ irgend welche bestimmte Werthe $(u^{(i)}, \bar{u}^{(i)}, v^{(i)}, \bar{v}^{(i)})$ bei, so mögen die so sich ergebenden ganzzahligen Functionen von x durch $\Phi^{(i)}$ oder $\Psi_h^{(i)}$ bezeichnet werden.

Dann kann man in dem Ausdrucke:

$$\mathfrak{R} = c_1 \Phi^{(1)} \Psi_1^{(1)} + c_2 \Phi^{(2)} \Psi_2^{(2)} + \cdots + c_s \Phi^{(s)} \Psi_s^{(s)}$$

die Grössen $c_1, \ldots, c_s$ und die Werthe $(u^{(i)}, \bar{u}^{(i)}, v^{(i)}, \bar{v}^{(i)})$ so bestimmen, dass $\mathfrak{R}$ durch (M) theilbar ist, und modulo (N) congruent Eins wird.

In der That ist zunächst $\mathfrak{R}$ stets durch (M) theilbar, weil $\Phi^{(1)}, \ldots, \Phi^{(s)}$ jenes Modulsystem enthalten; zweitens kann man die noch unbestimmten Elemente stets so annehmen, dass $\mathfrak{R} \equiv 1 \pmod{(N)}$ ist, denn hierzu ist nothwendig und hinreichend, dass dieselbe Congruenz für jeden der s einfachen Factoren $(\bar{P}_h)$ von (N) erfüllt ist, und dieses ist a fortiori der Fall, wenn dieselben Congruenzen für die Modulsysteme $(q_i^{b_i}, Q_i^{\beta_i})$ bestehen, welche ja Multipla der Divisoren $(\bar{\Pi}_i)$ sind. Betrachtet man aber speciell $\mathfrak{R}$ modulo $(q_1^{b_1}, Q_1^{\beta_1})$, so fallen in dem Ausdrucke von $\mathfrak{R}$ alle Glieder mit Ausnahme des ersten fort, da $\Psi_2^{(2)}, \ldots, \Psi_s^{(s)}$ alle jenen Divisor enthalten und man findet

$$\mathfrak{R} \equiv c_1 . \Phi^{(1)} \Psi_1^{(1)} \quad (\text{modd.}(q_1^{b_1}, Q_1^{\beta_1}).$$

Bestimmt man aber hier die Grössen $(u^{(1)}, \bar{u}^{(1)}, v^{(1)}, \bar{v}^{(1)})$ so, dass jeder der in $\Phi^{(1)}$ und $\Psi_1^{(1)}$ auftretenden Linearfactoren

$$u_g^{(1)} p_g^{a_g} + \bar{u}_g^{(1)} P_g^{a_g} \quad \text{und} \quad v_h^{(1)} q_h^{b_h} + \bar{v}_h^{(1)} Q_h^{\beta_h} \qquad \begin{pmatrix} g = 1, 2, \ldots, r \\ h = 2, \ldots, s \end{pmatrix}$$

durch das Primmodulsystem (q_1, Q_1) nicht theilbar ist, was stets und auf unendlich viele Arten geschehen kann, so ist $\Phi^{(1)} \Psi_1^{(1)}$ zu $(q_1^{b_1}, Q_1^{\beta_1})$ also a fortiori zu $(\bar{P}_1)$ theilerfremd, und wählt man endlich für c_1 den zu $\Phi^{(1)} \Psi_1^{(1)}$ complementären Factor modulo $(\bar{P}_1)$, so ergiebt sich endlich:

$$\mathfrak{R} \equiv 1 \pmod{P_1}.$$

Führt man genau dieselbe Ueberlegung für $P_2, \ldots, P_s$ durch, so erhält man schliesslich eine ganze Function $\mathfrak{R}$, welche modulo (N) congruent Eins ist, was zu beweisen war.

Dieser Hülfssatz giebt nun ein einfaches Mittel, um für ein Product $(M.N)$ von zwei theilerfremden Divisorensystemen (M) und (N) ein vollständiges System incongruenter Functionen aufzustellen, wenn man sowohl für (M) als auch für (N) je ein solches System kennt.

Sind nämlich

$$a_1 \ldots a_m \quad \text{und} \quad b_1 \ldots b_n$$

zwei derartige Systeme bzw. für die beiden Divisoren

$$(M) \quad \text{und} \quad (N)$$

und sind $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ zwei so gewählte ganze Functionen, dass

$$\mathfrak{M} \equiv 1 \pmod{M}, \quad \mathfrak{N} \equiv 1 \pmod{N},$$
$$\mathfrak{M} \equiv 0 \pmod{N}, \quad \mathfrak{N} \equiv 0 \pmod{M}$$

ist, was nach dem soeben geführten Beweise stets möglich ist, so zeigt man leicht, dass die mn ganzen Functionen:

$$c_{ik} = \mathfrak{M} a_i + \mathfrak{N} b_k \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

modulo $(M.N)$ ein vollständiges System incongruenter Functionen bilden. Wegen der Eigenschaften von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ ergeben sich nämlich die Congruenzen:

$$c_{ik} \equiv a_i \pmod{M}, \quad c_{ik} \equiv b_k \pmod{N},$$

und hieraus folgt unmittelbar, dass zwei Elemente c_{ik} und $c_{i'k'}$ nur dann modulo (MN) congruent sein können, wenn $i = i'$, $k = k'$ ist, denn nur dann sind sie einander sowohl modulo (M), als auch modulo (N) congruent. Andererseits ist aber auch jede Grösse c modulo (MN) einem solchen Elemente c_{ik} congruent, denn es können a_i und b_k aus den beiden Congruenzen

$$c \equiv a_i \pmod{M}, \quad c \equiv b_k \pmod{N}$$

stets gefunden werden, und damit ist $c_{ik} = \mathfrak{M} a_i + \mathfrak{N} b_k$ ebenfalls bestimmt.

Es seien jetzt ferner:

$$a_1, \ \ldots, \ a_\mu \quad \text{und} \quad b_1, \ \ldots, \ b_\nu$$

diejenigen unter den Elementen $a_1, \ldots, a_m$ und $b_1, \ldots, b_n$ welche bzw. zu (M) und (N) theilerfremd sind, für welche also $(a_g, M) \sim 1$, und $(b_h, N) \sim 1$ ist, dann zeigt man ganz ebenso, dass die $\mu\nu$ Elemente:

$$c_{gh} = \mathfrak{M} a_g + \mathfrak{N} b_h \qquad \begin{pmatrix} g = 1, 2, \ldots, \mu \\ h = 1, 2, \ldots, \nu \end{pmatrix}$$

ein vollständiges System modulo (MN) incongruenter und zu (MN) theilerfremder Elemente bilden; denn einmal sind sie alle incongruent, weil sie ein Theilsystem von dem vorher betrachteten (c_{ik}) bilden, und ist ferner c zu dem Producte (MN) also a fortiori auch zu den beiden Factoren (M) und (N) relativ prim, so sind auch die Grössen a_g und b_h, denen c modulo M bzw. modulo N congruent sind, zu (M) und (N) theilerfremd, d. h. es ist in der That $c \equiv c_{gh}$ w. z. b. w. Hieraus folgen also die beiden Sätze:

Sind (M) und (N) zwei beliebige theilerfremde Modulsysteme, so ist stets:

$$N(M.N) = N(M).N(N),$$
$$\varphi(M.N) = \varphi(M).\varphi(N),$$

wenn die Functionen $N(M)$ und $\varphi(M)$ die früher angegebene Bedeutung haben.

Da nun im Anfange dieser Arbeit die beiden Zahlen $N(\overline{\Pi})$ und $\varphi(\overline{\Pi})$ für ein einfaches Divisorensystem $(\overline{\Pi})$ vollständig bestimmt worden sind, so können jene Zahlen nunmehr durch successive Anwendung dieses letzten Satzes auch für jedes beliebige System (M) gefunden werden. So ergeben sich die beiden Sätze, in welchen die vollständige Antwort auf die im Anfange dieser Arbeit aufgeworfenen Fragen enthalten ist:

Ist

$$M \backsim (\overline{\Pi}_1)(\overline{\Pi}_2)\ldots(\overline{\Pi}_h)$$

ein beliebiges reines Modulsystem zweiter Stufe und sind $(\overline{\Pi}_1)\ldots(\overline{\Pi}_h)$ seine einfachen Factoren, so ist die Anzahl $N(M)$ aller modulo (M) incongruenten ganzen ganzzahligen Functionen von x durch die Gleichung:

$$N(M) = \prod_{i=1}^{h} N(\overline{\Pi}_i) = \prod_{i=1}^{h} p_i^{n_i \lambda_i}$$

bestimmt, und ferner ist die Anzahl $\varphi(M)$ aller zu (M) theilerfremden incongruenten Functionen von x durch die Gleichung gegeben:

$$\varphi(M) = N(M) . \prod_{i=1}^{h} \left(1 - \frac{1}{N\Pi_i}\right),$$

wenn die h Systeme

$$\Pi_i = (p_i,\ P_i(x))$$

alle in M enthaltenen incongruenten Primdivisoren bedeuten.

Die Uebertragung eines geometrischen Lehrsatzes auf Mannigfaltigkeiten von gerader Ordnung als Beispiel der Anwendung einer schiefen Determinante.

(Von Herrn *H. Kühne* in Herford.)

Der geometrische Satz:

Vier gerade Linien bilden zusammen vier Dreiecke; die diesen Dreiecken umschriebenen Kreise schneiden sich in einem Punkte und die Mittelpunkte dieser Kreise liegen ebenfalls auf einem Kreis,

lässt sich auf Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung übertragen, aber nur für den Fall, dass die Ordnung n der Mannigfaltigkeit eine *gerade* Zahl ist. Das dem Dreieck entsprechende Gebilde der n-fachen Mannigfaltigkeit heisse, der Bezeichnungsweise *Kroneckers* gemäss, Prismatoid, das dem Kreise entsprechende Sphäroid. Dann lautet der obige Satz verallgemeinert:

In einer $\mathfrak{M}_n$ ***bilden*** $n+2$ $\mathfrak{M}_{n-1}$ $n+2$ ***Prismatoide. Die diesen Prismatoiden umschriebenen*** $n+2$ ***Sphäroide schneiden sich in einem Punkte, und ihre Mittelpunkte liegen ebenfalls auf einem Sphäroid.***

Hierbei ist für „ebene n-fache Mannigfaltigkeit“ abkürzungsweise $\mathfrak{M}_n$ gesetzt worden.

Die Richtigkeit dieses Satzes soll im Folgenden gezeigt werden.

Die Cartesischen Coordinaten eines Punktes x der $\mathfrak{M}_n$ seien x_h $(h = 1,\ldots,n)$; dann ist das Quadrat der Entfernung zweier Punkte x und x':

$$E^2 = \sum_h (x'_h - x_h)^2. \qquad (h = 1, \ldots, n)$$

Setzen wir ein für allemal $x_0 = 1$, so kann auch geschrieben werden:

$$E^2 = \sum_h (x'_h - x_h)^2. \qquad (h = 0, \ldots, n)$$

Es mögen nun $n+1$ Punkte gegeben sein, bestimmt durch die Zahlen f $(f = 0, \ldots, n)$, mit den Coordinaten x_{fh} $(f, h = 0, \ldots, n)$, dann ist der $n!$-fache Inhalt des aus ihnen gebildeten Prismatoids

$$J = |x_{fh}|. \qquad (f, h = 0, \ldots, n)$$

Statt der Coordinaten x_h eines Punktes sollen nun homogene Coordinaten u_g $(g = 0, \ldots, n)$ eingeführt werden, und zwar soll u_g das Verhältniss der Inhalte des Prismatoides x, g' $(g' = 0, \ldots, (g), \ldots, n)$ und des Grundprismatoides g $(g = 0, \ldots, n)$ sein. Es ist also

$$u_g = \frac{|x_{g'h},\ x_h,\ x_{g''h}|}{|x_{gh}|}. \qquad \begin{pmatrix} g' = 0, \ldots, g-1 \\ g'' = g+1, \ldots, n \\ g,\ h = 0, \ldots, n \end{pmatrix}$$

Bezeichnet jetzt (ξ_{ki}) das dem System (x_{ik}) $(i, k = 0, \ldots, n)$ reciproke System, sodass also die Beziehungen bestehen:

$$(x_{fh})(\xi_{hg}) = (\sum_h x_{fh}\xi_{hg}) = (\delta_{fg}),$$
$$(\xi_{fh})(x_{hg}) = (\sum_h \xi_{fh}x_{hg}) = (\delta_{fg}), \qquad \begin{pmatrix} f,\ g\ \ h = 0, \ldots, n \\ \delta_{fg} = 0, \text{ wenn } f \neq g \\ \delta_{ff} = 1 \end{pmatrix}$$

so wird:

(1.) $$u_g = \sum_h \xi_{hg}x_h, \qquad (g,\ h = 0, \ldots, n)$$

und daraus umgekehrt:

(1ª.) $$x_h = \sum_h x_{gh}u_g. \qquad (g,\ h = 0, \ldots, n)$$

Drücken wir nun die Entfernung zweier Punkte x, x' oder u, u' in homogenen Coordinaten aus. Es ist:

$$\begin{aligned} E^2 &= \sum_h (x'_h - x_h)^2 = \sum_{hfg} (x_{fh}u'_f - x_{fh}u_f)(x_{gh}u'_g - x_{gh}u_g) \\ &= \sum_{hfg} (u'_f - u_f)(u'_g - u_g)x_{fh}x_{gh} \\ &= \tfrac{1}{2}\sum_{hfg} (u'_f - u_f)(u'_g - u_g)[x^2_{fh} + x^2_{gh} - (x_{fh} - x_{gh})^2] \\ &= \sum_{hfg} (u'_f - u_f)(u'_g - u_g)x^2_{fh} - \tfrac{1}{2}\sum_{hfg} (x_{fh} - x_{gh})^2(u'_f - u_f)(u'_g - u_g), \end{aligned}$$

oder mit Benutzung der Gleichung $h = 0$ des Systems (1ª.) und weil

$$\sum_h (x_{fh} - x_{gh})^2$$

das Quadrat der Kantenlänge f, g des Grundprismatoids ist, das mit a_{fg} bezeichnet werde,

(2.) $$E^2 = -\tfrac{1}{2}\sum_{fg} a_{fg}(u'_f - u_f)(u'_g - u_g). \qquad (f,\ g,\ h = 0, \ldots, n)$$

Es handelt sich nun darum, die Gleichung eines Sphäroids, das durch $n+1$ Punkte geht, und die Coordinaten seines Mittelpunktes festzustellen. Die Coordinaten der $n+1$ Punkte seien u_{fh} $(f, h = 0, \ldots, n)$, wobei der erste Index sich auf den Punkt beziehen soll, und die Coordinaten des Mittelpunktes w_h $(h = 0, \ldots, n)$ sind; r sei der Radius des Sphäroids S. Bezeichnen noch

u_h $(h = 0, \ldots, n)$ laufende Coordinaten, so ist die Gleichung von S nach (2.):

$$\sum_{fg} a_{fg}(u_f - w_f)(u_g - w_g) = -2r^2.$$

Diese wird zu einer Identität, wenn u_i durch u_{fi} $(f, i = 0, \ldots, n)$ ersetzt wird, also:

$$\sum_{i,k} a_{ik}(u_{fi} - w_i)(u_{fk} - w_k) = -2r^2. \qquad (f, i, k = 0, \ldots, n)$$

Mithin gelten die Gleichungen:

$$\sum_{i,k} a_{ik}u_i u_k - 2\sum_{i,k} a_{ik}u_i w_k + \sum_{i,k} a_{ik}w_i w_k + 2r^2 = 0,$$

$$\sum_{i,k} a_{ik}u_{fi}u_{fk} - 2\sum_{i,k} a_{ik}u_{fi}w_k + \sum_{i,k} a_{ik}w_i w_k + 2r^2 = 0. \qquad (f, i, k = 0, \ldots, n)$$

Wird für den Augenblick

$$\sum_{i,k} a_{ik}w_i w_k + 2r^2 = 2C$$

gesetzt, so lauten die Gleichungen, unter Berücksichtigung von $\sum_k w_k = 1$:

$$\sum_{i,k} a_{ik}u_i u_k - 2\sum_k w_k\{\sum_i a_{ik}u_i - C\} = 0,$$

$$\sum_{i,k} a_{ik}u_{fi}u_{fk} - 2\sum_k w_k\{\sum_i a_{ik}u_{fi} - C\} = 0. \qquad (f, i, k = 0, \ldots, n)$$

Für das Bestehen dieser Gleichungen ist nothwendig:

$$\begin{vmatrix} \sum_{i,k} a_{ik}u_i u_k, & \sum_i a_{ik}u_i - C \\ \sum_{i,k} a_{ik}u_{fi}u_{fk}, & \sum_i a_{ik}u_{fi} - C \end{vmatrix} = 0. \qquad (f, i, k = 0, \ldots, n)$$

Dafür kann man schreiben:

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & C \\ 1, & \sum_{i,k} a_{ik}u_i u_k, & \sum_i a_{ik}u_i \\ 1, & \sum_{i,k} a_{ik}u_{fi}u_{fk}, & \sum_i a_{ik}u_{fi} \end{vmatrix} = 0.$$

Es sei nun (A_{ki}) das zu (a_{ik}) $(i, k = 0, \ldots, n)$ adjungirte System und $A = |a_{ik}|$ $(i, k = 0, \ldots, n)$. Dann multipliciren wir die obige Determinante mit

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & A_{kg} \end{vmatrix},$$

so ergiebt sich:

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & \sum_k C A_{kg} \\ 1, & \sum_{i,k} a_{ik}u_i u_k, & \sum_{i,k} a_{ik}A_{kg}u_i \\ 1, & \sum_{i,k} a_{ik}u_{fi}u_{fk}, & \sum_{i,k} a_{ik}A_{kg}u_{fi} \end{vmatrix} = 0,$$

oder, da

$$\sum_k a_{ik} A_{kg} = \delta_{ig} A$$

ist,

$$\begin{vmatrix} A, & 0, & \sum_k C A_{kg} \\ 1, & \sum_{i,k} a_{ik} u_i u_k, & u_g \\ 1, & \sum_{i,k} a_{ik} u_{fi} u_{fk}, & u_{fg} \end{vmatrix} = 0.$$

Mit Hülfe von

$$\sum_g u_g = \sum_g u_{fg} = 1$$

ergiebt sich daraus:

$$(A - \sum_{k,g} C A_{kg}) \begin{vmatrix} \sum_{i,k} a_{ik} u_i u_k, & u_g \\ \sum_{i,k} a_{ik} u_{fi} u_{fk}, & u_{fg} \end{vmatrix} = 0.$$

Der erste Factor dieses Productes ist

$$\begin{vmatrix} 1 & C \\ 1 & a_{ik} \end{vmatrix}$$

und verschwindet nicht identisch. *Somit ergiebt sich als Gleichung des durch die Punkte u_{fg} $(f, g = 0, \ldots, n)$ gehenden Sphäroids:*

$$(3.) \qquad S = \begin{vmatrix} \sum_{i,k} a_{ik} u_i u_k, & u_g \\ \sum_{i,k} a_{ik} u_{fi} u_{fk}, & u_{fg} \end{vmatrix} = 0.$$

Zur Bestimmung der Coordinaten w_k $(k = 0, \ldots, n)$ gehen wir aus von:

$$\sum_{i,k} a_{ik} u_{fi} u_{fk} - 2 \sum_{i,k} a_{ik} u_{fi} w_k + \sum_{i,k} a_{ik} w_i w_k + 2r^2 = 0. \qquad (f, i, k = 0, \ldots, n)$$

Wir setzen der bequemeren Rechnung wegen:

$$\tfrac{1}{2} \sum_{k,i} a_{ik} u_{fi} u_{fk} = D_f; \quad \sum_i a_{ik} u_{fi} = d_{fk}, \qquad (f, k = 0, \ldots, n)$$

und subtrahiren sämmtliche Gleichungen von der durch $f = 0$ gekennzeichneten; so kommt:

$$2 \sum_k w_k (d_{fk} - d_{0k}) = D_f - D_0 \qquad \begin{pmatrix} k = 0, \ldots, n \\ f = 1, \ldots, n \end{pmatrix}$$

und daraus mit Berücksichtigung von

$$w_0 = 1 - \sum_k w_k: \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

$$\sum_k w_k (d_{fk} - d_{0k} - d_{f0} + d_{00}) = -(d_{f0} - d_{00}) + \tfrac{1}{2}(D_f - D_0). \qquad (f, k = 1, \ldots, n)$$

Hieraus ergeben sich die w_k:

$$w_k |d_{fk} - d_{0k} - d_{f0} + d_{00}| = |d_{fk'} - d_{0k'} - d_{f0} + d_{00}, \; -d_{f0} + d_{00} + \tfrac{1}{2}(D_f - D_0)|$$

$(f, k = 1, \ldots, n; \; k' = 1, \ldots, (k), \ldots, n)$

in der Determinante rechts ist in der Verticalreihe k die letzte Reihe zu schreiben. Rändert man beide Determinanten in geeigneter Weise, so ergiebt sich nach einigen Umformungen:

$$w_k \begin{vmatrix} 0, & 1 \\ 1, & d_{fk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & d_{fk'}, & D_f, & D_{fk''} \end{vmatrix}. \qquad \begin{pmatrix} f, k = 0, \ldots, n \\ k' = 0, \ldots, k-1 \\ k'' = k+1, \ldots, n \end{pmatrix}$$

Es sei nun (v_{gf}) das reciproke System zu (u_{fg}) $(f, g = 0, \ldots, n)$. Dann multipliciren wir die Gleichung mit

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v_{gf} \end{vmatrix}.$$

Nun ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v_{gf} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d_{fk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ \sum_f v_{gf}, & \sum_f d_{fk} v_{gf} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v_{gf} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{fk'} & D_f & d_{fk''} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 1, & 1, \\ \sum_f v_{gf}, & \sum_f v_{gf} d_{fk'}, & \sum_f v_{gf} D_f, & \sum_f v_{gf} d_{fk''} \end{pmatrix}.$$

Mit Rücksicht auf

$$|u_{hi}| \sum_f v_{gf} = |u_{fg'}, \ 1, \ u_{fg''}| = |u_{fg'}, \ 1 - \sum_{g'} u_{fg'} - \sum_{g''} u_{fg''}, \ u_{fg''}| = |u_{fg}|$$

also

$$\sum_f v_{gf} = 1,$$

und

$$\sum_f v_{gf} d_{fh} = \sum_{fi} v_{gf} a_{ih} u_{fi} = \sum_i a_{ih} \delta_{ig} = a_{gh},$$

werden die beiden componirten Systeme:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_{gk} \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & a_{gk'}, & \frac{1}{2} \sum_{f,h,i} a_{hi} u_{fh} u_{fi} v_{gf}, & a_{gk''} \end{pmatrix}.$$

Wird nun noch $a_{\tau\tau} = 0$, $a_{\tau k} = a_{k\tau} = 1$ $(k = 0, \ldots, n)$ gesetzt, und das reciproke System zu

$$(a_{ik}) \quad \text{mit} \quad (\alpha_{ki}) \qquad (i, k = \tau, 0, 1, \ldots, n)$$

bezeichnet, so ergiebt sich schliesslich:

$$(4.) \qquad w_k = \alpha_{k\tau} + \tfrac{1}{2} \sum_{f,g,h,i} a_{hi} u_{fh} u_{fi} v_{gf} \alpha_{kg}. \qquad (f, g, h, i, k = 0, \ldots, n)$$

Für die spätere Anwendung soll nun noch die Gleichung (3.) eine andere

Gestalt erhalten. Es ist

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v_{hf} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sum_{i,k} a_{ik}u_iu_k, & u_g \\ \sum_{i,k} a_{ik}u_{fi}u_{fk}, & u_{fg} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{i,k} a_{ik}u_iu_k, & u_g \\ \sum_{f,i,k} a_{ik}u_{fi}u_{fk}v_{hf}, & \sum_f v_{hf}u_{fg} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sum_{i,k} a_{ik}u_iu_k, & u_g \\ \sum_{i,k,f} a_{ik}u_{fi}u_{fk}v_{hf}, & \delta_{hg} \end{vmatrix} = \sum_{i,k} a_{ik}u_iu_k - \sum_{h,g,i,k,f} u_g a_{ik}u_{fi}u_{fk}v_{hf}\delta_{gh}$$

$$= \sum_{i,k} a_{ik}u_iu_k - \sum_{g,i,k,f} a_{ik}u_{fi}u_{fk}v_{gf}u_g.$$

Somit ergiebt sich als Gleichung für S:

$$(5.) \qquad \sum_g u_g \sum_{f,i,k} a_{ik}u_{fi}u_{fk}v_{gf} = \sum_{i,k} a_{ik}u_iu_k. \qquad (f, g, h, i, k = 0, \ldots, n)$$

Nach diesen Vorbereitungen schreiten wir zum Beweise des eingangs angegebenen Satzes.

Zu den $n+1$ $\mathfrak{M}_{n-1}$, die das Grundprismatoid begrenzen, nehmen wir eine andere $\mathfrak{M}_{n-1}$ hinzu; deren Gleichung sei:

$$\sum_f c_f u_f = 0. \qquad (f = 0, \ldots, n)$$

Damit diese $\mathfrak{M}_{n-1}$ mit keiner Kante des Grundprismatoides parallel sei, dürfen keine zwei der Grössen c einander gleich sein. Sie schneidet die Kante f, g des Grundprismatoides in einem Punkte, dessen Coordinaten

$$u_f = \frac{c_g}{c_g - c_f}, \quad u_g = \frac{c_f}{c_f - c_g}, \quad u_h = 0 \qquad (h = 0, \ldots, (f, g), \ldots, n)$$

sind. Die $\mathfrak{M}_{n-1}$ $u_g = 0$ werde mit F_g, die $\mathfrak{M}_{n-1}$

$$\sum_f c_f u_f = 0$$

mit F bezeichnet. F und F_r $(r = 0, \ldots, (f), \ldots, n)$ bilden ein Prismatoid P_f; diesem sei das Sphäroid S_f umgeschrieben, und seine Eckpunkte seien durch das System

$$\begin{pmatrix} u_{ff}^{(f)}, & u_{fs}^{(f)} \\ u_{rf}^{(f)}, & u_{rs}^{(f)} \end{pmatrix} \qquad s, r = (0, \ldots, (f), \ldots, n)$$

gegeben. Dann ist nach dem Obigen:

$$\begin{pmatrix} u_{ff}^{(f)}, & u_{fs}^{(f)} \\ u_{rf}^{(f)}, & u_{rs}^{(f)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ \frac{c_r}{c_r - c_f}, & \delta_{rs}\frac{c_f}{c_f - c_r} \end{pmatrix}.$$

Die Determinante dieses Systems ist

$$U^{(f)} = \prod_r \frac{c_f}{c_f - c_r},$$

die zu $u_{rf}^{(f)}$ gehörige Subdeterminante $U_{fr}^{(f)} = 0$,

die zu $u_{fs}^{(f)}$ gehörige Subdeterminante $U_{sf}^{(f)} = U^{(f)} \frac{c_s}{c_f}$,

und die Subdeterminante zu $u_{rs}^{(f)}$ ist $U_{sr}^{(f)} = \delta_{rs} U^{(f)} \frac{c_f - c_r}{c_f}$.

Also ist das reciproke System zu

$$\begin{pmatrix} u_{ff}^{(f)}, & u_{fs}^{(f)} \\ u_{rf}^{(f)}, & u_{rs}^{(f)} \end{pmatrix} \quad \text{nämlich} \quad \begin{pmatrix} v_{ff}^{(f)}, & v_{sf}^{(f)} \\ v_{fr}^{(f)}, & v_{sr}^{(f)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & \frac{c_s}{c_f} \\ 0, & \delta_{sr} \frac{c_f - c_r}{c_f} \end{pmatrix}.$$

Dann wird der in (5.) auftretende Ausdruck

$$\sum_{h,i,k} a_{ik} u_{hi}^{(f)} u_{hk}^{(f)} v_{gh}^{(f)} = \sum_h v_{gh}^{(f)} \{2 \sum_r a_{fr} u_{hf}^{(f)} u_{hr}^{(f)} + \sum_{r,s} a_{rs} u_{hr}^{(f)} u_{hs}^{(f)}\} \quad \begin{pmatrix} r, s = 0, \ldots, (f), \ldots, n \\ h, i, k = 0, \ldots, n \end{pmatrix}$$

$$= v_{gf}^{(f)} \{2 \sum_r a_{fr} u_{ff}^{(f)} u_{fr}^{(f)} + \sum_{r,s} a_{rs} u_{fr}^{(f)} u_{fs}^{(f)}\}$$

$$+ \sum_t v_{gt}^{(f)} \{2 \sum_r a_{fr} u_{tf}^{(f)} u_{tr}^{(f)} + \sum_{r,s} a_{rs} u_{tr}^{(f)} u_{ts}^{(f)}\} \qquad (r, s, t = 0, \ldots, (f), \ldots, n)$$

$$= 2 \sum_r a_{fr} \frac{c_r}{c_r - c_f} \frac{c_f}{c_f - c_r} v_{gr}^{(f)} = 0, \quad \text{wenn} \quad g = f,$$

$$= 2 a_{fg} \frac{c_g}{c_g - c_f}, \quad \text{wenn} \quad g \neq f.$$

Setzen wir $a_{fg} = b_{fg}(c_g - c_f)$ und $b_{ff} = 0$, so ist $b_{gf} = -b_{fg}$ und somit das System (b_{fg}) $(f, g = 0, \ldots, n)$ ein schiefes System. Mit Hülfe hiervon wird:

$$\sum_{h,i,k} a_{ik} u_{hi}^{(f)} u_{hk}^{(f)} v_{gh}^{(f)} = 2 b_{fg} c_g. \qquad (f, g, h, i, k = 0, \ldots, n)$$

Ferner ergiebt sich der in (4.) auftretende Ausdruck:

$$\sum_{g,h,i,j} a_{hi} u_{jh}^{(f)} u_{ji}^{(f)} v_{gj}^{(f)} \alpha_{kg} = \sum_g \alpha_{kg} \sum_{j,h,i} a_{hi} u_{jh}^{(f)} u_{ji}^{(f)} v_{gj}^{(f)} = 2 \sum_g c_g b_{fg} \alpha_{kg}.$$

$$(g, f, h, i, j, k = 0, \ldots, n)$$

Demnach wird die Gleichung von S_f:

$$(6.) \qquad \sum_g b_{fg} c_g u_g = \tfrac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik} u_i u_k, \qquad (g, i, k = 0, \ldots, n)$$

und die Coordinaten $w_k^{(f)}$ des Mittelpunktes von S_f:

$$(7.) \qquad w_k^{(f)} = \alpha_{k\tau} + \sum_g c_g b_{fg} \alpha_{kg}. \qquad (k, g = 0, \ldots, n)$$

Diese Gleichungen gelten für $f = 0, \ldots, n$. Setzt man hierin $c_g = \delta_{fg}$, so fällt F mit F_f zusammen und S_f geht in S über, das dem Grundprismatoid umgeschrieben ist.

Die Gleichung von S ist demnach:

$$\sum_{i,k} a_{ik} u_i u_k = 0, \qquad (8.) \qquad (i, k = 0, \ldots, n)$$

und es sind die Coordinaten w_k des Mittelpunktes von S:

$$w_k = \alpha_{k\tau}. \qquad (9.) \qquad (k = 0, \ldots, n)$$

Wenn sich nun, wie eingangs behauptet, die Mannigfaltigkeiten S und S_f $(f = 0, \ldots, n)$ in einem Punkte schneiden, so muss es ein Werthsystem u_g $(g = 0, \ldots, n)$ geben, das die Gleichung (8.) und die Gleichungen (6.) befriedigt, ohne dass alle u verschwinden. Den Gleichungen (6.) und (8.) sind die Gleichungen

$$\sum_{g} b_{fg} c_g u_g = 0, \qquad (10.) \qquad (f = 0, \ldots, n)$$

$$\sum_{i,k} a_{ik} u_i u_k = 0 \qquad (10^a.) \qquad (g, i, k = 0, \ldots, n)$$

äquivalent. Damit nun nicht alle u verschwinden, muss die Determinante

$$|b_{fg}| = 0 \qquad (f, g = 0, \ldots, n)$$

sein. Das ist aber wie bemerkt eine *schiefe Determinante.* Diese verschwindet nur dann identisch, wenn sie von ungerader Ordnung ist, und da ihre Ordnung $n+1$ ist, muss n *gerade* sein. Im allgemeinen ist deshalb die Existenz eines Schnittpunktes von S und S_f $(f = 0, \ldots, n)$ für Mannigfaltigkeiten von ungerader Ordnung zu verneinen. Wenn n gerade ist, schliessen wir folgendermassen weiter. Es sei B die verschwindende Determinante des Systems (b_{fg}) $(f, g = 0, \ldots, n)$ und B_{gf} die zum Element b_{fg} gehörige Subdeterminante; es verschwinden nicht alle B_{gf}, sicherlich im allgemeinen nicht die zu den Diagonalgliedern gehörigen. Dann sind die Auflösungen des Gleichungssystems (10.):

$$c_g u_g = \lambda_h B_{gh}. \qquad (11.) \qquad (g = 0, \ldots, n;\ h \text{ beliebig})$$

Diese Werthe der u befriedigen auch die Gleichung $(10^a.)$; denn es ist:

$$\sum_{i,k} a_{ik} u_i u_k = \sum_{i,k} b_{ik}(c_k - c_i) u_i u_k = \sum_{i,k} u_i b_{ik} c_k u_k - \sum_{i,k} u_i b_{ki} c_k u_k$$
$$= 2 \sum_{i,k} u_i b_{ik} \lambda_h B_{kh} = 2 \sum_{i} u_i \lambda_h \delta_{ih} B = 0.$$

Damit ist gezeigt, dass, *wenn n gerade ist, sich alle S_f $(f = 0, \ldots, n)$ mit S in einem Punkte schneiden, dessen Coordinaten aus dem System* (11.) *sich ergeben.* Den Proportionalitätsfactor λ_h bestimmt die erste der Gleichungen $(1^a.)$.

Es erübrigt noch nachzuweisen, dass in diesem Falle die $n+2$ Mittelpunkte:

$$w_k^{(f)} = \alpha_{k\tau} + \sum_g c_g b_{fg} \alpha_{kg}, \qquad (f = 0, \ldots, n)$$

$$w_k = \alpha_{k\tau} \qquad (k, g = 0, \ldots, n)$$

ebenfalls auf einem Sphäroid liegen. Wenn das richtig ist, so müssen die Coordinaten w_k, $w_k^{(f)}$ $(f = 0, \ldots, n)$ die Gleichung (3.) identisch befriedigen, also die Gleichung:

(12.) $$\Psi = \begin{vmatrix} \sum_{i,k} a_{ik} w_i w_k, & w_g \\ \sum_{i,k} a_{ik} w_i^{(f)} w_k^{(f)}, & w_g^{(f)} \end{vmatrix} = 0$$

erfüllen. Es ist

$$\Phi^{(f)} = \sum_{i,k} a_{ik} w_i^{(f)} w_k^{(f)} = \sum_{i,k} a_{ik} (\alpha_{i\tau} + \sum_g c_g b_{fg} \alpha_{ig})(\alpha_{k\tau} + \sum_h c_h b_{fh} \alpha_{kh})$$

$$= \sum_{i,k} \{ a_{ik} \alpha_{i\tau} \alpha_{k\tau} + 2 a_{ik} \alpha_{k\tau} \sum_g c_g b_{fg} \alpha_{ig} + \sum_{g,h} a_{ik} c_g c_h b_{fg} b_{fh} \alpha_{ig} \alpha_{kh} \}. \qquad (i, k, g, h = 0, \ldots, n)$$

Berücksichtigt man, dass

$$\sum_k a_{ik} \alpha_{k\tau} + a_{i\tau} \alpha_{\tau\tau} = 0, \quad \text{also} \quad \sum_k a_{ik} \alpha_{k\tau} = -\alpha_{\tau\tau},$$

$$\sum_i \alpha_{i\tau} = 1, \quad \sum_i \alpha_{ih} = 0,$$

$$\sum_k a_{ik} \alpha_{kh} = \delta_{ih} - \alpha_{\tau h}, \qquad (h, i, k = 0, \ldots, n)$$

so erhält man:

$$\Phi^{(f)} = -\alpha_{\tau\tau} + \sum_{i,k} c_i c_k b_{fi} b_{fk} \alpha_{ik}, \qquad (i, k, f = 0, \ldots, n)$$

und entsprechend

$$\Phi = \sum_{i,k} a_{ik} w_i w_k = -\alpha_{\tau\tau}.$$

Somit wird

$$\Psi = \begin{vmatrix} -\alpha_{\tau\tau}, & \alpha_{h\tau} \\ \sum_{i,k} c_i c_k b_{fi} b_{fk} \alpha_{ik}, & \sum_k c_k b_{fk} \alpha_{hk} \end{vmatrix}. \qquad (f, h, i, k = 0, \ldots, n)$$

Multipliciren wir nun Ψ mit der Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0, & 1 \\ -1, & B_{gf} \end{vmatrix}, \qquad (f, g = 0, \ldots, n)$$

die als schiefe Determinante von gerader Ordnung im allgemeinen nicht verschwindet, so kommt:

$$\Delta\Psi = \begin{vmatrix} \sum_{i,k,f} c_i c_k b_{fi} b_{fk} \alpha_{ik}, & \sum_{k,f} c_k b_{fk} \alpha_{hk} \\ \alpha_{\tau\tau} + \sum_{i,k,f} c_i c_k b_{fi} b_{fk} B_{gf} \alpha_{ik}, & -\alpha_{h\tau} + \sum_{k,f} c_k b_{fk} B_{gf} \alpha_{hk} \end{vmatrix}. \qquad (g, h, i, k, f = 0, \ldots, n)$$

Infolge von:

$$\sum_f B_{gf} b_{fk} = \delta_{gk} B = 0$$

reduciren sich alle durch den Index g $(= 0, \ldots, n)$ gekennzeichneten Glieder auf $-\alpha_{h\tau}$; somit werden alle Horizontalreihen bis auf die erste, und abgesehen von der ersten Verticalreihe, bis auf einen Factor gleich. Deshalb verschwindet aber die ganze Determinante und es folgt

$$\Delta \Psi \quad \text{und damit auch} \quad \Psi = 0.$$

Die Punkte w und $w^{(f)}$ $(f = 0, \ldots, n)$ genügen also thatsächlich der Gleichung (12.). Damit ist gezeigt, dass die Mittelpunkte der $n+2$ Sphäroide ebenfalls auf einem Sphäroid liegen.

Dass dies auch nur für Mannigfaltigkeiten von gerader Ordnung gilt, ist leicht zu sehen, da für das Verschwinden von Ψ das Verschwinden von B nothwendig ist.

Ueber das Verhalten der Integrale von Differentialgleichungen bei der Annäherung der Veränderlichen an eine Unbestimmtheitsstelle.

(Von Herrn *J. Horn* in Charlottenburg.)

Zweiter Theil.

Die Integrale der Differentialgleichung

$$x^{k+1}\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

worin $P(x, y)$, $Q(x, y)$ ganze rationale Functionen von y bedeuten, deren Coefficienten in der Umgebung von $x = 0$ reguläre Functionen von x sind, während k eine ganze positive Zahl darstellt, haben im allgemeinen bei $x = 0$*) eine Stelle der Unbestimmtheit (*Fuchs,* Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1886). Jeder einfachen Wurzel ε_0 der Gleichung $P(0, \varepsilon_0) = 0$ entspricht eine im allgemeinen divergente Potenzreihe

$$\eta = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 x^2 + \cdots,$$

welche der Differentialgleichung formell genügt. Für die *Riccati*sche Gleichung

$$x^{k+1}\frac{dy}{dx} = A_0(x)y^2 + A_1(x)y + A_2(x)$$

habe ich im ersten Theil**) gezeigt, in welcher Weise diese divergenten Reihen Aufschluss über das Verhalten der die Differentialgleichung be-

*) Ersetzt man x durch $\frac{1}{x}$, so erscheint die Differentialgleichung

$$x^{-(k-1)}\frac{dy}{dx} + \frac{P\left(\frac{1}{x}, y\right)}{Q\left(\frac{1}{x}, y\right)} = 0$$

mit der singulären Stelle $x = \infty$ als Verallgemeinerung der im ersten Theil betrachteten *Riccati*schen Differentialgleichung.

**) Dieses Journal, Bd. 118, S. 257.

friedigenden Functionen bei der auf einem bestimmten Wege erfolgenden Annäherung der Veränderlichen x an die singuläre Stelle $x=0$ geben; Resultate, welche unter gewissen beschränkenden Voraussetzungen über die Coefficienten der *Riccati*schen Gleichung auch aus den Untersuchungen des Herrn *Poincaré* über die irregulären Integrale linearer Differentialgleichungen (Am. Journ. Bd. 7; Act. math. Bd. 8) hergeleitet werden könnten.

Im Folgenden werden ähnliche Untersuchungen für die obige allgemeinere Differentialgleichung angestellt. Ich setze die Coefficienten der Differentialgleichung als *reell* voraus, ich nehme an, dass sich x als *reelle* Grösse der Grenze 0 nähert, und untersuche das Verhalten der *reellen* Integrale *).

§ 1.

Unsere Differentialgleichung sei durch eine Substitution

$$y = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

auf die Form gebracht:

$$x^{k+1}\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,\ y)}{Q(x,\ y)}, \tag{1.}$$

wobei Zähler und Nenner der rechten Seite

$$\begin{cases} P(x,\ y) = P(y) = A_0 y^{m+2} + A_1 y^{m+1} + \cdots + A_{m+2}, \\ Q(x,\ y) = Q(y) = B_0 y^{m} \ \ + B_1 y^{m-1} + \cdots + B_m \end{cases} \tag{2.}$$

ganze Functionen $(m+2)$-ten bezw. $m$ten Grades von y sind, mit Coefficienten in Gestalt von Potenzreihen

$$\begin{cases} A_i = A_i(x) = a_i + a_i' x + a_i'' x^2 + \cdots, & (i=0,\ 1,\ \ldots,\ m+2) \\ B_i = B_i(x) = b_i + b_i' x + b_i'' x^2 + \cdots, & (i=0,\ 1,\ \ldots,\ m) \end{cases} \tag{3.}$$

welche für hinreichende kleine Werthe von $|x|$ convergiren. Durch die angegebene Substitution kann erreicht werden, dass a_0, b_0 beide positiv und von Null verschieden sind. Wir setzen der Einfachheit halber voraus, dass die Gleichungen

$$\varphi(\alpha_0) = P(0,\ \alpha_0) = a_0\alpha_0^{m+2} + a_1\alpha_0^{m+1} + \cdots + a_{m+2} = 0, \tag{4.}$$

$$\psi(\beta_0) = Q(0,\ \beta_0) = b_0\beta_0^{m} \ \ + b_1\beta_0^{m-1} + \cdots + b_m \ \ = 0 \tag{5.}$$

*) Die Beschränkung auf *reelle* Grössen findet *nur im zweiten Theile* statt. Der dritte Theil lässt bei Betrachtung der Differentialgleichung

$$x^{k+1}\frac{dy}{dx} = \mathfrak{P}(x,\ y)$$

wieder complexe Grössen zu.

keine mehrfachen Wurzeln besitzen und dass auch keine Wurzel α_0 von (4.) mit einer Wurzel β_0 von (5.) übereinstimmt.

Dann können die beiden Functionen $P(x, y)$, $Q(x, y)$, wenn $|x|$ hinreichend klein angenommen wird, für keinen Werth von y gleichzeitig verschwinden und ein Integral y der Gleichung (1.) kann sich in der Nähe von $x = 0$ nur singulär verhalten, wenn y oder $\frac{dy}{dx}$ unendlich wird. Eine Integralcurve gehe durch den Punkt $x = \xi$, $y = \infty$. Die Substitution $y = \frac{1}{z}$ ergiebt

$$x^{k+1}\frac{dz}{dx} = -\frac{A_0 + A_1 z + \cdots}{B_0 + B_1 z + \cdots};$$

wenn $|x|$ hinreichend klein ist, sind A_0 und B_0 von Null verschieden, so dass $\frac{dz}{dx}$ für $x = \xi$, $z = 0$ einen endlichen, von Null verschiedenen Werth erhält. Wir haben demnach eine Entwickelung

$$(6.) \qquad y = \frac{\gamma_0}{x-\xi} + \gamma_1 + \gamma_2(x-\xi) + \cdots \quad (\gamma_0 \neq 0).$$

Weiter gehe eine Integralcurve durch einen Punkt $x = \xi$, $y = \eta$, für welchen $Q(\xi, \eta) = 0$, also $\frac{dy}{dx} = \infty$ wird. Aus (1.) erhält man für

$$\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)_{x=\xi, y=\eta} = \left(x^{k+1}\frac{\frac{\partial Q}{\partial y}}{P}\right)_{x=\xi, y=\eta} = 2\lambda$$

einen endlichen, von Null verschiedenen Werth, da unseren Annahmen zufolge für hinreichend kleine Werthe von $|x|$ nicht gleichzeitig $Q = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = 0$ sein kann. Es gelten demnach Entwickelungen von der Form

$$(7.) \qquad \begin{cases} x - \xi = \lambda(y-\eta)^2 + \lambda'(y-\eta)^3 + \cdots & (\lambda \neq 0), \\ y - \eta = \left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} + \mu'\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right)^{\frac{2}{2}} + \cdots. \end{cases}$$

Die Gleichung (4.) habe p reelle Wurzeln α_0, die Gleichung (5.) q reelle Wurzeln β_0, so dass $p+q$ eine gerade Zahl ist. Die Gleichung $P(y) = 0$ liefert für hinreichend kleine Werthe von $|x|$ p reelle Curvenzüge

$$(8.) \qquad y = \alpha(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots$$

und die Gleichung $Q(y) = 0$ q reelle Curvenzüge

$$(9.) \qquad y = \beta(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots,$$

welche wir kurz als die Curven α und β bezeichnen. In der Nähe von $x=0$ können sich diese Curven nicht schneiden. Werden die p Reihen $\alpha(x)$ mit $\alpha', \ldots, \alpha^{(p)}$, die q Reihen $\beta(x)$ mit $\beta', \ldots, \beta^{(q)}$ bezeichnet, so erhält die Gleichung (1.) die Form

$$(10.) \qquad x^{k+1}\frac{dy}{dx} = \frac{(y-\alpha')\ldots(y-\alpha^{(p)})}{(y-\beta')\ldots(y-\beta^{(q)})}\cdot R(x,\ y);$$

die Function R nimmt, wenn $|x|$ unter einer gewissen Grenze liegt, für beliebige y nur positive Werthe an. Der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$, welcher 0 oder ∞ wird, wenn sich der Punkt x, y auf einer Curve α oder β befindet, hat auf verschiedenen Seiten einer dieser Curven verschiedene Vorzeichen. Er ist für $0 < x \leqq x_0$ (x_0 positiv und hinreichend klein) positiv oberhalb der ersten und, da $p+q$ gerade ist, auch unterhalb der letzten der Curven α und β. Wir bezeichnen eine Curve α oder β als Curve erster oder zweiter Art, je nachdem $\frac{dy}{dx}$ oberhalb der Curve positiv oder negativ ist. Wir nennen auch die Wurzeln α_0 der Gleichung (4.) Wurzeln erster oder zweiter Art, je nachdem die entsprechenden Curven α von der ersten oder zweiten Art sind; α_0 ist also eine Wurzel erster oder zweiter Art, je nachdem

$$\frac{P(0,\ y)}{Q(0,\ y)} = \frac{\varphi(y)}{\psi(y)} = \frac{\varphi'(\alpha_0)}{\psi(\alpha_0)}(y-\alpha_0)+\cdots$$

für $y > \alpha_0$ positiv oder negativ ist, d. h. je nachdem

$$(11.) \qquad \frac{\varphi'(\alpha_0)}{\psi(\alpha_0)} \gtrless 0$$

ist.

Wenn sich x der Grenze 0 nähert, kann der Grenzwerth ε_0 eines Integrals y von (1.), falls ein solcher vorhanden ist, nur eine Wurzel α_0 der Gleichung (4.) sein. Denn aus (1.) folgt

$$\int_{y_0}^{y}\frac{Q(x,\ y)}{P(x,\ y)}dy = \frac{1}{kx_0^k}-\frac{1}{kx^k} \qquad (k>0)$$

$$= \log\frac{x}{x_0}; \qquad (k=0)$$

für $x=0$, $y=\varepsilon_0$ wird die rechte Seite unendlich, während die linke Seite

endlich bleibt, wenn nicht $P(0, \varepsilon_0) = 0$ ist. Um die Unmöglichkeit von $\lim y = \infty$ zu erkennen, setzen wir $y = \frac{1}{z}$ und erhalten

$$x^{k+1} \frac{dz}{dx} = -\frac{A_0 + A_1 z + \cdots}{B_0 + B_1 z + \cdots};$$

$\lim z = 0$ ist ausgeschlossen, weil der Zähler der rechten Seite für $x = 0$, $z = 0$ nicht verschwindet.

Wir lassen nun x als reelle positive Grösse zur Grenze 0 gehen und zeigen, dass jeder Wurzel α_0 von (4.), für welche

$$\frac{\varphi'(\alpha_0)}{\psi(\alpha_0)} < 0$$

ist, ein und nur ein Integral y entspricht, für welches $\lim y = \alpha_0$ ist*). Zunächst sieht man, dass nicht mehr als ein Integral η mit dem Grenzwerth α_0 existiren kann; die Substitution

$$y = \eta + z$$

führt nämlich auf eine Differentialgleichung von der Form

$$x^{k+1} \frac{dz}{dx} = \frac{z P_1(z)}{Q(\eta + z)}.$$

$\frac{P_1(z)}{Q(\eta+z)}$ wird für $\lim x = +0$, $z = 0$ gleich $\frac{\varphi'(\alpha_0)}{\psi(\alpha_0)} < 0$; für $z > 0$ ist demnach $\frac{dz}{dx} < 0$, für $z < 0$ $\frac{dz}{dx} > 0$, wenn $0 < x \leqq x_0$ ist; eine Integralcurve oberhalb der Geraden $z = 0$ steigt, wenn x abnimmt, während eine unterhalb $z = 0$ befindliche Integralcurve fällt. Da sich somit jede in der Nähe der Geraden $z = 0$ befindliche Integralcurve, in der Richtung der abnehmenden x durchlaufen, von dieser Geraden entfernt, so ist abgesehen von $z = 0$ selbst keine Integralcurve mit $\lim z = 0$ möglich. Dass wirklich ein Integral η mit $\lim \eta = \alpha_0$ existiren muss, zeigt folgende Ueberlegung. Wir nehmen an, α nehme für $0 \leqq x \leqq x_0$ mit abnehmenden x ab**). Oberhalb der Curve α zweiter Art ist $\frac{dy}{dx} < 0$, unterhalb $\frac{dy}{dx} > 0$. Durch jeden Punkt $x = x_1$ der Geraden $y = \alpha_0$ $(0 < x_1 < x_0)$ geht ein Integral y_1,

---

*) Zur Veranschaulichung des Folgenden sind Figuren nützlich.

**) Die Abänderungen, welche eintreten, wenn eine andere Annahme gemacht wird, sind ohne weiteres ersichtlich. Aehnlich an späteren Stellen.

welches mit wachsendem x wächst; dasselbe hat für $x = x_0$ einen gewissen Werth c_1, welcher zwischen α_0 und $\alpha(x_0)$ liegt. Mit abnehmendem x_1 nimmt c_1 zu; es sei

$$\lim c_1 = c_0 \quad \text{für} \quad \lim x_1 = 0.$$

Das Integral $\mathfrak{y}$, welches für $x = x_0$ den Werth c_0 annimmt, kann die Curve α nicht bei $x = x_2$ $(0 < x_2 \leqq x_0)$ schneiden; sonst müsste nämlich ein Integral vorhanden sein, welches die Curve α für $x < x_2$ schneidet und demnach für $x = x_0$ einen Werth $c < c_0$ annimmt. Ein Integral mit einem Anfangswerth $c < c_0$ kann aber nur die Beschaffenheit von y_1 besitzen; denn es giebt Integrale von der Beschaffenheit von y_1, welche für $x = x_0$ Werthe c_1 zwischen c und c_0 annehmen. Demnach kann die durch den Punkt $x = x_0$, $y = c_0$ gehende Integralcurve $\mathfrak{y}$ weder die Gerade $y = \alpha_0$ noch die Curve $y = \alpha$ für $0 < x \leqq x_0$ schneiden, sie muss also durch $x = 0$, $y = \alpha_0$ gehen, w. z. b. w. Jedem α_0 zweiter Art entspricht eine solche Integralcurve $\mathfrak{y}$, welche für $x \leqq x_0$ zwischen der Curve α und der Geraden $y = \alpha_0$ verläuft.

Wir zerlegen nun den zwischen $x = 0$ und $x = x_0$ gelegenen Flächenstreifen durch die Curven β und die den Curven α zweiter Art entsprechenden Integralcurven $\mathfrak{y}$ in Gebiete und untersuchen den Verlauf einer Integralcurve, deren Ausgangspunkt sich in einem dieser Gebiete befindet. Ein Integral y kann mit abnehmendem x nicht aus einem dieser Gebiete in ein anderes übertreten. Zunächst kann eine Curve $\mathfrak{y}$ von einer Integralcurve y nicht geschnitten werden, da $\mathfrak{y}$ selbst Integralcurve ist. Wenn eine Integralcurve y eine Curve β in einem Punkt ξ, η trifft, so gilt die Entwickelung (7.). Je nachdem die Curve β von der ersten oder zweiten Art ist, ist λ positiv oder negativ. Im zweiten Falle hat y für $x < \xi$ zwei reelle Werthe und ist für $x > \xi$ imaginär; wir können also sagen, dass auf der Curve β zweiter Art eine Curve y beginnt und in zwei Zweigen nach der Seite der abnehmenden x läuft. Im ersten Falle hat y für $x > \xi$ zwei reelle Werthe, um für $x < \xi$ imaginär zu werden. Eine in der Richtung der abnehmenden x durchlaufene Integralcurve endigt also auf einer Curve β erster Art, falls sie eine solche trifft; y lässt sich als reelle Function nicht bis $x = 0$ fortsetzen.

Wir betrachten ein von zwei Curven β oder von einer Curve β und einer Curve $\mathfrak{y}$ begrenztes Gebiet, in welchem keine Curve α erster Art

liegt*). Wir zeigen, dass jedes in einem solchen Gebiete befindliche Integral auf einer Curve β erster Art endigt, also keinen Grenzwerth für $\lim x = 0$ besitzt. Wird das Gebiet von zwei Curven β (β' und β'') begrenzt, so muss eine darin befindliche Integralcurve fortwährend steigen oder fortwährend fallen; y muss bei $x = \xi > 0$ auf einer Curve β erster Art endigen, weil sonst $\lim\limits_{x=+0} y = \varepsilon_0$ ($\beta_0' \geqq \varepsilon_0 \geqq \beta_0''$) wäre, was nicht möglich ist. Wird das Gebiet von einer Curve β und einer Curve $\mathfrak{y}$ begrenzt, ohne die zu $\mathfrak{y}$ gehörige Curve α zweiter Art zu enthalten, so wird ebenso geschlossen; denn ausser $\mathfrak{y}$ giebt es kein Integral y mit $\lim\limits_{x=+0} y = \alpha_0$. Enthält das Gebiet die Curve α zweiter Art, welche der Curve $\mathfrak{y}$ entspricht, so muss ein anfangs zwischen $\mathfrak{y}$ und α befindliches Integral y die Curve α bei $x = \xi > 0$ überschreiten, um, wenn sie sich zwischen α und β befindet, entweder fortwährend zu steigen oder fortwährend zu fallen, so dass die früheren Schlüsse gelten.

Betrachten wir weiter ein Gebiet zwischen zwei Curven β oder $\mathfrak{y}$, in welchem eine Curve α erster Art liegt; es kann dies nur eine einzige sein, da zwei Curven α erster Art entweder durch eine Curve β zweiter Art oder eine Curve $\mathfrak{y}$ getrennt sind. Eine in dem Gebiete befindliche Integralcurve kann dasselbe weder durch eine Curve $\mathfrak{y}$ verlassen, noch auf einer Begrenzungscurve β, welche hier von der zweiten Art sein muss, endigen. Wir nehmen beispielsweise an, die in dem Gebiete befindliche Curve α erster Art falle für $0 \leqq x \leqq x_0$, wenn sie in der Richtung der abnehmenden x durchlaufen wird. Oberhalb der Curve α erster Art ist $\frac{dy}{dx} > 0$, unterhalb $\frac{dy}{dx} < 0$**). Eine unterhalb α befindliche Integralcurve y steigt fortwährend, wenn sie die Curve α nicht überschreitet; es ist also $\lim\limits_{x=+0} y = \alpha_0$. Andernfalls fällt sie nach Durchsetzung der Curve α. Eine

*) Zwei Curven $\mathfrak{y}$ können ein solches Gebiet nicht begrenzen, da zwischen zwei Curven α zweiter Art entweder eine Curve α erster Art oder eine Curve β erster Art liegen muss. Im letzteren Falle zerfällt das Gebiet in zwei andere.

**) Wird unser Gebiet beispielsweise oben von einer Curve $\mathfrak{y}$ begrenzt und enthält es die entsprechende Curve $\bar{\alpha}$ zweiter Art, welche alsdann mit abnehmendem x steigen muss, so ist oberhalb $\bar{\alpha}$ $\frac{dy}{dx} < 0$; ein zwischen $\bar{\alpha}$ und $\mathfrak{y}$ befindliches Integral steigt anfangs, bis es die Curve $\bar{\alpha}$ bei $x = \xi > 0$ schneidet, um wie im Text weiter zu verlaufen.

Integralcurve oberhalb α fällt; sie kann nicht unter die ebenfalls fallende Curve α herabsinken, weil sie dann sofort wieder steigen müsste; y nähert sich also fortwährend abnehmend dem Grenzwerthe α_0. Alle Integrale y, welche sich für $x \leqq x_0$ in einem Gebiete befinden, welches eine Curve α erster Art enthält, haben demnach für $\lim x = +0$ den Grenzwerth α_0.

In demjenigen Gebiete, welches aus der Fläche oberhalb der ersten und der Fläche unterhalb der letzten der Curven β und $\mathfrak{y}$ besteht, erleiden die bisherigen Betrachtungen keine Aenderung. Wenn ein Integral y in dem unteren Theile des Gebietes verlaufend für $x = \xi$ unendlich wird, wechselt es der Entwickelung (6.) zufolge sein Vorzeichen und läuft für $x < \xi$ im oberen Theile des Gebietes weiter.

Sind im Falle eines geraden m überhaupt keine reellen Curven α, β vorhanden, so nimmt jedes Integral y mit abnehmendem x fortwährend ab, da $\frac{dy}{dx}$ stets positiv ist, es wird für $x = \xi > 0$ unendlich gross und wechselt sein Vorzeichen. Jedes Integral oscillirt demnach zwischen $-\infty$ und $+\infty$.

Heben wir aus dem Bisherigen den Satz hervor:

Der Grenzwerth eines Integrals y der Differentialgleichung (1.) ***für*** $\lim x = +0$, ***falls ein solcher vorhanden ist, genügt der Gleichung***

$$\varphi(\alpha_0) = a_0 \alpha_0^{m+2} + a_1 \alpha_0^{m+1} + \cdots + a_{m+2} = 0.$$

Einer reellen Wurzel α_0 ***dieser Gleichung entsprechen unendlich viele Integrale oder nur ein einziges Integral mit dem Grenzwerth*** α_0, ***je nachdem*** $\frac{\varphi'(\alpha_0)}{\psi(\alpha_0)}$ ***positiv oder negativ ist.***

Damit jedes Integral, dessen Anfangswerth für $x = x_0$ reell ist, einen Grenzwerth besitzt, ist nothwendig und hinreichend, dass zwischen je zwei Wurzeln β_0, sowie zwischen einer Wurzel β_0 und einer Wurzel α_0 zweiter Art*) immer eine Wurzel α_0 erster Art liegt, dass also die Anzahl der α_0 erster Art $\frac{p+q}{2}$ beträgt, oder mit anderen Worten, dass die Anzahl der Wurzeln der Gleichung $\varphi(\alpha_0) = 0$, für welche $\frac{\varphi'(\alpha_0)}{\psi(\alpha_0)} > 0$ ist, gleich der Hälfte der Gesammtzahl der reellen Wurzeln der Gleichungen $\varphi(\alpha_0) = 0$ und $\psi(\beta_0) = 0$ ist. Dabei ist vorausgesetzt, dass überhaupt reelle Wurzeln vorhanden sind.

---

*) Auch oberhalb der ersten oder unterhalb der letzten der genannten Wurzeln.

§ 2.

Wir betrachten jetzt ein particuläres Integral $y = f(x)$ der Differentialgleichung (1.), für welches

$$\lim_{x=+0} f(x) = \alpha_0$$

ist, und bestimmen die Grenzwerthe der sämmtlichen Ableitungen $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$. Wenn die absoluten Beträge von x und $y-\alpha_0$ hinreichend klein sind, so hat man

$$\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = \mathfrak{P}(x, y-\alpha_0) = \frac{\varphi'(\alpha_0)}{\psi(\alpha_0)}(y-\alpha_0)+bx+\cdots.$$

Die wiederholte Differentiation der Gleichung (1.)

$$x^{k+1}\frac{dy}{dx} = \mathfrak{P}(x, y-\alpha_0)$$

ergiebt

$$(12'.) \qquad x^{k+1}\frac{dy'}{dx} = S_1 y' + T_1,$$

$$(12''.) \qquad x^{k+1}\frac{dy''}{dx} = S_2 y'' + T_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$(12^{(n)}.) \qquad x^{k+1}\frac{dy^{(n)}}{dx} = S_n y^{(n)} + T_n;$$

hierbei ist

$$(13'.) \qquad S_1 = \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y} - (k+1)x^k, \quad T_1 = \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x},$$

$$(13''.) \qquad \begin{cases} S_2 = S_1 - (k+1)x^k, \\ T_2 = \left(\frac{\partial S_1}{\partial x} + \frac{\partial S_1}{\partial y}y'\right)y' + \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y}y', \end{cases}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(13^{(n)}.) \qquad \begin{cases} S_n = S_{n-1} - (k+1)x^k, \\ T_n = \left(\frac{\partial S_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial S_{n-1}}{\partial y}y'\right)y^{(n-1)} \\ \qquad + \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial T_{n-1}}{\partial y}y' + \cdots + \frac{\partial T_{n-1}}{\partial y^{(n-2)}}y^{(n-1)}. \end{cases}$$

Wir setzen jetzt ausdrücklich $k > 0$ *voraus* und haben für $\lim x = +0$:

$$\lim S_1 = \frac{\varphi'(\alpha_0)}{\psi(\alpha_0)},$$

ferner, falls $\lim y^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ vorhanden und endlich ist,

$$\lim S_n = \lim S_{n-1} = \lim S_1 = \frac{\varphi'(\alpha_0)}{\psi(\alpha_0)},$$

und auch für $\lim T_n$ ergiebt sich ein endlicher Werth. *Wenn also wirklich* ein endlicher Grenzwerth von $f^{(n)}(x)$ vorhanden ist, so erhält man aus (12.):

$$\frac{\varphi'(\alpha_0)}{\psi(\alpha_0)} \lim f^{(n)}(x) + \lim T_n = 0,$$

also

$$\lim f^{(n)}(x) = n!\,\varepsilon_n = -\frac{\psi(\alpha_0)}{\varphi'(\alpha_0)} \lim T_n. \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{14.}$$

Wir fassen die Gleichung (12′.) als Differentialgleichung für die Function y' auf, nachdem $y = f(x)$ gesetzt ist; ebenso setzen wir in $(12^{(n)}.)$ $y = f(x)$, $y' = f'(x)$, $\ldots$, $y^{(n-1)} = f^{(n-1)}(x)$, so dass wir eine Differentialgleichung für $y^{(n)}$ erhalten.

Es sei zunächst $\frac{\varphi'(\alpha_0)}{\psi(\alpha_0)} > 0$. Die Anwendung des § 1*) auf (12′.) ergiebt**), dass $\lim y'$ existirt und nur gleich ε_1 oder unendlich sein kann; für ein particuläres Integral $y' = \mathfrak{y}'$ ist $\lim \mathfrak{y}' = \infty$, für alle auderen Integrale $\lim y' = \varepsilon_1$; denn der dem Ausdruck $\frac{\varphi'(\alpha_0)}{\psi(\alpha_0)}$ für (1.) bei der Gleichung (12′.) entsprechende Ausdruck ist

$$\lim S_1 = \frac{\varphi'(\alpha_0)}{\psi(\alpha_0)} > 0$$

für $\lim y' = \varepsilon_1$. Es ist also nur zu zeigen, dass das uns interessirende particuläre Integral $y' = f'(x)$ nicht mit $\mathfrak{y}'$ übereinstimmen kann. Für die lineare Differentialgleichung (12′.) ist $\mathfrak{y}'$ dasjenige Integral, welches für jeden Werth von x unendlich wird; nach (1.) ist aber

$$f'(x) = \frac{P(x, f(x))}{x^{k+1} Q(x, f(x))}$$

---

*) Man kann auch die Sätze über die *Riccati*sche Differentialgleichung im ersten Theil benutzen.

**) Allerdings sind S_1, T_1, nachdem $y = f(x)$ gesetzt ist, keine convergenten Potenzreihen von x mehr, wie die A_i und B_i in (1.); sie sind aber für $0 < x < x_0$ stetige Functionen von x, welche sich, wenn x zur Grenze 0 geht, beständig wachsend oder beständig abnehmend bestimmten Grenzwerthen nähern, was für die zu machenden Schlüsse ausreichend ist.

für keinen Werth von x in der Nähe von $x=0$ unendlich; es kann also nur

$$\lim f'(x) = \varepsilon_1$$

sein.

Nehmen wir an, es sei

$$\lim f^{(i)}(x) = i!\,\varepsilon_i; \qquad (i=1, \ldots, n-1)$$

dann ist für ein einziges Integral $y^{(n)} = \mathfrak{y}^{(n)}$ von $(12^{(n)}.)$ $\lim \mathfrak{y}^{(n)} = \infty$, für alle anderen Integrale $\lim y^{(n)} = n!\,\varepsilon_n$, denn es ist

$$\lim S_n = \frac{\varphi'(\alpha_0)}{\psi(\alpha_0)} > 0.$$

Hier ist aber $\mathfrak{y}^{(n)} = \infty$ für alle Werthe von x, während $(12^{(n-1)})$ zeigt, dass

$$f^{(n)}(x) = \frac{S_{n-1} f^{(n-1)}(x) + T_{n-1}}{x^{k+1}}$$

in der Nähe von $x=0$ nicht unendlich werden kann. Wir haben demnach

$$\lim f^{(n)}(x) = n!\,\varepsilon_n.$$

Es sei weiter $\frac{\varphi'(\alpha_0)}{\psi(\alpha_0)} < 0$. Dann hat $n!\,\varepsilon_n$ für die Gleichung $(12^{(n)}.)$ denselben Charakter wie α_0 für (1.), falls $\lim f^{(i)}(x)$ $(i=1, \ldots, n-1)$ endlich ist; für ein particuläres Integral $y^{(n)} = \mathfrak{y}^{(n)}$ ist $\lim \mathfrak{y}^{(n)} = n!\,\varepsilon_n$, für alle anderen $\lim y^{(n)} = \infty$*), und es wäre zu zeigen, dass $f^{(n)}(x)$ mit $\mathfrak{y}^{(n)}$ übereinstimmt. Daraus, dass die Curve $\mathfrak{y} = f(x)$ zwischen der Curve $y = \alpha$ und der Geraden $y = \alpha_0$ verläuft, folgt aber**), dass $\lim \frac{d\mathfrak{y}}{dx}$ nicht unendlich sein kann, während $\lim \frac{d\alpha}{dx} = \alpha_1$ endlich ist; also ist $\lim f'(x) = \varepsilon_1$. Unter der Annahme, es sei $\lim f^{(i)}(x) = i!\,\varepsilon_i$ $(i=1, \ldots, n-1)$, liegt das Integral $\mathfrak{y}^{(n-1)} = f^{(n-1)}(x)$

---

*) Für hinreichend kleine Werthe von x muss $y^{(n)}$ fortwährend wachsen oder fortwährend abnehmen.

**) Nehmen wir etwa an, dass sich $\alpha = \alpha(x)$ und also auch $\mathfrak{y} = f(x)$ abnehmend dem Grenzwerth α_0 nähern und dass sich $\frac{d\alpha}{dx}$ dem Grenzwerth α_1, $\frac{d\mathfrak{y}}{dx}$ wachsend dem Grenzwerth ∞ nähert. Dann ist für hinreichend kleine positive x

$$f(x) = \alpha_0 + x f'(\theta_1 x), \quad \alpha(x) = \alpha_0 + x\alpha'(\theta_2 x),$$

wobei $0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$ ist, also

$$f(x) - \alpha(x) = x[f'(\theta_1 x) - \alpha'(\theta_2 x)] > 0,$$

was mit $\alpha_0 < \mathfrak{y} < \alpha$ nicht verträglich ist.

von ($12^{(n-1)}$.) zwischen der Curve $y^{(n-1)} = -\frac{T_{n-1}}{S_{n-1}}$, für welche $\lim \frac{d}{dx}\left(-\frac{T_{n-1}}{S_{n-1}}\right)$ endlich ist, und der Geraden $y^{(n-1)} = \lim\left(-\frac{T_{n-1}}{S_{n-1}}\right) = (n-1)!\,\varepsilon_{n-1}$; es kann demnach $\lim \frac{d\eta^{(n-1)}}{dx} = \lim f^{(n)}(x)$ nicht unendlich sein: also ist

$$\lim f^{(n)}(x) = n!\,\varepsilon_n.$$

Indem wir $\varepsilon_0 = \alpha_0$ setzen, bilden wir die im allgemeinen divergente Reihe

$$\eta = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 x^2 + \cdots. \tag{15.}$$

Setzt man

$$f(x) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 x + \cdots + \varepsilon_n x^n + z_n x^n, \tag{16.}$$

also

$$z_n = \frac{f(x) - (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 x + \cdots + \varepsilon_n x^n)}{x^n},$$

so ist der Grenzwerth der $n$ten Ableitung des Zählers von z_n gleich

$$\lim f^{(n)}(x) - n!\,\varepsilon_n = 0,$$

der Grenzwerth der $n$ten Ableitung des Nenners gleich $n!$, während die Grenzwerthe der niedrigeren Ableitungen verschwinden; also ist*)

$$\lim z_n = 0, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{17.}$$

d. h. unser Integral $y = f(x)$ wird durch die Reihe (15.) asymptotisch dargestellt.

Durch die Reihe (15.) wird die Differentialgleichung (1.) formell befriedigt. Wir können die Coefficienten ε_n durch Einsetzung von $y = \eta$ in (1.) und Vergleichung der Coefficienten der Potenzen von x berechnen; wir finden so:

$$\begin{cases} \varphi(\varepsilon_0) = a_0\varepsilon_0^{m+2} + a_1\varepsilon_0^{m+1} + \cdots + a_{m+2} = 0, \\ \varphi'(\varepsilon_0).\varepsilon_n = \text{ganze Function von } \varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_{n-1}. \end{cases} \tag{18.}$$

Wegen

$$x^{k+1}\frac{d\eta}{dx} = \varepsilon_1 x^{k+1} + 2\varepsilon_2 x^{k+2} + \cdots$$

werden die durch Vergleichung der Coefficienten von x^0, x^1, …, x^k ent-

*) Vgl. etwa *Stolz*, Diff.- u. Int.-Rechn., I. Theil, S. 72 ff., wo die benutzte Regel unter den hier erfüllten Voraussetzungen bewiesen ist.

stehenden Gleichungen (18.) einfach dadurch erhalten, dass man in $P(\eta)$ die Coefficienten von $x^0, x^1, \ldots, x^k$ gleich Null setzt; es ist also mit Rücksicht auf (8.) wegen $P(\alpha) = 0$:

$$\varepsilon_0 = \alpha_0, \quad \varepsilon_1 = \alpha_1, \quad \ldots, \quad \varepsilon_k = \alpha_k. \tag{19.}$$

Fassen wir die bisherigen Resultate in den Satz zusammen:

Jedes Integral $y = f(x)$ ***der Differentialgleichung*** (1.) $(k > 0)$, ***welches für*** $\lim x = +0$ ***den Grenzwerth*** ε_0 ***besitzt, wird durch die der Differentialgleichung formell genügende Reihe***

$$\eta = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 x^2 + \cdots$$

asymptotisch dargestellt. Es ist für $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\lim \frac{f(x) - (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 x + \cdots + \varepsilon_n x^n)}{x^n} = 0$$

und

$$\lim f^{(n)}(x) = n! \varepsilon_n.$$

Um das Verhalten der Integrale von (1.) bei dem Grenzübergange $\lim x = -0$ zu untersuchen, setzen wir $x = -t$ und erhalten

$$t^{k+1} \frac{dy}{dt} = \frac{P(-t, y)}{Q(-t, y)} \quad \text{für gerades } k,$$

$$t^{k+1} \frac{dy}{dt} = -\frac{P(-t, y)}{Q(-t, y)} \quad \text{für ungerades } k.$$

Bei geradem k bleibt demnach der Ausdruck $\frac{\varphi'(\alpha_0)}{\psi(\alpha_0)}$, dessen Vorzeichen den Charakter des Werthes α_0 bestimmt, ungeändert, während er bei ungeradem k in $-\frac{\varphi'(\alpha_0)}{\psi(\alpha_0)}$ übergeht. Ist k gerade, so haben sowohl für $\lim x = +0$ als auch für $\lim x = -0$ unendlich viele Integrale den Grenzwerth α_0, wenn $\frac{\varphi'(\alpha_0)}{\psi(\alpha_0)} > 0$ ist. Bei geradem k mit $\frac{\varphi'(\alpha_0)}{\psi(\alpha_0)} < 0$ ist bei beiden Grenzübergängen nur ein Integral mit $\lim y = \alpha_0$ vorhanden. Ist k ungerade und $\frac{\varphi'(\alpha_0)}{\psi(\alpha_0)} > 0$, so ist für unendlich viele Integrale $\lim\limits_{x=+0} y = \alpha_0$, aber nur für ein Integral $\lim\limits_{x=-0} y = \alpha_0$; umgekehrt bei ungeradem k mit $\frac{\varphi'(\alpha_0)}{\psi(\alpha_0)} < 0$.

Wir haben demnach für die Integralcurven der Differentialgleichung (1.) mit $k > 0$ drei Arten von singulären Punkten $x = 0$, $y = \alpha_0$. Abgesehen von $x = 0$ haben alle durch den Punkt $x = 0$, $y = \alpha_0$ gehenden Integral-

curven unter sich eine Berührung unendlich hoher Ordnung und mit der Curve $y = \alpha$ eine Berührung $k$ter Ordnung*).

Im Falle $k = 0$ gelten zwar noch die Entwickelungen von § 1, aber nicht diejenigen von § 2. Indessen ist dieser Fall durch *Briot* und *Bouquet* und *Poincaré* (Journ. de l'Éc. pol. cah. 36, 45) erledigt. An Stelle der beschriebenen singulären Punkte treten für $k = 0$ die Punkte, welche Herr *Poincaré* (*Liouv.* Journal 1881 ff.) als „nœud" und „col" bezeichnet hat.

---

*) D. h. es ist für $\lim x = +0$ bezw. $\lim x = -0$:

$$\lim \frac{d^n y}{dx^n} = \lim \frac{d^n \alpha}{dx^n}, \qquad (n = 0, 1, \ldots, k)$$

ferner, wenn y_1, y_2 zwei von derselben Seite her in den Punkt $(0, \alpha_0)$ einlaufende Integrale sind,

$$\lim \frac{d^n y_1}{dx^n} = \lim \frac{d^n y_2}{dx^n}. \qquad (n = 0, 1, \ldots, \infty)$$

Zusammenstellung der Formeln des Herrn S. *Gundelfinger* zum Hauptaxenproblem der Flächen zweiter Ordnung und zweiter Klasse bei Zugrundelegung von projectiven Coordinaten.

(Von Herrn *Ph. Brückel* in Darmstadt.)

Die folgende Arbeit bildet einen Auszug aus Vorträgen, die mir Herr *Gundelfinger* zum Zweck der Herausgabe gehalten hat. Sie sollte als Ergänzung bezw. Erweiterung der Methoden und Sätze dienen, die in den „Vorlesungen*) aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte von *S. Gundelfinger*, herausgegeben von *F. Dingeldey*, 1895“ entwickelt worden sind. Wir haben eine vorläufige Zusammenstellung für nöthig gefunden, weil in den besten und ausführlichsten Lehrbüchern über die analytische Geometrie der Flächen zweiten Grades (*Plücker, Hesse, Salmon-Fiedler, Clebsch-Lindemann*) die Entwickelungen entweder sich nur auf Cartesische Coordinaten oder wenigstens nicht auf allgemeine projective Coordinaten beziehen. Ueberdies sind die letzten Formeln gerade für die Ausartungen — wie immer in der Algebra, so auch hier schwieriger als die sog. allgemeinen Fälle — nicht mit der nöthigen Einfachheit und unvollständig behandelt worden**).

Um die Uebersicht der Formeln nicht zu stören, wurden die Beweise im Texte vielfach nur angedeutet oder am Schlusse einzelner Abschnitte in Anmerkungen gegeben. Der Vollständigkeit halber sind die Kriterien

---

*) Im Folgenden sind alle Verweise auf dieses Buch unter der Abkürzung „Kegelsch.“ gegeben.

**) Von den verschiedenen speciellen Fällen einer allgemeinen Flächenschaar II. Klasse sind bei einer *confocalen* Schaar mehrere Fälle auszuschliessen auf Grund des Fundamentaltheorems (8) B) in den „Kegelsch.“ S. 68; vgl. auch die Entwickelungen von Herrn *Gundelfinger* in *Hesses* Raumgeometrie, Suppl. IV S. 515 ff. (Satz 23).

der **Flächen zweiter Ordnung** (resp. Klasse) und ihrer ebenen Schnitte hier beigefügt, und zwar dem Inhalte nach die gleichen, welche Herr *Gundelfinger* in *Hesse*s analytischer Geometrie des Raumes, (1876) gegeben hat, jedoch in eine für die Berechnung praktischere *Form* gebracht.

Erster Theil.

Kriterien der Flächen zweiter Ordnung und zweiter Klasse sowie der Curven zweiter Ordnung im Raume.

§ 1.

Definitionen.

Im Folgenden werden für einen variabelen Punkt P Tetraedercoordinaten $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ verwandt, die durch eine laufende Proportion folgender Art definirt sind:

$$(1.) \qquad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \frac{q_1}{e_1} : \frac{q_2}{e_2} : \frac{q_3}{e_3} : \frac{q_4}{e_4} .$$

Dabei bedeuten e_1, e_2, e_3, e_4 die positiv genommenen Abstände eines festen Einheitspunktes E von den Seitenebenen a_1, a_2, a_3, a_4 des Coordinatentetraeders, q_1, q_2, q_3, q_4 die Abstände des Punktes P von den vier Seitenebenen, wobei q_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem P und E auf derselben oder entgegengesetzten Seite von a_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ gelegen sind. Nach derselben Regel sind also auch die Vorzeichen für die Höhen h_1, h_2, h_3, h_4 des Tetraeders zu bestimmen.

Unter diesen Voraussetzungen ist bekanntlich die Gleichung der *unendlich fernen Ebene*

$$(2.) \qquad p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+p_4x_4 = 0, \quad \text{worin} \quad p_i = \frac{e_i}{h_i} . \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Für homogene rechtwinkelige oder schiefwinkelige Coordinaten ist also $p_1 = p_2 = p_3 = 0$, $p_4 = 1$ anzunehmen.

Die Coordinaten $u_1 : u_2 : u_3 : u_4$ einer Ebene u werden definirt durch die Proportion

$$(3.) \qquad u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = \frac{e_1\pi_1}{h_1} : \frac{e_2\pi_2}{h_2} : \frac{e_3\pi_3}{h_3} : \frac{e_4\pi_4}{h_4} ,$$

worin π_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ die Entfernungen der vier Scheitel des Tetraeders von der gegebenen Ebene u bedeuten. Ihre Gleichung ist

$$(4.) \qquad u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4 = 0.$$

§ 2.

Kriterien.

Es sei

$$(5.) \qquad f(x, x) \equiv \sum_1^4{}_i \sum_1^4{}_k a_{ik}x_ix_k = 0 \quad (a_{ik} = a_{ki})$$

die Gleichung einer Fläche II. Ordnung,

$$A \equiv \Sigma \pm (a_{11}a_{22}a_{33}a_{44})$$

die Determinante der Form $f(x, x)$ und

$$(6.) \qquad F(u, u) \equiv \sum_1^4{}_i \sum_1^4{}_k A_{ik}u_iu_k, \quad \text{worin} \quad A_{ik} = \frac{\partial A}{\partial a_{ik}} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

die adjungirte Form von $f(x, x)$.

In den Kriterien der Fläche II. Klasse ist

$$(7.) \qquad \varphi(u, u) \equiv \sum_1^4{}_i \sum_1^4{}_k \alpha_{ik}u_iu_k = 0 \quad (\alpha_{ik} = \alpha_{ki})$$

die Gleichung der betreffenden Fläche,

$$A = \Sigma \pm (\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}\alpha_{44})$$

die Determinante der Form $\varphi(u, u)$ und

$$(8.) \qquad \Phi(x, x) \equiv \sum_1^4{}_i \sum_1^4{}_k A_{ik}x_ix_k, \quad \text{wobei} \quad A_{ik} = \frac{\partial A}{\partial \alpha_{ik}} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

ihre adjungirte Form.

A) Schnitt einer Fläche II. Ordnung $f(x, x) = 0$ mit einer Ebene $q_x = 0$.

y und z seien irgend zwei verschiedene, willkürlich fixirte unendlich ferne Punkte auf der Schnittebene q, aber nicht auf $f(x, x) = 0$ gelegen (sodass für diese Punkte $q_y = 0$, $q_z = 0$, $p_y = 0$, $p_z = 0$), $p_x = 0$ die Gleichung der unendlich fernen Ebene und $u_x = 0$, $v_x = 0$ beliebige Ebenen.

I. $F(q, q) \gtrless 0$: ein nicht zerfallender Kegelschnitt.

a) $f(y, y)f(z, z) - f^2(y, z) > 0$: eine Ellipse, imaginär oder reell, je nachdem $f(y, y)F(q, q) > 0$ oder < 0.

b) $f(y, y)f(z, z) - f^2(y, z) < 0$: eine Hyperbel.

c) $f(y, y)f(z, z) - f^2(y, z) = 0$: eine Parabel.

II. $F(q, q) = 0$, ohne dass alle $\frac{\partial F(q, q)}{\partial a_{ii}}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ verschwinden; etwa $\frac{\partial F(q, q)}{\partial a_{11}} \gtrless 0$: ein Geradenpaar.

a) $f(y, y)f(z, z) - f^2(y, z) > 0$: zwei imaginäre Geraden, deren reeller Schnittpunkt im Endlichen liegt.

b) $f(y, y)f(z, z) - f^2(y, z) < 0$: zwei reelle, nicht parallele Geraden.

c) $f(y, y)f(z, z) - f^2(y, z) = 0$: zwei parallele Geraden, imaginär oder reell, je nachdem $\frac{\partial F(q, q)}{\partial a_{11}} > 0$ oder < 0.

d) $f(y, y) = 0$, $f(z, z) = 0$, $f(y, z) = 0$*): zwei reelle Geraden, von denen die eine im Unendlichen liegt.

III. $F(q, q) = 0$ und alle $\frac{\partial F(q, q)}{\partial a_{ii}}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ gleich Null**): eine Doppelgerade.

a) $f(y, y) = 0$, $f(z, z) = 0$*): eine unendlich ferne Doppelgerade.

b) eine von den beiden Grössen $f(y, y)$, $f(z, z)$ nicht gleich Null: eine im Endlichen gelegene Doppelgerade.

IV. Seien r, s, t irgend drei willkürlich gewählte Punkte auf $q_x = 0$, die nicht in einer Geraden liegen — etwa die Schnittpunkte mit den drei Kanten $(x_1 = 0, x_2 = 0)$, $(x_2 = 0, x_3 = 0)$, $(x_3 = 0, x_1 = 0)$ — und ist $f(r, r) = 0$, $f(s, s) = 0$, $f(t, t) = 0$, $f(r, s) = 0$, $f(s, t) = 0$, $f(t, r) = 0$, so bildet die schneidende Ebene einen Theil der Fläche zweiter Ordnung.

Zusatz: Diese sechs Gleichungen sagen aus, dass alle Punkte $\varkappa r_i + \lambda s_i + \mu t_i$ der Fläche angehören oder auch, dass für alle Werthe der u_i und v_i: $\begin{pmatrix} q & u & v \\ q & u & v \end{pmatrix} \equiv 0$ ist.

---

*) Diese Bedingungen sagen aus, dass alle Punkte $\varkappa y_i + \lambda z_i$ auf der unendlich fernen Geraden (q/p) der Fläche angehören.

**) Diese Bedingungen sind identisch mit $\begin{pmatrix} q & u \\ q & u \end{pmatrix} \equiv 0$.

B) Flächen zweiter Ordnung[1]).

I. $A \gtrless 0$: Die Berührungsebenen der Flächenpunkte bilden eine doppeltunendliche Mannigfaltigkeit.

1) $A > 0$: imaginäres Ellipsoid und geradlinige Flächen.

a) $f(y, y)F(p, p) > 0$, $f(y, y)f(z, z) - f^2(y, z) > 0$[2]): imaginäres Ellipsoid[2a]).

b) $F(p, p) \gtrless 0$, und die beiden Ungleichungen in a) bestehen nicht gleichgleichzeitig: einfaches Hyperboloid.

c) $F(p, p) = 0$: hyperbolisches Paraboloid.

2) $A < 0$: nicht geradlinige Flächen.

a) $f(y, y)F(p, p) > 0$, $f(y, y)f(z, z) - f^2(y, z) > 0$[2]): reelles Ellipsoid.

b) $F(p, p) \gtrless 0$, und die beiden Ungleichungen in a) bestehen nicht gleichzeitig: getheiltes Hyperboloid.

c) $F(p, p) = 0$: elliptisches Paraboloid.

II. $A = 0$, aber nicht alle A_{ii} gleich Null: Kegel und Cylinder.

1) $f(y, y)F(p, p) > 0$, $f(y, y)f(z, z) - f^2(y, z) > 0$[2]): imaginärer Kegel.

2) $F(p, p) \gtrless 0$, und die beiden Ungleichungen in 1) bestehen nicht gleichzeitig: reeller Kegel.

3) $F(p, p) = 0$: Cylindergattung.

α) nicht alle $\frac{\partial F(p, p)}{\partial a_{ii}}$ gleich Null; etwa $\frac{\partial F(p, p)}{\partial a_{11}} \gtrless 0$.

a) $\frac{\partial F(p, p)}{\partial a_{11}} > 0$[3]): elliptischer Cylinder, imaginär oder reell, je nachdem $f(y, y)F(q, q) > 0$ oder < 0, wobei $q_y = 0$, $p_y = 0$ vorausgesetzt ist.

b) $\frac{\partial F(p, p)}{\partial a_{11}} < 0$[4]): hyperbolischer Cylinder.

β) alle $\frac{\partial F(p, p)}{\partial a_{ii}}$ gleich Null[5]): parabolischer Cylinder.

III. $A = 0$, alle $A_{ii} = 0$[6]), aber mindestens eine Hauptunterdeterminante II. Grades $a_{\alpha\alpha}a_{\beta\beta} - a_{\alpha\beta}^2 \gtrless 0$: ein Ebenenpaar.

1) nicht alle $\frac{\partial F(p, p)}{\partial a_{ii}}$ gleich Null.

a) $a_{\alpha\alpha}a_{\beta\beta} - a_{\alpha\beta}^2 > 0$: zwei imaginäre, nicht parallele Ebenen.

b) $a_{\alpha\alpha}a_{\beta\beta} - a_{\alpha\beta}^2 < 0$: zwei reelle, nicht parallele Ebenen.

2) alle $\frac{\partial F(p, p)}{\partial a_{ii}}$ gleich Null: zwei parallele Ebenen, imaginär oder reell, je nachdem $a_{\alpha\alpha}a_{\beta\beta} - a_{\alpha\beta}^2 > 0$[7]) oder < 0.

IV. $A = 0$, alle $A_{ii} = 0$ und alle $a_{\alpha\alpha}a_{\beta\beta} - a_{\alpha\beta}^2 = 0$ (gleichbedeutend mit: Sämmtliche Subdeterminanten II. Grades gleich Null): eine Doppelebene.

Anmerkung. Bildet die unendlich ferne Ebene einen Theil der Fläche, so ist für irgend drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte y, z, t auf $p_x = 0$:

$$f(y, y) = 0, \quad f(z, z) = 0, \quad f(t, t) = 0, \quad f(y, z) = 0, \quad f(z, t) = 0, \quad f(t, y) = 0\ ^{8}).$$

C) Flächen zweiter Klasse [9]).

I. $A \gtrless 0$: Die Berührungspunkte der Tangentenebenen bilden eine doppeltunendliche Mannigfaltigkeit.

1) $A > 0$: imaginäres Ellipsoid und geradlinige Flächen.

a) $\varphi(p,p)\Phi(y,y) > 0$, $\varphi(p,p)\varphi(v,v) - \varphi^2(p,v) > 0$; imaginäres Ellipsoid.

b) $\varphi(p,p) \gtrless 0$ und die beiden Ungleichungen in a) bestehen nicht gleichzeitig: einfaches Hyperboloid.

c) $\varphi(p,p) = 0$: hyperbolisches Paraboloid.

2) $A < 0$: nicht geradlinige Flächen.

a) $\varphi(p,p)\Phi(y,y) > 0$, $\varphi(p,p)\varphi(v,v) - \varphi^2(p,v) > 0$: reelles Ellipsoid.

b) $\varphi(p,p) \gtrless 0$ und die beiden Ungleichungen in a) bestehen nicht gleichzeitig: getheiltes Hyperboloid.

c) $\varphi(p,p) = 0$: elliptisches Paraboloid.

II. $A = 0$, aber nicht alle A_{ii} gleich Null: Grenzflächen II. Klasse.

a) $\varphi(p,p)\Phi(y,y) > 0$: Ellipse, imaginär oder reell, je nachdem $\varphi(p,p)\varphi(v,v) - \varphi^2(p,v) > 0$ oder < 0.

b) $\varphi(p,p)\Phi(y,y) < 0$: Hyperbel.

c) $\varphi(p,p) = 0$, ohne dass alle $\varphi'(p_i)$ gleich Null: Parabel.

d) alle $\varphi'(p_i) = 0$: Kegelschnitt im Unendlichen und zwar, wenn etwa $A_{\delta\delta}$ (vgl. Bezeichnung in Anm. [2a]) $\gtrless 0$,
imaginäre Ellipse, wenn $\Delta_1 \Delta_3 > 0$, $\Delta_2 > 0$.
reelle Curve, wenn Δ_1 Δ_3 und Δ_2 nicht gleichzeitig positiv.

III. $A = 0$, alle $A_{ii} = 0$, aber nicht alle Subdeterminanten II. Grades gleich Null: etwa $\alpha_{kk}\alpha_{ll} - \alpha_{kl}^2 \gtrless 0$ (wobei k, l zwei bestimmte Zahlen aus der Reihe 1, 2, 3, 4 seien): ein Punktepaar.

a) $\varphi(p,p) \gtrless 0$: ein im Endlichen gelegenes Punktepaar,
imaginär, wenn $\alpha_{kk}\alpha_{ll} - \alpha_{kl}^2 > 0$ (für irgend ein Zahlenpaar k, l aus der Reihe 1, 2, 3, 4),
reell, wenn $\alpha_{kk}\alpha_{ll} - \alpha_{kl}^2 < 0$.

b) $\varphi(p,p) = 0$ und nicht alle $\varphi'(p_i)$ gleich Null: ein Punktepaar, wovon ein Punkt im Endlichen und ein Punkt im Unendlichen.

c) alle $\varphi'(p_i) = 0$: zwei Punkte im Unendlichen,
imaginär, wenn $\alpha_{kk}\alpha_{ll} - \alpha_{kl}^2 > 0$,
reell, wenn $\alpha_{kk}\alpha_{ll} - \alpha_{kl}^2 < 0$.

IV. $A = 0$, alle $A_{ii} = 0$ und alle $\alpha_{kk}\alpha_{ll} - \alpha_{kl}^2 = 0$: ein Doppelpunkt,
im Endlichen, wenn $\varphi(p,p) \gtrless 0$,
im Unendlichen, wenn $\varphi(p,p) = 0$.

Anmerkungen zu den voranstehenden Kriterien der Flächen und ihrer ebenen Schnitte.

[1]) In den Kriterien der Flächen II. Ordnung sind y und z irgend zwei verschiedene, willkürlich fixirte Punkte auf der unendlich fernen Ebene, und $q_x = 0$ eine willkürliche Ebene, die durch y geht, für welche jedoch $F(q, q)$ nicht verschwindet.

[2]) Das Gleichheitszeichen ist in jedem Falle ausgeschlossen.

[2a]) Die Kriterien für das imaginäre Ellipsoid können ersetzt werden durch $\Delta_1 \Delta_3 > 0$, $\Delta_2 > 0$, worin $\Delta_1 = a_{\alpha\alpha}$, $\Delta_2 = \Sigma\pm(a_{\alpha\alpha}a_{\beta\beta})$, $\Delta_3 = \Sigma\pm(a_{\alpha\alpha}a_{\beta\beta}a_{\gamma\gamma})$, wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ irgend eine bestimmte Permutation von 1, 2, 3, 4 ist. Sind diese Bedingungen für eine bestimmte Permutation erfüllt, so sind sie für jede erfüllt.

[3]) Man könnte auch sagen: $f(y, y)f(z, z) - f^2(y, z) > 0$, wobei das Gleichheitszeichen ausgeschlossen ist.

[4]) Man könnte auch sagen: $f(y, y)f(z, z) - f^2(y, z) \leqq 0$.

[5]) Man könnte auch sagen: $f(y, y)f(z, z) - f^2(y, z) \equiv 0$.

[6]) $A = 0$ und sämmtliche $A_{ii} = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ ist gleichbedeutend mit: Sämmtliche $A_{ik} = 0$ $(i, k = 1, 2, 3, 4)$.

[7]) Wenn auch nur eine einzige Hauptunterdeterminante II. Grades $a_{\gamma\gamma}a_{\delta\delta} - a_{\gamma\delta}^2$ verschwindet, so tritt der zweite Fall („reell“) ein.

[8]) Diese sechs Bedingungen sagen aus, dass alle Punkte $\varkappa y + \lambda z + \mu t$ auf $p_x = 0$ der Fläche angehören.

[9]) In dieser Zusammenstellung ist $v_x = 0$ eine beliebige Ebene $q(v, v) \geqq 0$ und y ein beliebig fixirter Punkt auf der Geraden $(p_x = 0, v_x = 0)$.

Um die Kriterien für die Flächen II. Ordnung zu erhalten, hat man zuerst die Ellipsoide von den übrigen Flächen geschieden durch die Bedingungen, unter welchen $f(x, x) = 0$ von $p_x = 0$ in einer imaginären Ellipse geschnitten wird. Sodann wurden unter der Voraussetzung reeller Flächen die geradlinigen von den nichtgeradlinigen Flächen getrennt: man untersuchte, wann die Fläche von einer Tangentenebene in einem reellen oder imaginären Geradenpaar getroffen wird und erhielt bei $f(y, y) = 0$ und beliebigen u_i die Bedingungen*) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}f'(y_i) & u_i \\ \frac{1}{2}f'(y_i) & u_i \end{pmatrix} \geqq 0$ oder $-Au_y^2 \geqq 0$.

Zum Schlusse mögen die zur Ableitung der Kriterien für die ebenen Schnitte einer Fläche II. Ordnung nöthigen Untersuchungen folgen, die mit Hülfe der beiden Fälle $A \geqq 0$ die Entscheidung über die Gattung einer Fläche II. Ordnung resp. Klasse gegeben haben.

I. Wann wird eine Fläche $f(x, x) = 0$ von einer Ebene $q_x = 0$ in einer imaginären Ellipse geschnitten?

Man fixire auf der Geraden $(p_x = 0, q_x = 0)$ beliebig zwei Punkte y und z, dann muss in diesem Falle $f(y, y) + 2\lambda f(y, z) + \lambda^2 f(z, z) = 0$ zwei

*) vgl. *Schlömilch*, Z. XVIII S. 543—552.

imaginäre Wurzeln besitzen, d. h. $f(y,y)f(z,z)-f^2(y,z)>0$ und auch $f(y,y)$ sowohl wie $f(z,z)$ von Null verschieden sein. Ferner muss $\begin{pmatrix} q & \frac{1}{2}f'(y_i) \\ q & \frac{1}{2}f'(y_i) \end{pmatrix} > 0$ d. i. $-f(y,y)\begin{pmatrix} q \\ q \end{pmatrix} > 0$, weil $\Sigma f'(y_i)x_i = 0$ eine Diametralebene ist.

Dieser Beweis gilt übrigens auch dann, wenn $q_x = 0$ mit $p_x = 0$ zusammenfällt, nur sind dann y und z *irgend* zwei Punkte auf $p_x = 0$.

II. Wann wird eine Fläche II. Ordnung $f(x,x) = 0$ von einer Ebene $q_x = 0$ in einem Geradenpaar getroffen?

Seien z_i die Coordinaten der Spitze, x_i die Coordinaten irgend eines Punktes auf dem ebenen Schnitte, so müsste $f(z,z)+2\lambda f(z,x)+\lambda^2 f(x,x) = 0$ für alle Werthe von λ befriedigt werden, d. h. $f(z,x) = 0$ müsste mit $q_x = 0$ identisch sein, somit $f'(z_i) = \varrho q_i$; da überdies $q_z = 0$ ist, so wird $F(q,q) = 0$ die gesuchte Bedingung sein.

III. Wann werden diese beiden Geraden zusammenfallen?

Dazu ist nöthig, dass *irgend eine Ebene* $u_x = 0$ mit $(f(x,x) = 0, q_x = 0)$ zwei zusammenfallende Schnittpunkte hat, also $\begin{pmatrix} q & u \\ q & u \end{pmatrix} \equiv 0$ für alle u_i oder $f(y,y)f(z,z)-f^2(y,z) \equiv 0$.

IV. Soll endlich $f(x,x) = q_x . r_x$ sein, so wird jeder Punkt y auf $q_x = 0$ auch auf $f(y,y) = 0$ liegen; mithin ist $\begin{pmatrix} q & u & v \\ q & u & v \end{pmatrix} \equiv 0$ bei beliebigen u_i und v_i die gesuchte Bedingung.

N.B. Zur Ableitung der Bedingung für einen elliptischen Cylinder hat man eine willkürliche Ebene $q_x = 0$, für welche $F(q,q) \gtrless 0$ ist, mit $f(x,x) = 0$ zum Schnitt gebracht. Dieser Schnitt ist jedenfalls endlich und im Falle eines reellen resp. imaginären elliptischen Cylinders eine reelle resp. imaginäre Ellipse.

Zweiter Theil.

Hauptaxenproblem für die Flächen II. Ordnung.

§ 1.

Definition der hierbei auftretenden Invarianten, Zwischenformen, Covarianten und Contravarianten.

Es sei in Uebereinstimmung mit dem Früheren $f(x,x) = \sum_1^4 i \sum_1^4 k\, a_{ik}x_i x_k = 0$ $(a_{ik} = a_{ki})$ die Gleichung einer Fläche II. Ordnung, $A = \Sigma \pm (a_{11}a_{22}a_{33}a_{44})$ die

Anmerkungen zu den voranstehenden Kriterien der Flächen und ihrer ebenen Schnitte.

[1]) In den Kriterien der Flächen II. Ordnung sind y und z irgend zwei verschiedene, willkürlich fixirte Punkte auf der unendlich fernen Ebene, und $q_x = 0$ eine willkürliche Ebene, die durch y geht, für welche jedoch $F(q, q)$ nicht verschwindet.

[2]) Das Gleichheitszeichen ist in jedem Falle ausgeschlossen.

[2a]) Die Kriterien für das imaginäre Ellipsoid können ersetzt werden durch $\Delta_1 \Delta_3 > 0$, $\Delta_2 > 0$, worin $\Delta_1 = a_{\alpha\alpha}$, $\Delta_2 = \Sigma\pm(a_{\alpha\alpha}a_{\beta\beta})$, $\Delta_3 = \Sigma\pm(a_{\alpha\alpha}a_{\beta\beta}a_{\gamma\gamma})$, wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ irgend eine bestimmte Permutation von 1, 2, 3, 4 ist. Sind diese Bedingungen für eine bestimmte Permutation erfüllt, so sind sie für jede erfüllt.

[3]) Man könnte auch sagen: $f(y, y)f(z, z) - f^2(y, z) > 0$, wobei das Gleichheitszeichen ausgeschlossen ist.

[4]) Man könnte auch sagen: $f(y, y)f(z, z) - f^2(y, z) \leqq 0$.

[5]) Man könnte auch sagen: $f(y, y)f(z, z) - f^2(y, z) \equiv 0$.

[6]) $A = 0$ und sämmtliche $A_{ii} = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ ist gleichbedeutend mit: Sämmtliche $A_{ik} = 0$ $(i, k = 1, 2, 3, 4)$.

[7]) Wenn auch nur eine einzige Hauptunterdeterminante II. Grades $a_{\gamma\gamma}a_{\delta\delta} - a_{\gamma\delta}^2$ verschwindet, so tritt der zweite Fall („reell“) ein.

[8]) Diese sechs Bedingungen sagen aus, dass alle Punkte $\varkappa y + \lambda z + \mu t$ auf $p_x = 0$ der Fläche angehören.

[9]) In dieser Zusammenstellung ist $r_x = 0$ eine beliebige Ebene $q(v, v) \geqq 0$ und y ein beliebig fixirter Punkt auf der Geraden $(p_x = 0, v_x = 0)$.

Um die Kriterien für die Flächen II. Ordnung zu erhalten, hat man zuerst die Ellipsoide von den übrigen Flächen geschieden durch die Bedingungen, unter welchen $f(x, x) = 0$ von $p_x = 0$ in einer imaginären Ellipse geschnitten wird. Sodann wurden unter der Voraussetzung reeller Flächen die geradlinigen von den nichtgeradlinigen Flächen getrennt: man untersuchte, wann die Fläche von einer Tangentenebene in einem reellen oder imaginären Geradenpaar getroffen wird und erhielt bei $f(y, y) = 0$ und beliebigen u_i die Bedingungen*) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}f'(y_i) & u_i \\ \frac{1}{2}f'(y_i) & u_i \end{pmatrix} \geqq 0$ oder $-Au_y^2 \geqq 0$.

Zum Schlusse mögen die zur Ableitung der Kriterien für die ebenen Schnitte einer Fläche II. Ordnung nöthigen Untersuchungen folgen, die mit Hülfe der beiden Fälle $A \geqq 0$ die Entscheidung über die Gattung einer Fläche II. Ordnung resp. Klasse gegeben haben.

I. Wann wird eine Fläche $f(x, x) = 0$ von einer Ebene $q_x = 0$ in einer imaginären Ellipse geschnitten?

Man fixire auf der Geraden $(p_x = 0, q_x = 0)$ beliebig zwei Punkte y und z, dann muss in diesem Falle $f(y, y) + 2\lambda f(y, z) + \lambda^2 f(z, z) = 0$ zwei

*) vgl. *Schlömilch*, Z. XVIII S. 543—552.

imaginäre Wurzeln besitzen, d. h. $f(y,y)f(z,z)-f^2(y,z)>0$ und auch $f(y,y)$ sowohl wie $f(z,z)$ von Null verschieden sein. Ferner muss $\begin{pmatrix} q & \frac{1}{2}f'(y_i) \\ q & \frac{1}{2}f'(y_i)\end{pmatrix} > 0$ d. i. $-f(y,y)\begin{pmatrix} q \\ q\end{pmatrix} > 0$, weil $\Sigma f'(y_i)x_i = 0$ eine Diametralebene ist.

Dieser Beweis gilt übrigens auch dann, wenn $q_x = 0$ mit $p_x = 0$ zusammenfällt, nur sind dann y und z *irgend* zwei Punkte auf $p_x = 0$.

II. Wann wird eine Fläche II. Ordnung $f(x,x) = 0$ von einer Ebene $q_x = 0$ in einem Geradenpaar getroffen?

Seien z_i die Coordinaten der Spitze, x_i die Coordinaten irgend eines Punktes auf dem ebenen Schnitte, so müsste $f(z,z)+2\lambda f(z,x)+\lambda^2 f(x,x) = 0$ für alle Werthe von λ befriedigt werden, d. h. $f(z,x) = 0$ müsste mit $q_x = 0$ identisch sein, somit $f'(z_i) = \varrho q_i$; da überdies $q_z = 0$ ist, so wird $F(q,q) = 0$ die gesuchte Bedingung sein.

III. Wann werden diese beiden Geraden zusammenfallen?

Dazu ist nöthig, dass *irgend eine Ebene* $u_x = 0$ mit $(f(x,x) = 0, q_x = 0)$ zwei zusammenfallende Schnittpunkte hat, also $\begin{pmatrix} q & u \\ q & u\end{pmatrix} \equiv 0$ für alle u_i oder $f(y,y)f(z,z)-f^2(y,z) \equiv 0$.

IV. Soll endlich $f(x,x) = q_x . r_x$ sein, so wird jeder Punkt y auf $q_x = 0$ auch auf $f(y,y) = 0$ liegen; mithin ist $\begin{pmatrix} q & u & v \\ q & u & v\end{pmatrix} \equiv 0$ bei beliebigen u_i und v_i die gesuchte Bedingung.

N.B. Zur Ableitung der Bedingung für einen elliptischen Cylinder hat man eine willkürliche Ebene $q_x = 0$, für welche $F(q,q) \gtrless 0$ ist, mit $f(x,x) = 0$ zum Schnitt gebracht. Dieser Schnitt ist jedenfalls endlich und im Falle eines reellen resp. imaginären elliptischen Cylinders eine reelle resp. imaginäre Ellipse.

Zweiter Theil.

Hauptaxenproblem für die Flächen II. Ordnung.

§ 1.

Definition der hierbei auftretenden Invarianten, Zwischenformen, Covarianten und Contravarianten.

Es sei in Uebereinstimmung mit dem Früheren $f(x,x) = \sum_1^4 i \sum_1^4 k\, a_{ik}x_i x_k = 0$ $(a_{ik} = a_{ki})$ die Gleichung einer Fläche II. Ordnung, $A = \Sigma \pm (a_{11}a_{22}a_{33}a_{44})$ die

Determinante der Form $f(x, x)$ und $F(u, u) = -\binom{u}{u} = \sum_1^4{}_i \sum_1^4{}_k A_{ik} u_i u_k$, worin $A_{ik} = \frac{\partial A}{\partial a_{ik}}$, die adjungirte Form von $f(x, x)$. Wir setzen ferner

$$f_i = \tfrac{1}{2} f'(x_i) = \tfrac{1}{2} \frac{\partial f(x,\ x)}{\partial x_i}, \quad F_i = \tfrac{1}{2} F'(u_i) = \tfrac{1}{2} \frac{\partial F(u,\ u)}{\partial u_i}$$

und führen ausserdem die, analog § 2 „Kegelsch." gebildete, definite Form

(1.) $$\omega(u,\ u) \equiv \frac{u_1^2}{e_1^2} + \cdots + \frac{u_4^2}{e_4^2} + 2\frac{u_1 u_2}{e_1 e_2}\cos(a_1,\ a_2) + \cdots + 2\frac{u_4 u_1}{e_4 e_1}\cos(a_4,\ a_1)^*)$$

ein, die gleich Null gesetzt den imaginären Kugelkreis darstellt. Ihre adjungirte Form hat den Werth

(2.) $$\Omega(x,\ x) = \tau p_x^2.$$

Durch Specialisirung der x_i erhält man für τ die Werthe

$$\tau p_i p_k = \Omega_{ik}, \quad \tau = \Sigma_i \Sigma_k \Omega_{ik}; \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

in Bezug auf den letzten Werth sei für den Beweis bemerkt, dass

$$(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)^2 = 1.$$

Andere Werthe für τ kann man aus den in „Kegelsch." S. 61 angegebenen nach Analogie ableiten.

Es mögen hier noch einige Bezeichnungen erläutert werden, die später Anwendung finden. Man setze

$$\omega(u,\ u) = \sum_1^4{}_i \sum_1^4{}_k \omega_{ik} u_i u_k, \quad \omega_i = \tfrac{1}{2} \frac{\partial \omega(u,\ u)}{\partial u_i},$$

(3.) $$\omega(f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4) = \sum_1^4{}_i \sum_1^4{}_k b_{ik} x_i x_k;$$

ferner sei

(4.) $$[a,\ \omega] \equiv a_{11}\omega_{11} + 2a_{12}\omega_{12} + \cdots = \Sigma a_{ik}\omega_{ik}, \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

(5.) $$[b,\ \omega] \equiv b_{11}\omega_{11} + 2b_{12}\omega_{12} + \cdots = \Sigma b_{ik}\omega_{ik}. \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

Wird als ***Hauptebene*** einer Fläche II. Ordnung eine im Endlichen gelegene Ebene $u_x = 0$ bezeichnet, die mit der Polare ihres Normalencentrums zusammenfällt, so stellt

(6.) $$\Psi \equiv \tfrac{1}{2} \sum_1^4{}_i \omega'(u_i) f'(x_i) = 0$$

---

*) Dabei ist zu beachten, dass $(a_i,\ a_k)$ das ***Supplement*** desjenigen Winkels der Ebenen $x_i = 0$, $x_k = 0$ bedeutet, in welchem der Einheitspunkt liegt.

die Polare des Normalencentrums von $u_x = 0$ dar, d. h. des unendlich fernen Punktes, in welchem sich alle Normalen der Ebene $u_x = 0$ schneiden. Wird für diese Form folgende Bezeichnung eingeführt:

$$(7.)\quad \begin{cases} \frac{1}{4}\sum_1^4{}_i\, \omega'(u_i) f'(x_i) \equiv (\alpha_{11}x_1+\cdots+\alpha_{14}x_4)u_1+\cdots+(\alpha_{41}x_1+\cdots+\alpha_{44}x_4)u_4 \\ \qquad\qquad = \sum_1^4{}_i \sum_1^4{}_k \alpha_{ik} u_i x_k, \end{cases}$$

so dass

$$\alpha_{ik} = \omega_{i1}a_{k1}+\omega_{i2}a_{k2}+\omega_{i3}a_{k3}+\omega_{i4}a_{k4}$$

ist, so erhält man, wenn man mit *Kronecker*

$$\delta_{ik} = 0 \text{ für } i \gtrless k \quad \text{und} \quad \delta_{ik} = 1 \text{ für } i = k$$

setzt, als biquadratische Gleichung, von der das Problem der Hauptaxen abhängt,

$$(8.)\qquad \Delta(\lambda) \equiv |\alpha_{ik}-\lambda\delta_{ik}| = \lambda(\lambda^3-\Delta_2\lambda^2+\Delta_1\lambda-\Delta_0) = 0, \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

deren Wurzeln mit

$$\lambda^{IV} = 0, \quad \lambda''', \quad \lambda'', \quad \lambda'$$

bezeichnet werden mögen.

Hierin ist

$$(9.)\quad \begin{cases} \Delta_0 = A_{11}\Omega_{11}+2A_{12}\Omega_{12}+\cdots = \tau\{A_{11}p_1^2+2A_{12}p_1p_2+\cdots\} = \tau F(p,\ p), \\ 2\Delta_1 = [a,\ \omega][a,\ \omega]-[b,\ \omega], \\ \Delta_2 = [a,\ \omega]. \end{cases}$$

Ferner treten, wenn man $\alpha_{ik}-\delta_{ik}\lambda$ mit β_{ik} bezeichnet, noch folgende Formen auf:

1) die Zwischenform

$$(10.)\qquad Z(\lambda) \equiv \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}_{\beta_{ik}} = \lambda^3 Z_3-\lambda^2 Z_2+\lambda Z_1-Z_0,$$

deren Coefficienten in folgende Gestalt gebracht werden können:

$$Z_3 = u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4,$$

$$Z_2 = [a,\ \omega]u_x-\tfrac{1}{4}\sum_1^4{}_i\, \omega'(u_i)f'(x_i),$$

$$Z_1 = \Delta_1 u_x-\Delta_2\tfrac{1}{4}\sum_1^4{}_i\, \omega'(u_i)f'(x_i)+\tfrac{1}{4}\sum_1^4{}_i\, \omega'(f_i)f'(\omega_i),$$

$$\text{worin auch}\quad \tfrac{1}{4}\sum_1^4{}_i\, \omega'(f_i)f'(\omega_i) = \sum_1^4{}_i \frac{\partial\Psi}{\partial u_i}\frac{\partial\Psi}{\partial x_i},$$

$$Z_0 = \tau p_x F(u,\ p).$$

2) die Covariante

$$(11.) \qquad C(\lambda) \equiv \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}f'(x) \end{pmatrix}_{\beta_{ik}} = \lambda^3 C_3 - \lambda^2 C_2 + \lambda C_1 - C_0,$$

$C_3 = f(x, x)$,

$C_2 = [a, \omega]f(x, x) - \omega(f_1, f_2, f_3, f_4)$,

$C_1 = \Delta_1 f(x, x) - \Delta_2 \omega(f_1, f_2, f_3, f_4) + f(\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4)$, worin $\chi_i = \frac{1}{2}\omega'(f_i)$,

$C_0 = \tau A p_x^2$.

3) die Contravariante

$$(12.) \qquad \Gamma(\lambda) \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\omega'(u) \\ u \end{pmatrix}_{\beta_{ik}} = \lambda^3 \Gamma_3 - \lambda^2 \Gamma_2 + \lambda \Gamma_1 - \Gamma_0,$$

$\Gamma_3 = \omega(u, u)$,

$\Gamma_2 = [a, \omega]\omega(u, u) - f(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$,

$\Gamma_1 = \Delta_1 \omega(u, u) - \Delta_2 f(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) + \omega(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$, worin $\psi_i = \frac{1}{2}f'(\omega_i)$,

$\Gamma_0 = 0$.

Die vier Grössen $\Delta(\lambda)$, $Z(\lambda)$, $C(\lambda)$, $\Gamma(\lambda)$ sind absolute Invarianten, wenn $f(x, x)$ und $\omega(u, u)$ durch lineare, resp. zugehörige contragrediente Substitutionen transformirt werden.

Dieselben Ausdrücke treten auch bei der Entwickelung der folgenden Determinanten auf, wenn darin

$$\gamma_{ik} = \mu A_{ik} - \omega_{ik}.$$

bedeutet:

$$(13.) \qquad \Sigma \pm (\gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33}\gamma_{44}) = \mu^4 A^3 - \mu^3 A^2 \Delta_2 + \mu^2 A \Delta_1 - \mu\tau F(p, p),$$

$$(14.) \qquad -\begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}F'(u) \end{pmatrix}_{\gamma_{ik}} = \mu^3 A^3 Z_3 - \mu^2 A^2 Z_2 + \mu A Z_1 - Z_0,$$

$$(15.) \qquad -\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}_{\gamma_{ik}} = \mu^3 A^2 C_3 - \mu^2 A C_2 + \mu C_1 - \tau p_x^2,$$

$$(16.) \qquad -\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\omega'(u) \\ \frac{1}{2}F'(u) \end{pmatrix}_{\gamma_{ik}} = \mu^3 A^3 \Gamma_3 - \mu^2 A^2 \Gamma_2 + \mu A \Gamma_1 - \Gamma_0.$$

Die Gleichungen (13.) bis (16.) werden mit den Def. (8.) bis (12.) identisch, wenn man sie mit A multiplicirt.

§ 2.

Dimensionen der Flächen II. Ordnung.

In diesem Paragraphen sind die Formeln, die sich auf die Dimensionen der Flächen beziehen, zusammengestellt. Die Beweise ergeben sich im Zu-

sammenhang mit den Entwickelungen des § 3, die sich auf die Bestimmung der Lage der Flächen beziehen.

Das Hauptaxenproblem kommt darauf zurück, lineare Substitutionen

$$(17.)\quad \begin{cases} X_1 \equiv u_1' x_1 + u_2' x_2 + u_3' x_3 + u_4' x_4, \\ X_2 \equiv u_1'' x_1 + u_2'' x_2 + u_3'' x_3 + u_4'' x_4, \\ X_3 \equiv u_1''' x_1 + u_2''' x_2 + u_3''' x_3 + u_4''' x_4, \\ X_4 \equiv p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + p_4 x_4, \end{cases}$$

deren Substitutionsdeterminante $\Sigma \pm (u_1' u_2'' u_3''' p_4) = r = \frac{1}{\sqrt{\tau}}$ ist*),

resp. die contragredienten Substitutionen

$$(18.)\qquad u_i = u_i' U_1 + u_i'' U_2 + u_i''' U_3 + p_i U_4 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

so zu bestimmen, dass folgende Transformationen gleichzeitig eintreten

$$(19.)\quad u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 + U_4 X_4,$$

$$(20.)\qquad \omega(u, u) = U_1^2 + U_2^2 + U_3^2,$$

und für Mittelpunktsflächen

$$(21.)\qquad f(x, x) = \lambda' X_1^2 + \lambda'' X_2^2 + \lambda''' X_3^2 + \varkappa X_4^2,$$

oder für Flächen ohne Mittelpunkt im Endlichen

$$(22.)\qquad f(x, x) = \lambda' X_1^2 + \lambda'' X_2^2 - 2\varrho X_3 X_4,$$

in welchen beiden Grundformen einzelne oder sämmtliche $\lambda^{(i)}$ auch verschwinden können.

Der innere Grund dafür, dass für $f(x, x)$ ausser diesen beiden letzteren Formen keine anderen möglich sind, liegt in dem *Fundamentaltheorem*, das Herr *Gundelfinger* in den „Kegelsch." § 8 Satz (19) und in *Hesse*, Geometrie des Raumes (Suppl. IV S. 511 u. ff.) gegeben hat.

A. Mittelpunktsflächen.

Die Coordinaten des Mittelpunktes sind zu berechnen aus

$$(23.)\qquad \frac{\frac{1}{2}f'(z_1)}{p_1} = \frac{\frac{1}{2}f'(z_2)}{p_2} = \frac{\frac{1}{2}f'(z_3)}{p_3} = \frac{\frac{1}{2}f'(z_4)}{p_4} = \mu,$$

worin μ einen Proportionalitätsfactor bedeutet. Es lässt sich analog „Kegelsch." S. 25 nachweisen, dass

$$(24.)\qquad \frac{\mu}{p_z} = \varkappa$$

immer einen ganz bestimmten Werth besitzt, einerlei ob nur ein einziger

*) vgl. „Kegelsch." § 10 S. 92.

Mittelpunkt, eine Mittelpunktsgerade oder eine Mittelpunktsebene vorhanden ist, oder ob schliesslich jeder Punkt des Raumes als ein uneigentlicher Mittelpunkt zu betrachten ist.

Man hat vier Fälle zu unterscheiden:

1) Wenn ausser $\lambda^{IV} = 0$ keine andere Wurzel der Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ verschwindet, so hat die Fläche einen einzigen Mittelpunkt. Die transformirte Gleichung der Fläche lautet

$$(25.) \qquad f(x, x) \equiv \lambda' X_1^2 + \lambda'' X_2^2 + \lambda''' X_3^2 + \varkappa X_4^2 = 0,$$

wobei

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0$$

die Gleichungen der Hauptebenen in der Normalform (vgl. „Kegelsch." S. 9—10) sind, sodass die Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten von der Form ist

$$(25^a.) \qquad \frac{X^2}{-\varkappa:\lambda'} + \frac{Y^2}{-\varkappa:\lambda''} + \frac{Z^2}{-\varkappa:\lambda'''} - 1 = 0.$$

Hierbei hat die Mittelpunktsconstante den Werth

$$(26.) \qquad \varkappa = \frac{A}{F(p, p)} = \frac{C_0}{\Delta_0 X_4^2} \quad \text{(für beliebige } x_i\text{)}.$$

2) Wenn ausser $\lambda''' = \lambda^{IV} = 0$ keine andere Wurzel der Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ verschwindet, und wenn in der Determinante $\Sigma \pm (\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}\alpha_{44})$ sämmtliche Subdeterminanten III. Grades $\Sigma \pm (\alpha_{im}\alpha_{kn}\alpha_{lp})$ verschwinden ($Z_0 \equiv 0$), so hat die Fläche eine Mittelpunktsgerade.

Die transformirte Gleichung wird

$$(27.) \qquad f(x, x) \equiv \lambda' X_1^2 + \lambda'' X_2^2 + \varkappa X_4^2 = 0,$$

wobei

$$(28.) \qquad \varkappa = \frac{\partial A}{\partial a_{lm}} : \frac{\partial F(p, p)}{\partial a_{lm}} = -\begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} p & u \\ p & u \end{pmatrix} = C_1 : \Delta_1 X_4^2.$$

$(l, m = 1, 2, 3, 4)$ (für beliebige u_i) (für beliebige x_i)

3) Ist $\lambda'' = \lambda''' = \lambda^{IV} = 0$, $\lambda' \gtrless 0$ und verschwinden in $\Sigma \pm (\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}\alpha_{44})$ sämmtliche Subdeterminanten II. Grades $\alpha_{il}\alpha_{km} - \alpha_{im}\alpha_{kl}$ ($Z_1 \equiv 0$, $Z_0 \equiv 0$), so besitzt die Fläche eine Mittelpunktsebene.

In diesem Falle ist

$$(29.) \qquad f(x, x) \equiv \lambda' X_1^2 + \varkappa X_4^2,$$

$$(30.) \qquad \varkappa = \frac{\partial^2 A}{\partial a_{kl}\partial a_{mn}} : \frac{\partial^2 F(p, p)}{\partial a_{kl}\partial a_{mn}} = -\begin{pmatrix} u & v \\ u & v \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} p & u & v \\ p & u & v \end{pmatrix} = C_2 : \Delta_2 X_4^2.$$

$(k, l, m, n = 1, 2, 3, 4)$ (für beliebige u_i, v_i) (für beliebige x_i)

Anmerkung: Die Bestimmung von $\varkappa$ in den Fällen 1), 2), 3) wird gewonnen durch die Bemerkung, dass $f(x, x)-\varkappa X_4^2=0$ einen Kegel, resp. ein Ebenenpaar oder eine Doppelebene repräsentirt.

4) Ist $\lambda'=\lambda''=\lambda'''=\lambda^{IV}=0$ und verschwinden sämmtliche α_{ik} ($Z_2\equiv 0$), so kann jeder Punkt im Raume*) als ein uneigentlicher Mittelpunkt der Fläche aufgefasst werden: $f(x, x)=0$ stellt eine Doppelebene dar, die mit der unendlich fernen Ebene zusammenfällt:

$$f(x, x)\equiv \varkappa X_4^2, \tag{31.}$$

$$\varkappa=\frac{a_{lm}}{p_l p_m}=\frac{f(x, x)}{p_x^2}=\frac{C_3}{X_4^2}. \tag{32.}$$

($l, m=1, 2, 3, 4$) (für beliebige x_i)

B. Flächen ohne Mittelpunkt im Endlichen.

1) Wenn ausser $\lambda'''=\lambda^{IV}=0$ keine andere Wurzel der Gleichung $\Delta(\lambda)=0$ verschwindet, und wenn in der Determinante $\Sigma\pm(\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}\alpha_{44})$ mindestens eine der Subdeterminanten III. Grades $\Sigma\pm(\alpha_{im}\alpha_{kn}\alpha_{lp})$ nicht verschwindet, so hat man den Fall der Paraboloide.

Die Transformation ergiebt

$$f(x, x)\equiv \lambda' X_1^2+\lambda'' X_2^2-2\varrho X_3 X_4, \tag{33.}$$

worin

$$\varrho^2=-\tau\frac{A}{\Delta_1}=-\frac{\tau}{\Delta_1}\cdot\frac{F^2(p, u)}{\begin{pmatrix} p & u\\ p & u\end{pmatrix}}=-\frac{\tau}{\Delta_1}\cdot\frac{F^2(p, u)}{\sum_1^4{}_i\sum_1^4{}_k\frac{\partial F}{\partial a_{lm}}p_l p_m}=-\frac{C_0}{\Delta_1 X_4^2}. \tag{34.}$$

(für beliebige u_i) (für beliebige u_i) (für beliebige x_i)

Anmerkung. Wegen der Bezeichnungen hier und im Folgenden vgl. § 1.

2) Wenn $\lambda''=\lambda'''=\lambda^{IV}=0$, $\lambda'\gtrless 0$ und wenn mindestens eine Subdeterminante II. Grades $\alpha_{il}\alpha_{km}-\alpha_{im}\alpha_{kl}$ nicht verschwindet, so stellt $f(x, x)=0$ einen parabolischen Cylinder dar:

$$f(x, x)\equiv \lambda' X_1^2-2\varrho X_3 X_4, \tag{35.}$$

$$\left\{\begin{aligned}\varrho^2&=\frac{b_{\alpha\alpha}b_{\beta\beta}-b_{\alpha\beta}^2}{b_{\alpha\alpha}p_\beta^2-2b_{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta+b_{\beta\beta}p_\alpha^2}=-\begin{pmatrix} u & v\\ u & v\end{pmatrix}_{b_{ik}}:\lambda'\begin{pmatrix} p & u & v\\ p & u & v\end{pmatrix}_{a_{ik}}\\ &\qquad\qquad\text{(für beliebige } u_i, v_i)\\ &=\frac{b_{\alpha\alpha}b_{\beta\beta}-b_{\alpha\beta}^2}{\lambda'(a_{\alpha\alpha}p_\beta^2-2a_{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta+a_{\beta\beta}p_\alpha^2)}=-\frac{C_1}{\Delta_2 X_4^2}.\\ &\qquad\qquad\text{(für beliebige } x_i)\end{aligned}\right. \tag{36.}$$

*) Jeder Punkt im Endlichen kann als Mittelpunkt der Fläche $X_4^2=0$ aufgefasst werden, d. h. als ein Punkt, der mit jedem Punkte im Unendlichen ein Punktepaar bildet, das harmonisch liegt zu diesem letzteren, als Doppelpunkt aufzufassenden Punkte.

3) Ist $\lambda' = \lambda'' = \lambda''' = \lambda^{IV} = 0$, aber mindestens ein α_{ik} von Null verschieden, so bildet die unendlich ferne Ebene einen Theil der Fläche:

$$(37.) \qquad f(x, x) \equiv -2\varrho X_3 X_4 = 0,$$

$$(38.) \qquad \varrho^2 = -\frac{\omega(f_1, f_2, f_3, f_4)}{X_4^2} = -\frac{b_{ik}}{p_i p_k} = -\frac{C_2}{X_4^2}.$$

(für beliebige x_i) (für beliebige x_i)

Anmerkung. Die Werthe für ϱ^2 ergeben sich analog den Werthen für $\varkappa$ durch die Bemerkung, dass $\omega(f_1, f_2, f_3, f_4) - \varrho^2 X_4^2 = 0$ in den Fällen (33.) und (35.) ein Ebenenpaar resp. eine Doppelebene repräsentirt.

§ 3.

Bestimmung der Lage der Hauptebenen und der Richtung der Hauptaxen der Flächen II. Ordnung.

Zunächst schliessen wir den Fall aus, dass eine nicht verschwindende Wurzel der Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ eine Doppelwurzel sei. Im übrigen werden die einzelnen Fälle nach der in § 2 gegebenen Eintheilung behandelt.

A. Mittelpunktsflächen.

1. Flächen II. Ordnung mit einem einzigen Mittelpunkt (cfr. § 2 A 1)): sämmtliche $\lambda^{(i)} \gtrless 0$ $(i = 1, 2, 3)$.

Durch Partialbruchzerlegung erhält man

$$(39.) \qquad \frac{Z(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{Z(\lambda')}{\Delta'(\lambda')} \cdot \frac{1}{\lambda - \lambda'} + \frac{Z(\lambda'')}{\Delta'(\lambda'')} \cdot \frac{1}{\lambda - \lambda''} + \frac{Z(\lambda''')}{\Delta'(\lambda''')} \cdot \frac{1}{\lambda - \lambda'''} + p_x \frac{F(p, u)}{F(p, p)} \cdot \frac{1}{\lambda},$$

wobei

$$\Delta'(\lambda') = \lambda'(\lambda' - \lambda'')(\lambda' - \lambda'''), \quad \Delta'(\lambda'') = \lambda''(\lambda'' - \lambda''')(\lambda'' - \lambda'),$$
$$\Delta'(\lambda''') = \lambda'''(\lambda''' - \lambda')(\lambda''' - \lambda'').$$

Nach einem bekannten Theoreme (vgl. z. B. *Hesse*, dieses Journal Bd. 69 S. 319) zerfällt $Z(\lambda^{(i)})$ in das Product zweier linearer Ausdrücke U_i und X_i, von denen der eine in den u_i, der andere in den x_i linear ist. Ausserdem sind die X_1, X_2, X_3, X_4 den Wurzeln λ', λ'', λ''' und λ^{IV} entsprechende Ausdrücke, die die Gleichungen (cfr. (6.) bis (8.)):

$$(39^a.) \qquad \Sigma \omega'(u_i^{(k)}) f'(x_i) = \lambda^{(k)} u_x^{(k)} \qquad (k = 1, 2, 3)$$

befriedigen. Hiernach ist

$$(40.) \qquad \frac{Z(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{U_1 X_1}{\lambda - \lambda'} + \frac{U_2 X_2}{\lambda - \lambda''} + \frac{U_3 X_3}{\lambda - \lambda'''} + \frac{U_4 X_4}{\lambda},$$

wobei

$$(40^a.)\quad \begin{cases} U_1X_1 = \dfrac{Z(\lambda')}{\Delta'(\lambda')}, \quad U_2X_2 = \dfrac{Z(\lambda'')}{\Delta'(\lambda'')}, \quad U_3X_3 = \dfrac{Z(\lambda''')}{\Delta'(\lambda''')}, \\ U_4 = \dfrac{F(p,\ u)}{F(p,\ p)}, \quad X_4 = p_x. \end{cases}$$

Sind nun in den linearen Ausdrücken

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv u_1'x_1 + u_2'x_2 + u_3'x_3 + u_4'x_4, \\ X_2 &\equiv u_1''x_1 + u_2''x_2 + u_3''x_3 + u_4''x_4, \\ X_3 &\equiv u_1'''x_1 + u_2'''x_2 + u_3'''x_3 + u_4'''x_4, \\ X_4 &\equiv p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_4 + p_4x_4, \end{aligned}$$

wie überhaupt im Folgenden, die Coefficienten der x_i in ihren Verhältnissen derart bestimmt, dass sie den Bedingungen genügen

$$(41.)\quad \omega(u_1', u_2', u_3', u_4') = 1, \quad \omega(u_1'', u_2'', u_3'', u_4'') = 1, \quad \omega(u_1''', u_2''', u_3''', u_4''') = 1,$$

und führt man gleichzeitig die Substitutionen ein

$$u_i = u_i'U_1 + u_i''U_2 + u_i'''U_3 + p_iU_4, \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

so ergiebt sich aus (40.), wenn man beiderseits mit λ multiplicirt und hierauf $\lambda = \infty$ setzt:

$$(42.)\quad u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = U_1X_1 + U_2X_2 + U_3X_3 + U_4X_4;$$

ferner erhält man

$$(43.)\quad \omega(u,\ u) = U_1^2 + U_2^2 + U_3^2;$$

denn da die X_i $(i = 1, 2, 3)$ in der Normalform angenommen sind (cfr. (41.)), so werden durch die Substitutionen

$$x_i = \tfrac{1}{2}\omega'(u_i), \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

auf Grund analoger Entwickelungen wie in den „Kegelsch." p. 88 u. 89,

$$X_i \text{ in } U_i \quad (i = 1, 2, 3), \qquad X_4 \text{ in } 0$$

übergehen. Infolge dessen erhält man aus (40.) die Zerlegung

$$(44.)\quad \frac{\Gamma(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{U_1^2}{\lambda - \lambda'} + \frac{U_2^2}{\lambda - \lambda''} + \frac{U_3^2}{\lambda - \lambda'''},$$

worin

$$(44^a.)\quad U_1^2 = \frac{\Gamma(\lambda')}{\Delta'(\lambda')}, \quad U_2^2 = \frac{\Gamma(\lambda'')}{\Delta'(\lambda'')}, \quad U_3^2 = \frac{\Gamma(\lambda''')}{\Delta'(\lambda''')}.$$

Aus (44.) folgt wie oben für $\lambda = \infty$ thatsächlich die Relation (43.).

Durch die Substitution

$$u_i = \tfrac{1}{2}f'(x_i) \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

gehen

$$U_1 \text{ in } \lambda' X_1, \quad U_2 \text{ in } \lambda'' X_2, \quad U_3 \text{ in } \lambda''' X_3, \quad U_4 \text{ in } \frac{A}{F(p,\ p)} X_4$$

über (cfr. Anm. 1, p. 86 der „Kegelsch."). Man erhält hiernach aus (40.)

$$(45.) \qquad \frac{C(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{\lambda' X_1^2}{\lambda-\lambda'} + \frac{\lambda'' X_2^2}{\lambda-\lambda''} + \frac{\lambda''' X_3^2}{\lambda-\lambda'''} + \frac{\varkappa X_4^2}{\lambda},$$

worin

$$(46.) \quad \lambda' X_1^2 = \frac{C(\lambda')}{\Delta'(\lambda')}, \quad \lambda'' X_2^2 = \frac{C(\lambda'')}{\Delta'(\lambda'')}, \quad \lambda''' X_3^2 = \frac{C(\lambda''')}{\Delta'(\lambda''')}, \quad \varkappa = \frac{A}{F(p,\ p)}.$$

Daraus folgt wie oben für $\lambda = \infty$:

$$f(x,\ x) = \lambda' X_1^2 + \lambda'' X_2^2 + \lambda''' X_3^2 + \varkappa X_4^2.$$

Durch die hier gegebenen Formeln sind die Werthe der X_i^2 (und nebenbei der U_i^2) genau bestimmt, wie es die Transformation von $f(x,\ x)$ in die Normalform verlangt. Handelt es sich jedoch darum, das Transformationsproblem nicht vollständig zu lösen, sondern nur die Gleichungen der Hauptebenen resp. ihrer Normalencentra zu bestimmen, so sind die Gleichungen

$$Z(\lambda') = 0, \quad Z(\lambda'') = 0, \quad Z(\lambda''') = 0$$

vorzuziehen. Diese repräsentiren bei willkürlich fixirten x_i und variablen u_i die Gleichungen der Hauptaxenrichtungen, dagegen bei beliebig fixirten u_i und variablen x_i die Gleichungen der zugehörigen Hauptebenen. Gleichzeitig ist durch das Zerfallen von $Z(\lambda^{(6)})$ in ein Product eine vortreffliche Controlle der Rechnung gegeben.

2) Flächen II. Ordnung mit einer Mittelpunktsgeraden (cfr. § 2 A 2)) $\lambda''' = \lambda^{IV} = 0$.

Da nunmehr

$$Z_0 \equiv 0,$$

so liefert die Partialbruchzerlegung

$$(47.) \qquad \frac{Z(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{Z(\lambda')}{\Delta'(\lambda')} \cdot \frac{1}{\lambda-\lambda'} + \frac{Z(\lambda'')}{\Delta'(\lambda'')} \cdot \frac{1}{\lambda-\lambda''} + \frac{Z_1}{\Delta_1} \cdot \frac{1}{\lambda},$$

worin $\frac{Z_1}{\Delta_1}$ auf unendlich viele Arten in die Form $U_3 X_3 + U_4 X_4$ gebracht werden kann (vgl. über den Grund die analogen Entwickelungen beim Paraboloid in B. dieses Paragraphen); man hat demnach

$$(48.) \qquad \frac{Z(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{U_1 X_1}{\lambda-\lambda'} + \frac{U_2 X_2}{\lambda-\lambda''} + \frac{U_3 X_3 + U_4 X_4}{\lambda},$$

wobei

$$(49.)\quad U_1X_1=\frac{Z(\lambda')}{\Delta'(\lambda')},\quad U_2X_2=\frac{Z(\lambda'')}{\Delta'(\lambda'')},\quad U_3X_3+U_4X_4=\frac{Z_1}{\Delta_1}.$$

Für $\lambda=\infty$ erhält man wie bei (42.) die Relation

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4 = U_1X_1+U_2X_2+U_3X_3+U_4X_4.$$

Setzt man $x_i=\frac{1}{2}\omega'(u_i)$, so ergiebt sich aus (47.):

$$(50.)\qquad \frac{\Gamma(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{U_1^2}{\lambda-\lambda'}+\frac{U_2^2}{\lambda-\lambda''}+\frac{U_3^2}{\lambda},$$

worin

$$(51.)\qquad U_1^2=\frac{\Gamma(\lambda')}{\Delta'(\lambda')},\quad U_2^2=\frac{\Gamma(\lambda'')}{\Delta'(\lambda'')},\quad U_3^2=\frac{\Gamma_1}{\Delta_1};$$

für $\lambda=\infty$ erhält man

$$\omega(u,\ u) = U_1^2+U_2^2+U_3^2.$$

Substituirt man endlich $u_i=\frac{1}{2}f'(x_i)$, so ergiebt sich

$$(52.)\qquad \frac{C(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{\lambda' X_1^2}{\lambda-\lambda'}+\frac{\lambda'' X_2^2}{\lambda-\lambda''}+\frac{\varkappa X_4^2}{\lambda},$$

$$(53.)\qquad \lambda' X_1^2=\frac{C(\lambda')}{\Delta'(\lambda')},\quad \lambda'' X_2^2=\frac{C(\lambda'')}{\Delta'(\lambda'')},\quad \varkappa X_4^2=\frac{C_1}{\Delta_1},$$

und daraus für $\lambda=\infty$

$$f(x,\ x) = \lambda' X_1^2+\lambda'' X_2^2+\varkappa X_4^2.$$

Hier liefern wiederum $Z(\lambda')=0$ und $Z(\lambda'')=0$ die Gleichungen der beiden Hauptebenen resp. Hauptaxen (cfr. 1.).

3) Fläche II. Ordnung mit einer Mittelpunktsebene (cfr. § 2 A. 3)): $\lambda''=\lambda'''=\lambda^{IV}=0$. Da nun $Z_0\equiv 0$ und $Z_1\equiv 0$, so wird

$$(54.)\qquad \frac{Z(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{Z(\lambda')}{\Delta'(\lambda')}\cdot\frac{1}{\lambda-\lambda'}+\frac{Z_2}{\Delta_2}\cdot\frac{1}{\lambda},$$

worin

$$\frac{Z_2}{\Delta_2} = U_2X_2+U_3X_3+U_4X_4$$

auf unendlich viele Arten, und

$$\frac{Z(\lambda')}{\Delta'(\lambda')} = U_1X_1;$$

demnach

$$(55.)\qquad \frac{Z(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{U_1X_1}{\lambda-\lambda'}+\frac{U_2X_2+U_3X_3+U_4X_4}{\lambda}.$$

Ferner ergiebt sich wie oben

$$(57.) \qquad \frac{\Gamma(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{U_1^2}{\lambda-\lambda'} + \frac{U_2^2+U_3^2}{\lambda},$$

$$(58.) \qquad U_1^2 = \frac{\Gamma(\lambda')}{\Delta'(\lambda')}, \quad U_2^2+U_3^2 = \frac{\Gamma_2}{\Delta_2};$$

$$(59.) \qquad \frac{C(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{\lambda' X_1^2}{\lambda-\lambda'} + \varkappa \frac{X_4^2}{\lambda},$$

$$(60.) \qquad \lambda' X_1^2 = \frac{C(\lambda')}{\Delta'(\lambda')}, \quad \varkappa X_4^2 = \frac{C_2}{\Delta_2}.$$

Speciell für $\lambda = \infty$ erhält man aus (55.), (57.) und (59.)

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4 = U_1X_1+U_2X_2+U_3X_3+U_4X_4,$$
$$\omega(u, u) = U_1^2+U_2^2+U_3^2,$$
$$f(x, x) = \lambda' X_1^2+\varkappa X_4^2.$$

$Z(\lambda') = 0$ liefert die Gleichung der Hauptebene resp. Hauptaxenrichtung (cfr. 1).

4) Ist $\lambda' = \lambda'' = \lambda''' = \lambda^{IV} = 0$ und verschwinden sämmtliche α_{ik}, so ist $Z_0 \equiv 0$, $Z_1 \equiv 0$, $Z_2 \equiv 0$: $f(x, x) = 0$ ist eine Doppelebene, die mit der unendlich fernen Ebene zusammenfällt:

$$f(x, x) = \varkappa X_4^2.$$

B. Flächen ohne Mittelpunkt im Endlichen.

1) Die Paraboloide (cfr. § 2, B. 1)).

$\lambda''' = \lambda^{IV} = 0$, aber mindestens eine Subdeterminante III. Grades von $\Sigma\pm(\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}\alpha_{44})$ von Null verschieden. Die den beiden nicht verschwindenden Wurzeln λ' und λ'' und der Wurzel $\lambda^{IV} = 0$ entsprechenden Hauptebenen resp. Hauptaxenrichtungen seien (bis auf einen constanten Factor) mit $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_4 = p_x = 0$ resp. $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ (auf $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ gelegen) bezeichnet (cfr. (39ª.)).

Aus der Partialbruchzerlegung geht hervor

$$(61.) \qquad \frac{Z(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{Z(\lambda')}{\Delta'(\lambda')}\cdot\frac{1}{\lambda-\lambda'} + \frac{Z(\lambda'')}{\Delta'(\lambda'')}\cdot\frac{1}{\lambda-\lambda''} - \frac{Z_0}{\Delta_1}\cdot\frac{1}{\lambda^2} + \frac{Z_1\Delta_1-Z_0\Delta_2}{\Delta_1^2}\cdot\frac{1}{\lambda},$$

worin

$$(62.) \qquad \frac{Z(\lambda')}{\Delta'(\lambda')} = U_1X_1, \quad \frac{Z(\lambda'')}{\Delta'(\lambda'')} = U_2X_2, \quad \frac{Z_0}{\Delta_1} = \frac{\tau F(p, u)}{\Delta_1} X_4$$

und $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ in der Normalform angenommen werden können.

Man setze nun

$$(63.) \qquad \frac{\tau F(p, u)}{\Delta_1} X_4 = \varrho U_3 X_4,$$

worin ϱ einen noch verfügbaren Factor bedeute. Nennt man $U_4 = 0$ den im ***Endlichen*** gelegenen Schnittpunkt von $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ mit der Fläche $f(x, x) = 0$ und legt man ein Coordinatensystem zu Grunde, dessen Ecken durch $U_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$, $U_4 = 0$ und dessen Gegenseiten durch $X_k = 0$ $(k = 1, 2, 3)$, $X_4 = p_x = 0$ dargestellt sind, so lässt sich durch passende Fixirung der Coefficienten in $X_3 = 0$ und $U_4 = 0$ eine Identität herstellen von der Form

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4 = U_1X_1+U_2X_2+U_3X_3+U_4X_4.$$

Durch Vergleichung der Coefficienten von $\frac{1}{\lambda}$ auf beiden Seiten der Gleichung (61.) folgt somit:

$$(63^a.) \qquad \frac{Z_1\Delta_1 - Z_0\Delta_2}{\Delta_1^2} = U_3X_3+U_4X_4\text{*)}.$$

Dadurch wird

$$(64.) \qquad \frac{Z(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{U_1X_1}{\lambda-\lambda'}+\frac{U_2X_2}{\lambda-\lambda''}-\frac{\varrho U_3X_4}{\lambda^2}\text{**)}+\frac{U_3X_3+U_4X_4}{\lambda}.$$

Ersetzt man die u_i durch $\frac{1}{2}f'(x_i)$, so gehen nach dem System $(39^a.)$

$$U_1 \text{ in } \lambda' X_1, \quad U_2 \text{ in } \lambda'' X_2, \quad U_3 \text{ in } -\varrho X_4, \quad U_4 \text{ in } -\varrho X_3$$

über und man erhält

$$(65.) \qquad \frac{C(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{\lambda' X_1^2}{\lambda-\lambda'}+\frac{\lambda'' X_2^2}{\lambda-\lambda''}+\frac{\varrho^2 X_4^2}{\lambda^2}-\frac{2\varrho X_3X_4}{\lambda}.$$

Multiplicirt man beiderseits mit λ^2 und setzt nachher $\lambda = 0$, so ergiebt sich

$$(66.) \qquad -\frac{C_0}{\Delta_1} = \varrho^2 X_4^2 = -\frac{\tau A p_x}{\Delta_1}, \quad \text{mithin} \quad \varrho^2 = -\frac{\tau A}{\Delta_1}\text{**)}.$$

Multiplicirt man dagegen mit λ und setzt danach $\lambda = \infty$, so folgt:

$$(67.) \qquad f(x, x) = \lambda' X_1^2+\lambda'' X_2^2-2\varrho X_3X_4.$$

Ersetzt man in (64.) die x_i durch $\frac{1}{2}\omega'(u_i)$, so gehen

$$X_1 \text{ in } U_1, \quad X_2 \text{ in } U_2, \quad X_3 \text{ in } U_3, \quad X_4 \text{ in } 0$$

über; man erhält somit

$$(68.) \qquad \frac{\Gamma(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{U_1^2}{\lambda-\lambda'}+\frac{U_2^2}{\lambda-\lambda''}+\frac{U_3^2}{\lambda}$$

---

*) Ohne geometrische Anschauung liesse sich diese Relation auch ableiten an der Hand der allgemeinen Theorie der Elementartheiler (*Weierstrass* 1868, Berl. Mon.-Ber.; *Gundelfinger* in *Hesses* Raumgeometrie, Suppl. IV S. 498 u. ff.). Aehnliches gilt übrigens von den analogen hier auftretenden Fällen.

**) Hierdurch ist, wenn die X_k und somit auch U_3 dem Vorzeichen nach festgelegt sind, ϱ dem Vorzeichen nach bestimmt.

und daraus für $\lambda = \infty$:

$$\omega(u, u) = U_1^2 + U_2^2 + U_3^2.$$

Ausserdem ergiebt sich aus (65.) resp. (68.):

$$(69.) \quad \lambda' X_1^2 = \frac{C(\lambda')}{\Delta'(\lambda')}, \quad \lambda'' X_2^2 = \frac{C(\lambda'')}{\Delta'(\lambda'')}, \quad -\varrho^2 X_4^2 = \frac{C_0}{\Delta_1};$$

$$(70.) \quad U_1^2 = \frac{\Gamma(\lambda')}{\Delta'(\lambda')}, \quad U_2^2 = \frac{\Gamma(\lambda'')}{\Delta'(\lambda'')}, \quad U_3^2 = \frac{\Gamma_1}{\Delta_1}.$$

Es erübrigt noch die Bestimmung von U_4 und X_3. Durch Vergleichung der Coefficienten der Contravariante

$$(71.) \quad \Gamma(\lambda) \equiv \lambda^3 \Gamma_3 - \lambda^2 \Gamma_2 + \lambda \Gamma_1 - \Gamma_0$$

findet man

$$(72.) \quad \lambda'' U_1^2 + \lambda' U_2^2 = \Gamma_2 - \frac{\lambda' + \lambda''}{\lambda' \lambda''} \Gamma_1;$$

diesen Werth benutzt man bei der Berechnung von $U_3 U_4$ resp. U_4. Zu dem Zweck geht man von der Contravariante $\binom{u}{u}_{a_{ik}}$ aus und findet

$$(73.) \quad \tau F(u, u) = -\varrho^2(\lambda' U_2^2 + \lambda'' U_1^2) + 2\varrho \lambda' \lambda'' U_3 U_4,$$

mithin unter Berücksichtigung von (72.)

$$(74.) \quad \frac{2\varrho \lambda' \lambda''}{\tau} U_3 U_4 = F(u, u) - \frac{A}{\lambda' \lambda''}\left(\Gamma_2 - \frac{\lambda' + \lambda''}{\lambda' \lambda''} \Gamma_1\right),$$

worin der Factor von U_4 bekannt ist; zur Berechung von X_3 erhält man auf analoge Art

$$(75.) \quad -2\varrho \lambda' \lambda'' X_3 X_4 = C_1 + \varrho^2(\lambda' + \lambda'') X_4^2.$$

Aus diesen beiden letzten Formeln lassen sich U_4 resp. X_3 auch ohne Division durch Einführung willkürlicher Parameter (analog „Kegelsch." § 4 p. 38) bestimmen nach der Formel

$$(76.) \quad f(x, x) q_y^2 \equiv (2f(x, y) q_y - f(y, y) q_x) q_x,$$

worin q_x der bekannte Factor von $f(x, x)$ und der Werth in der Klammer der gesuchte Factor ist bei beliebigen y_i, die so gewählt werden müssen, dass $q_y \gtrless 0$ (etwa so, dass $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, $y_4 = 1$, resp. drei von den y_i gleich Null, die vierte gleich Eins).

Eine elegantere Methode zur Berechnung von U_4 und X_3 mittelst Zwischenformen ergiebt sich auf folgende Weise. Man bildet

$$(77.) \quad \begin{cases} \varrho(U_3 X_3 + U_4 X_4) U_3 - (\varrho U_3 U_4) X_4 = \varrho U_3^2 X_3, \\ \text{resp.} \\ \varrho^2(U_3 X_3 + U_4 X_4) X_4 - \varrho U_3 (\varrho X_3 X_4) = \varrho^2 U_4 X_4^2 \end{cases}$$

und erhält schliesslich

$$(78.)\qquad \frac{2\varrho\Delta_1^3}{\tau}U_3^2X_3 = 2F(p,u)[\Delta_1Z_1-\Delta_2Z_0]-(F(u,u)\Delta_1^2-A[\Delta_1\Gamma_2-\Delta_2\Gamma_1'])X_4,$$

$$(79.)\qquad \varrho^2\Delta_1^3X_4^2U_4 = -\tau A[\Delta_1Z_1-\Delta_2Z_0]X_4+\frac{\tau}{2}F(p,u)[\Delta_1C_1-\tau A\Delta_2X_4^2],$$

oder

$$(80.)\qquad \begin{cases} 2A\Delta_1^2X_4^2U_4 = A[2\Delta_1Z_1-\Delta_2Z_0]X_4-\Delta_1C_1F(p,u) \\ \qquad\qquad = 2A\Delta_1Z_1X_4-F(p,u)(\Delta_2C_0+\Delta_1C_1). \end{cases}$$

Fixirt man in (78.) *die* u_i *willkürlich, so ergiebt* $X_3=0$ *die Gleichung der Scheiteltangentialebene,* die in dem speciellen Falle von schiefwinkeligen Coordinaten mit der von Herrn *Gundelfinger* in den Nouv. Annales 1884 p. 7—18 ohne Beweis mitgetheilten übereinstimmt. Ebenso werden (79.) und (80.) für beliebige Werthe der x_i (z. B. $x_1=x_2=x_3=x_4=1$, in welchem Falle $X_4=1$) *die Gleichung des Scheitels* liefern.

2. Der parabolische Cylinder (vgl. § 2 B 2)).

Die Partialbruchzerlegung liefert in diesem Falle ($\Delta_2=\lambda'\gtrless 0$):

$$(81.)\qquad \frac{Z(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{Z_1\lambda-Z_2\lambda^2+Z_3\lambda^3}{-\lambda^3\Delta_2+\lambda^4} = \frac{1}{\lambda^2}\,\frac{Z_1-Z_2\lambda+Z_3\lambda^2}{-\Delta_2+\lambda} = \frac{1}{\lambda^2}\,\frac{Z_1-Z_2\lambda+Z_3\lambda^2}{\lambda-\lambda'}$$

$$(82.)\qquad = \frac{1}{\lambda-\lambda'}\cdot\frac{Z(\lambda')}{\Delta'(\lambda')}+\frac{1}{\lambda^2}\,\frac{Z_1}{-\lambda'}+\frac{1}{\lambda}\,\frac{Z_1-Z_2\Delta_2}{-\Delta_2^2}.$$

Auch hier ist wieder

$$\frac{Z(\lambda')}{\Delta'(\lambda')} = U_1X_1.$$

Ausserdem setze man

$$\frac{Z_1}{\lambda'} = \varrho U_3X_4,$$

wobei ϱ einen noch zu bestimmenden Factor bedeute.

Man lege nun durch die Scheitelgerade eine Tangentenebene $X_3=0$ an den parabolischen Cylinder und senkrecht zu $X_1=0$ sowohl wie $X_3=0$ eine beliebige Ebene $X_2=0$, so ist das Coordinatentetraeder bestimmt, wenn man noch $X_4=p_x=0$ hinzunimmt. Wird nun wiederum wie in B 1) durch passende Fixirung der Coefficienten in $X_1=0$, $X_2=0$, $X_3=0$ und $U_4=0$ eine Identität von der Form

$$(82^a.)\qquad u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4 = U_1X_1+U_2X_2+U_3X_3+U_4X_4$$

hergestellt, so ergiebt sich schliesslich die Relation

$$(83.)\qquad \frac{Z_2\Delta_2-Z_1}{\Delta_2^2} = U_2X_2+U_3X_3+U_4X_4$$

und

$$(84.) \qquad \frac{Z(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{U_1 X_1}{\lambda-\lambda'} - \frac{\varrho U_3 X_4}{\lambda^2} + \frac{U_2 X_2 + U_3 X_3 + U_4 X_4}{\lambda},$$

woraus für $\lambda = \infty$ thatsächlich die Identität (82ª.) resultirt. Durch die Substitution $x_i = \frac{1}{2}\omega'(u_i)$ gehen

$$X_1 \text{ in } U_1, \quad X_2 \text{ in } U_2, \quad X_3 \text{ in } U_3, \quad X_4 \text{ in } 0$$

über und (84.) in

$$(85.) \qquad \frac{\Gamma(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{U_1^2}{\lambda-\lambda'} + \frac{U_2^2 + U_3^2}{\lambda},$$

wobei

$$(85ª.) \qquad U_1^2 = \frac{\Gamma(\lambda')}{\Delta'(\lambda')}, \quad U_2^2 + U_3^2 = \frac{\Gamma_2 \Delta_2}{\Delta_2^2} = \frac{\Gamma_2}{\Delta_2} = \frac{\Gamma_2}{\lambda'}.$$

Nun ist aber

$$\tau F(u, u) = -\varrho^2 \lambda' U_2^2,$$

mithin

$$(86.) \qquad U_2^2 = \frac{\tau F(u, u)}{-\varrho^2 \lambda'}, \quad U_3^2 = \frac{\varrho^2 \Gamma_2 + \tau F(u, u)}{\Delta_2 \varrho^2}.$$

Für $\lambda = \infty$ folgt aus (85.)

$$\omega(u, u) = U_1^2 + U_2^2 + U_3^2.$$

Durch die Substitution $u_i = \frac{1}{2} f'(x_i)$ gehen

$$U_1 \text{ in } \lambda' X_1, \quad U_2 \text{ in } 0, \quad U_3 \text{ in } -\varrho X_4, \quad U_4 \text{ in } -\varrho X_3$$

über und die Partialbruchzerlegung liefert

$$(87.) \qquad \begin{cases} \dfrac{C(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \dfrac{\lambda' X_1^2}{\lambda-\lambda'} + \dfrac{1}{\lambda^2}\varrho^2 X_4^2 + \dfrac{1}{\lambda}(-2\varrho X_3 X_4), \\ \text{speciell} \quad f(x, x) = \lambda' X_1^2 - 2\varrho X_3 X_4, \end{cases}$$

wobei

$$\lambda' X_1^2 = \frac{C(\lambda')}{\Delta'(\lambda')}, \quad -\varrho^2 X_4^2 = \frac{C_1}{\lambda'},$$

mithin

$$(88.) \qquad \varrho^2 = -\frac{C_1}{\Delta_2 X_4^2} \quad \text{(bei beliebigen } x_i\text{)}.$$

Ausserdem ist

$$(88ª.) \qquad -2\varrho X_3 X_4 = \frac{C_2 \Delta_2 - C_1}{\lambda'^2},$$

eine Relation zur Berechnung von X_3. Setzt man den Werth von ϱ^2 in (86.) ein, so ergeben sich noch folgende Formeln für U_2^2 resp. U_3^2:

$$(89.) \qquad U_2^2 = \frac{\tau X_4^2}{C_1} F(u, u), \quad U_3^2 = \frac{\Gamma_2}{\Delta_2} - \frac{\tau X_4^2}{C_1} F(u, u) = \frac{C_1 \Gamma_2 - \tau \Delta_2 X_4^2 F(u, u)}{C_1 \Delta_2},$$

oder auch

$$(90.) \qquad U_3^2 = -\frac{Z_1^2}{\lambda' C_1}, \quad U_2^2 = \frac{C_1 \Gamma_2 + Z_1^2}{\lambda' C_1}.$$

3) Die unendlich ferne Ebene bildet einen Theil der Fläche $f(x, x) = 0$ (vgl. § 2 B 3)). In diesem Falle ist $\Delta_0 = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, mithin $Z_0 \equiv Z_1 \equiv 0$. Die Partialbruchzerlegung liefert

$$(91.) \qquad \frac{Z(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{-Z_2 \lambda^2 + Z_3 \lambda^3}{\lambda^4} = \frac{-Z_2}{\lambda^2} + \frac{Z_3}{\lambda}.$$

Setzt man

$$Z_2 = \varrho U_3 X_4 \quad \text{(mit einem verfügbaren Factor } \varrho\text{)}$$

und

$$Z_3 = U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 + U_4 X_4,$$

welch letzteres auf unendlich viele Arten möglich ist, so ergiebt sich

$$(92.) \qquad \frac{Z(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{-\varrho U_3 X_4}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}(U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 + U_4 X_4)$$

und daraus für $\lambda = \infty$

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 + U_4 X_4.$$

Die Substitution $x_i = \frac{1}{2}\omega'(u_i)$ liefert

$$(93.) \qquad \frac{\Gamma(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2}{\lambda}, \quad \omega(u, u) = U_1^2 + U_2^2 + U_3^2.$$

Substituirt man $u_i = \frac{1}{2} f'(x_i)$, so erhält man

$$(94.) \qquad \frac{C(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{\varrho^2 X_4^2}{\lambda^2} - \frac{2\varrho X_3 X_4}{\lambda}, \quad \text{speciell} \quad f(x, x) = -2\varrho X_3 X_4,$$

wobei

$$\varrho^2 X_4^2 = -C_2,$$

mithin

$$(95.) \qquad \varrho^2 = \frac{-C_2}{X_4^2}$$

und

$$-2\varrho X_3 X_4 = C_3.$$

Setzt man den Werth von ϱ^2 oben ein, so ergiebt sich

$$(96.) \qquad U_3^2 = \frac{-Z_2^2}{C_2}, \quad X_3^2 = \frac{C_3^2}{-4C_2}.$$

(Fortsetzung folgt.)

Ueber ein allgemeines aus Thetafunctionen von zwei Argumenten gebildetes Orthogonalsystem und seine Verwendung in der Mechanik*).

(Von Herrn *Eugen Jahnke* in Charlottenburg.)

Herr *F. Caspary* ist durch den von ihm entdeckten Zusammenhang zwischen den Thetafunctionen und den *Elementen* eines Orthogonalsystems**) zu einer neuen Methode geführt worden, Probleme der Mechanik zu behandeln. Diese Methode, auf deren Bedeutung für die Rotationsprobleme zuerst Herr *Budde* in seiner Mechanik (II, S. 968) hingewiesen hat, besteht darin, ausgehend von algebraischen Identitäten, unter Benutzung der quadratischen Transformation, die *Elemente* eines Orthogonalsystems, d. h. nach Herrn *Caspary* die neun Coefficienten a_{mn} $(m, n = 1, 2, 3)$ einer orthogonalen Substitution mit der Determinante $+1$ und die sechs Differentialgrössen

$$(1.) \qquad \begin{cases} p_h = -(a_{1k}da_{1l}+a_{2k}da_{2l}+a_{3k}da_{3l}), \\ v_h = \quad a_{k1}da_{l1}+a_{k2}da_{l2}+a_{k3}da_{l3} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} h, k, l = 1, 2, 3 \\ 2, 3, 1 \\ 3, 1, 2 \end{pmatrix}$$

durch die Thetafunctionen auszudrücken und mittelst der Differentialgleichungen des mechanischen Problems die in diese Ausdrücke eingehenden beliebigen Functionen und die in den Thetafunctionen enthaltenen beliebigen Argumente passend zu bestimmen.

---

*) Diese Arbeit ist eine weitere Ausführung einer am 30. Juli 1896 von Herrn *Fuchs* der Akademie der Wissenschaften zu Berlin vorgelegten Notiz.

**) Sur une nouvelle méthode d'exposition de la théorie des fonctions thêta, et sur un théorème élémentaire relatif aux fonctions hyperelliptiques de première espèce. C. R. CXI, 225—227, 1890. — Sur les relations qui lient les éléments d'un système orthogonal aux fonctions thêta et sigma d'un seul argument et aux fonctions elliptiques et sur une théorie élémentaire de ces transcendantes, déduite desdites relations. Journ. de Math. (4.) VI, 367—404, 1890. — Sur une nouvelle manière d'établir les relations algébriques qui ont lieu entre les fonctions hyperelliptiques de première espèce. Ann. de l'Éc. Norm. (3) X, 253—261, 1893.

Von seiner Methode hat Herr *Caspary* zwei Anwendungen gegeben, einmal auf das Problem der Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt, wo er unmittelbar und genau diejenigen Formeln erhält, durch welche *Jacobi, Lottner, Dumas, Hermite, Halphen, Darboux* und *Hess* Specialfälle des Problems gelöst haben*); zweitens, unter Benutzung der Thetafunctionen zweier Argumente, auf den *H. Weber*schen Fall**) der Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit***).

Bei dem Versuche, den ich unternommen, in einem allgemeineren Falle dieses Problems, nämlich demjenigen, wo die von Herrn *Weber* über den Anfangszustand gemachte beschränkende Voraussetzung fortfällt, die neue Methode auf ihre Anwendbarkeit zu erproben, habe ich gefunden, dass man vermöge derselben in der That ein allgemeineres, aus Thetafunctionen zweier Argumente gebildetes Orthogonalsystem der neun Coefficienten und sechs Differentialgrössen aufstellen kann, welches ebenfalls bei passender Bestimmung der in ihm enthaltenen *beliebigen* Function und *beliebigen* Argumente jene Formeln liefert, durch die Herr *F. Kötter* †) das Problem der Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit für den genannten Fall zum Abschluss gebracht hat.

Neuerdings hat Herr *F. Kötter* ††) ein allgemeines Orthogonalsystem mitgetheilt, welches die Lösungen mehrerer Probleme der Mechanik als

---

*) Sur une manière d'exprimer, au moyen des fonctions thêta d'un seul argument, les coefficients de trois systèmes orthogonaux dont un est composé des deux autres. C. R. CVII, 859—862, 1888. — Sur l'application des fonctions thêta d'un seul argument aux problèmes de la rotation. C. R. CVII, 901—903, 937—938, 1888. — Sur les expressions des angles d'*Euler*, de leurs fonctions trigonométriques et des neuf coefficients d'une substitution orthogonale au moyen des fonctions thêta d'un seul argument. Bull. des sc. math. XIII, 89—111, 1889. — Sur une méthode élémentaire pour établir les équations différentielles dont les fonctions thêta forment les intégrales. C. R. CXII, 1120—1123, 1891.

**) Anwendung der Thetafunctionen zweier Veränderlicher auf die Theorie der Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit. Math. Ann. Bd. XIV, S. 173—206.

***) Sur deux systèmes d'équations différentielles dont les fonctions hyperelliptiques de première espèce forment les intégrales. C. R. CXII, 1305—1308, 1891.

†) Ueber die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit. Dieses Journal Bd. CIX, S. 110, 111.

††) Ueber eine Darstellung der Richtungscosinus zweier orthogonaler Coordinatensysteme durch Thetafunctionen zweier Argumente, welche die Lösungen mehrerer Probleme der Mechanik als Specialfälle umfasst. Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1895, S. 809—814. Vgl. auch dieses Journal Bd. CXVI, S. 213—246.

Specialfälle umfasst. Insbesondere lassen sich aus demselben der eben erwähnte *F. Kötter*sche und der *W. Stekloff*sche Fall der Bewegung eines starren Körpers in einer idealen Flüssigkeit*), sowie der durch Frau *von Kowalevski* aufgefundene integrable Fall des Rotationsproblems **) durch Specialisiren herleiten.

Die *Caspary*sche Methode führt auch zu diesem System und liefert zugleich das Resultat, dass *das allgemeine von Herrn F. Kötter entdeckte Orthogonalsystem durch Composition zweier identischer Orthogonalsysteme hervorgeht****).

Im Folgenden werde ich zunächst das allgemeine *F. Kötter*sche System vermöge der *Caspary*schen Methode herleiten. Zu dem Zweck weise ich nach: es lässt sich der Begriff der Composition in dem Sinne erweitern, dass die Zusammensetzung eines orthogonalen *Sechzehnersystems* einerseits und der beiden *zugehörigen Neunersysteme* andererseits mit einem orthogonalen *Neunersystem* (E) wieder zu einem orthogonalen *Neunersystem* (A) führt. Bei dieser Entstehungsweise tritt ohne weiteres die Reciprocitätsbeziehung zwischen den Systemen (A) und (E) hervor, derart dass auch das System (E) aus der Zusammensetzung desselben Sechzehnersystems einerseits und seiner *zugehörigen* Neunersysteme andererseits mit dem System (A) entspringt. Werden in die hiermit gewonnene Darstellung der Elemente a_{mn}, p_h, v_h des Orthogonalsystems (A) das von *Weierstrass* und Herrn *H. Weber* entdeckte Neunersystem sowie das von Herrn *Caspary*†) und mir gefundene Sechzehnersystem der Thetafunctionen von zwei Argumenten eingeführt, so ergiebt sich das allgemeine *F. Kötter*sche System.

Die Erkenntniss, dass letzteres System durch Composition zweier

---

*) Ueber die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit. Math. Ann. XLII, 273—274, 1893. Vgl. auch *A. Ljapunoff*, Ein neuer Fall, in welchem die Integrale der Differentialgleichungen der Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit sich ergeben. Charkow Ges. IV, 81—85, 1893.

**) Vgl. *F. Kötter*, Sur le cas de rotation d'un corps solide pesant autour d'un point fixe traité par Mme. *Kowalevski*. Acta math. XVII, 209—264.

***) Dieser Theil der Einleitung ist der in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie vom 30. Juli 1896 erschienenen Arbeit des Verfassers: Ueber ein allgemeines aus Thetafunctionen von zwei Argumenten gebildetes Orthogonalsystem und seine Verwendung in der Mechanik, entlehnt (S. 1023—1025).

†) Zur Theorie der Thetafunctionen von zwei Argumenten. Dieses Journal Bd. XCIV, S. 77.

identischer Orthogonalsysteme hervorgeht, ermöglicht sodann die Aufstellung eines noch allgemeineren Formelsystems, welches jenes als Specialfall umfasst.

In Verallgemeinerung meines Theorems über eine neue Bildungsweise von Neunersystemen zeige ich nämlich, dass sich vier orthogonale Sechzehnersysteme (die unter einander in einfacher Weise zusammenhängen) mit einem fünften orthogonalen Sechzehnersystem (H) wieder zu einem solchen (G) zusammensetzen lassen. Auf diesem Wege gelingt es, die Coefficienten g_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ eines Orthogonalsystems durch die Thetaproducte von vier Sechzehnersystemen und die Coefficienten h_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ eines beliebigen Orthogonalsystems auszudrücken.

Zu den g_{ij} gehören nun noch zwölf Differentialgrössen, welche ich durch die Gleichungen

$$(2.)\quad \begin{cases} g p_{rs} = -(g_{1i}dg_{1j}+g_{2i}dg_{2j}+g_{3i}dg_{3j}+g_{4i}dg_{4j}), \\ g v_{rs} = \quad g_{i1}dg_{j1}+g_{i2}dg_{j2}+g_{i3}dg_{j3}+g_{i4}dg_{j4}), \\ g = \quad g_{1i}^2+g_{2i}^2+g_{3i}^2+g_{4i}^2 = g_{i1}^2+g_{i2}^2+g_{i3}^2+g_{i4}^2 \end{cases} \quad \left(\begin{matrix} i \neq j \neq r \neq s; \\ i,j,r,s = 1,2,3,4;\ 1,4,2,3 \\ 2,3,1,4;\ 2,4,3,1 \\ 3,1,2,4;\ 3,4,1,2 \end{matrix} \right)$$

definire. Sie sind mit den Differentialgrössen p_h, v_h $(h = 1, 2, 3)$ der beiden dem System (G) ***zugehörigen*** Neunersysteme in bemerkenswerth einfacher Weise verknüpft. Da nun die Auswerthung der p_h, v_h im Vorhergehenden geleistet ist, so ergiebt sich die Darstellung der p_{rs}, v_{rs} ohne weiteres.

Zum Schluss leite ich ein System partieller Differentialgleichungen her, welches für das System (G) charakteristisch ist, und welches die von Herrn ***F. Kötter*** für sein System gegebenen partiellen Differentialgleichungen als Specialfall umfasst*).

I.

Die Composition eines Neunersystems aus einem Sechzehnersystem, dessen beiden *zugehörigen* Neunersystemen und einem beliebigen Neunersystem.

Die neun Coefficienten a_{mn} $(m, n = 1, 2, 3)$ eines Orthogonalsystems und die sechs Differentialgrössen p_h, v_h $(h = 1, 2, 3)$ lassen sich, wie Herr *Caspary* nachgewiesen hat, *identisch* mit Hülfe von vier beliebigen Para-

*) Vor kurzem (vgl. C. R. CXXVI, 1013—1016, 1898) ist es mir, unter Anwendung derselben Methode, gelungen, das Problem der Rotation zweier mit einander verbundener Körper in dem von den Herren *Wangerin* (Ueber die Rotation mit einander verbundener Körper. Univers.-Schr. Halle 1889) und *Volterra* (vgl. u. a. Ann. di Mat. XXIV, 29—58) behandelten Fall zum Abschluss zu bringen.

metern a_1, a_2, a_3, a_4 ausdrücken, wie folgt:

$$(J_1.)\quad \begin{cases} A = a_1a_4 - a_2a_3, \\ A(a_{11}+ia_{21}) = a_1^2+a_2^2, \quad A(a_{11}-ia_{21}) = a_3^2+a_4^2, \quad Aa_{31} = -i(a_1a_3+a_2a_4), \\ A(a_{12}+ia_{22}) = -i(a_1^2-a_2^2), \quad A(a_{12}-ia_{22}) = -i(a_3^2-a_4^2), \quad Aa_{32} = -(a_1a_3-a_2a_4), \\ A(a_{13}+ia_{23}) = -2ia_1a_2, \quad A(a_{13}-ia_{23}) = -2ia_3a_4, \quad Aa_{33} = -(a_1a_4+a_2a_3); \end{cases}$$

$$(J_1'.)\quad \begin{cases} A(p_1+ip_2) = 2(a_1da_3 - a_3da_1), & A(p_1-ip_2) = 2(a_2da_4 - a_4da_2), \\ A(v_1+iv_2) = -2(a_1da_2 - a_2da_1), & A(v_1-iv_2) = -2(a_3da_4 - a_4da_3), \\ A(p_3+v_3) = -2i(a_2da_3 - a_3da_2), & A(p_3-v_3) = -2i(a_1da_4 - a_4da_1). \end{cases}$$

Wird hier

$$(3.)\qquad a_1 = e_1\alpha_2 - e_2\alpha_1, \quad a_2 = e_1\alpha_4 - e_2\alpha_3, \quad a_3 = e_3\beta_2 - e_4\beta_1, \quad a_4 = e_3\beta_4 - e_4\beta_3$$

gesetzt und bezeichnen e_μ, α_μ, β_μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) beliebige Parameter, so nimmt das System ($J_1.$) die Form an:

$$\begin{aligned} A &= e_1e_3(\alpha_2\beta_4-\alpha_4\beta_2) - e_2e_3(\alpha_1\beta_4-\alpha_3\beta_2) - e_1e_4(\alpha_2\beta_3-\alpha_4\beta_1) + e_2e_4(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1), \\ A(a_{11}+ia_{21}) &= e_1^2(\alpha_2^2+\alpha_4^2) + e_2^2(\alpha_1^2+\alpha_3^2) - 2e_1e_2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_3\alpha_4), \\ A(a_{12}+ia_{22}) &= -i[e_1^2(\alpha_2^2-\alpha_4^2) + e_2^2(\alpha_1^2-\alpha_3^2) - 2e_1e_2(\alpha_1\alpha_2-\alpha_3\alpha_4)], \\ A(a_{13}+ia_{23}) &= -2i[e_1^2\alpha_2\alpha_4 + e_2^2\alpha_1\alpha_3 - e_1e_2(\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_4)]; \\ A(a_{11}-ia_{21}) &= e_3^2(\beta_2^2+\beta_4^2) + e_4^2(\beta_1^2+\beta_3^2) - 2e_3e_4(\beta_1\beta_2+\beta_3\beta_4), \\ A(a_{12}-ia_{22}) &= -i[e_3^2(\beta_2^2-\beta_4^2) + e_4^2(\beta_1^2-\beta_3^2) - 2e_3e_4(\beta_1\beta_2-\beta_3\beta_4)], \\ A(a_{13}-ia_{23}) &= -2i[e_3^2\beta_2\beta_4 + e_4^2\beta_1\beta_3 - e_3e_4(\beta_2\beta_3+\beta_1\beta_4)]; \\ Aa_{31} &= -i[e_1e_3(\alpha_2\beta_2+\alpha_4\beta_4) - e_2e_3(\alpha_1\beta_2+\alpha_3\beta_4) - e_1e_4(\alpha_2\beta_1+\alpha_4\beta_3) + e_2e_4(\alpha_1\beta_1+\alpha_3\beta_3)], \\ Aa_{32} &= -[e_1e_3(\alpha_2\beta_2-\alpha_4\beta_4) - e_2e_3(\alpha_1\beta_2-\alpha_3\beta_4) - e_1e_4(\alpha_2\beta_1-\alpha_4\beta_3) + e_2e_4(\alpha_1\beta_1-\alpha_3\beta_3)], \\ Aa_{33} &= -[e_1e_3(\alpha_2\beta_4+\alpha_4\beta_2) - e_2e_3(\alpha_1\beta_4+\alpha_3\beta_2) - e_1e_4(\alpha_2\beta_3+\alpha_4\beta_1) + e_2e_4(\alpha_1\beta_3+\alpha_3\beta_1)], \end{aligned}$$

und das System ($J_1'.$) die Form:

$$\begin{aligned} A(p_1+ip_2) &= 2[e_1e_3(\alpha_2\beta_2) - e_2e_3(\alpha_1\beta_2) - e_1e_4(\alpha_2\beta_1) + e_2e_4(\alpha_1\beta_1) + \alpha_2\beta_2(e_1e_3) - \alpha_1\beta_2(e_2e_3) - \alpha_2\beta_1(e_1e_4) + \alpha_1\beta_1(e_2e_4)], \\ A(p_1-ip_2) &= 2[e_1e_3(\alpha_4\beta_4) - e_2e_3(\alpha_3\beta_4) - e_1e_4(\alpha_4\beta_3) + e_2e_4(\alpha_3\beta_3) + \alpha_4\beta_4(e_1e_3) - \alpha_3\beta_4(e_2e_3) - \alpha_4\beta_3(e_1e_4) + \alpha_3\beta_3(e_2e_4)], \\ A(p_3+v_3) &= -2i[e_1e_3(\alpha_4\beta_2) - e_2e_3(\alpha_3\beta_2) - e_1e_4(\alpha_4\beta_1) + e_2e_4(\alpha_3\beta_1) + \alpha_4\beta_2(e_1e_3) - \alpha_3\beta_2(e_2e_3) - \alpha_4\beta_1(e_1e_4) + \alpha_3\beta_1(e_2e_4)], \\ A(p_3-v_3) &= -2i[e_1e_3(\alpha_2\beta_4) - e_2e_3(\alpha_1\beta_4) - e_1e_4(\alpha_2\beta_3) + e_2e_4(\alpha_1\beta_3) + \alpha_2\beta_4(e_1e_3) - \alpha_1\beta_4(e_2e_3) - \alpha_2\beta_3(e_1e_4) + \alpha_1\beta_3(e_2e_4)], \\ A(v_1+iv_2) &= -2[e_1^2(\alpha_2\alpha_4) + e_2^2(\alpha_1\alpha_3) - e_1e_2((\alpha_1\alpha_4)+(\alpha_2\alpha_3)) + (\alpha_1\alpha_4-\alpha_2\alpha_3)(e_1e_2)], \\ A(v_1-iv_2) &= -2[e_3^2(\beta_2\beta_4) + e_4^2(\beta_1\beta_3) - e_3e_4((\beta_1\beta_4)+(\beta_2\beta_3)) + (\beta_1\beta_4-\beta_2\beta_3)(e_3e_4)], \end{aligned}$$

wenn der Kürze halber

$$\begin{aligned}(\alpha_i\beta_k) &= \alpha_i d\beta_k - \beta_k d\alpha_i,\\ (\alpha_i\alpha_k) &= \alpha_i d\alpha_k - \alpha_k d\alpha_i,\\ (\beta_i\beta_k) &= \beta_i d\beta_k - \beta_k d\beta_i,\\ (e_i e_k) &= e_i de_k - e_k de_i\end{aligned} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

gesetzt ist.

Ich fasse jetzt die Grössen e_1, e_2, e_3, e_4 als die Parameter eines Orthogonalsystems mit den Coefficienten e_{mn} $(m, n = 1, 2, 3)$ und den Differentialgrössen $p_h(e)$, $v_h(e)$ $(h = 1, 2, 3)$, und die Grössen α_1, α_2, α_3, α_4; β_1, β_2, β_3, β_4 als die Parameter eines Orthogonalsystems mit den Coefficienten $\mathfrak{c}_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ und den Differentialgrössen p_{rs}, v_{rs} $(r, s = 1, 2, 3, 4)$ (deren Definition aus (2.) zu entnehmen ist) auf. Die Darstellung der *Elemente* des ersteren Systems aus seinen Parametern geht aus $(J_1.)$ und $(J_1'.)$ hervor, wenn A, a_{mn}, p_h, v_h; a_μ bezw. durch E, e_{mn}, $p_h(e)$, $v_h(e)$; e_μ ersetzt werden. Die Coefficienten des zweiten Systems lassen sich, nach den Untersuchungen von Herrn *Caspary*, identisch durch die acht Parameter α_μ, β_μ, wie folgt, ausdrücken:

$$(J_2.)\quad \begin{cases} 2\mathfrak{c}_{11} = \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3+\alpha_4\beta_4, & 2\mathfrak{c}_{21} = -i(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2-\alpha_3\beta_3-\alpha_4\beta_4),\\ 2\mathfrak{c}_{12} = -i(\alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3-\alpha_4\beta_4), & 2\mathfrak{c}_{22} = -(\alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_2-\alpha_3\beta_3+\alpha_4\beta_4),\\ 2\mathfrak{c}_{13} = -i(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+\alpha_3\beta_4+\alpha_4\beta_3), & 2\mathfrak{c}_{23} = -(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1-\alpha_3\beta_4-\alpha_4\beta_3),\\ 2\mathfrak{c}_{14} = \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1+\alpha_3\beta_4-\alpha_4\beta_3, & 2\mathfrak{c}_{24} = -i(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1-\alpha_3\beta_4+\alpha_4\beta_3),\\ 2\mathfrak{c}_{31} = -i(\alpha_1\beta_3+\alpha_2\beta_4+\alpha_3\beta_1+\alpha_4\beta_2), & 2\mathfrak{c}_{41} = \alpha_1\beta_3+\alpha_2\beta_4-\alpha_3\beta_1-\alpha_4\beta_2,\\ 2\mathfrak{c}_{32} = -(\alpha_1\beta_3-\alpha_2\beta_4+\alpha_3\beta_1-\alpha_4\beta_2), & 2\mathfrak{c}_{42} = -i(\alpha_1\beta_3-\alpha_2\beta_4-\alpha_3\beta_1+\alpha_4\beta_2),\\ 2\mathfrak{c}_{33} = -(\alpha_1\beta_4+\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2+\alpha_4\beta_1), & 2\mathfrak{c}_{43} = -i(\alpha_1\beta_4+\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2-\alpha_4\beta_1),\\ 2\mathfrak{c}_{34} = -i(\alpha_1\beta_4-\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2-\alpha_4\beta_1), & 2\mathfrak{c}_{44} = \alpha_1\beta_4-\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2+\alpha_4\beta_1. \end{cases}$$

Aus diesem *Sechzehnersystem* fliessen für $\beta = \alpha$ bezw. $\alpha = \beta$ zwei orthogonale *Neunersysteme*, welche ich als zu jenem *zugehörig* bezeichnet habe*). Die Elemente derselben mögen $\mathfrak{a}_{mn}$, $p_h(\alpha)$, $v_h(\alpha)$ bezw. $\mathfrak{b}_{mn}$, $p_h(\beta)$, $v_h(\beta)$ $(m, n = 1, 2, 3;\ h = 1, 2, 3)$ heissen. Ihre Ausdrücke in den Parametern α_1, α_2, α_3, α_4 bezw. β_1, β_2, β_3, β_4 ergeben sich übrigens auch aus $(J_1.)$ und $(J_1'.)$, wenn daselbst A, a_{mn}, p_h, v_h; a_μ durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{a}_{mn}$, $p_h(\alpha)$, $v_h(\alpha)$; α_μ bezw. $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{b}_{mn}$, $p_h(\beta)$, $v_h(\beta)$; β_μ ersetzt werden.

*) Vgl. die Arbeit des Verfassers: Ueber einen Zusammenhang zwischen den Elementen von Orthogonalsystemen. Dieses Journal Bd. 118, S. 225.

Was die Darstellung der Differentialgrössen p_{rs}, v_{rs} jenes orthogonalen *Sechzehnersystems* vermittelst der α und β anbetrifft, so besteht, wie ich vor Kurzem an dieser Stelle gezeigt habe*), folgender einfache Zusammenhang:

$$(J'_2.)\quad \begin{cases} 2p_{14} = p_1(\alpha)+p_1(\beta), & 2v_{14} = v_1(\alpha)+v_1(\beta), \\ 2p_{24} = p_2(\alpha)+p_2(\beta), & 2v_{24} = v_2(\alpha)+v_2(\beta), \\ 2p_{34} = p_3(\alpha)+p_3(\beta), & 2v_{34} = v_3(\alpha)+v_3(\beta), \\ 2p_{23} = -p_1(\alpha)+p_1(\beta), & 2v_{23} = -v_1(\alpha)+v_1(\beta), \\ 2p_{31} = -p_2(\alpha)+p_2(\beta), & 2v_{31} = -v_2(\alpha)+v_2(\beta), \\ 2p_{12} = -p_3(\alpha)+p_3(\beta), & 2v_{12} = -v_3(\alpha)+v_2(\beta). \end{cases}$$

Die Einführung der soeben definirten vier Orthogonalsysteme der $\mathfrak{c}_{ij}$, p_{rs}, v_{rs}; $\mathfrak{a}_{mn}$, $p_h(\alpha)$, $v_h(\alpha)$; $\mathfrak{b}_{mn}$, $p_h(\beta)$, $v_h(\beta)$; e_{mn}, $p_h(e)$, $v_h(e)$ giebt dem obigen Orthogonalsystem der a_{mn}, p_h, v_h folgende definitive Form**):

$$(J.)\quad \begin{cases} A(a_{11}+ia_{21}) = \mathfrak{A}E[(e_{11}+ie_{21})\mathfrak{a}_{11}+(e_{12}+ie_{22})\mathfrak{a}_{12}+(e_{13}+ie_{23})\mathfrak{a}_{13}], \\ A(a_{12}+ia_{22}) = \mathfrak{A}E[(e_{11}+ie_{21})\mathfrak{a}_{21}+(e_{12}+ie_{22})\mathfrak{a}_{22}+(e_{13}+ie_{23})\mathfrak{a}_{23}], \\ A(a_{13}+ia_{23}) = \mathfrak{A}E[(e_{11}+ie_{21})\mathfrak{a}_{31}+(e_{12}+ie_{22})\mathfrak{a}_{32}+(e_{13}+ie_{23})\mathfrak{a}_{33}], \\ A(a_{11}-ia_{21}) = \mathfrak{B}E[(e_{11}-ie_{21})\mathfrak{b}_{11}+(e_{12}-ie_{22})\mathfrak{b}_{12}+(e_{13}-ie_{23})\mathfrak{b}_{13}], \\ A(a_{12}-ia_{22}) = \mathfrak{B}E[(e_{11}-ie_{21})\mathfrak{b}_{21}+(e_{12}-ie_{22})\mathfrak{b}_{22}+(e_{13}-ie_{23})\mathfrak{b}_{23}], \\ A(a_{13}-ia_{23}) = \mathfrak{B}E[(e_{11}-ie_{21})\mathfrak{b}_{31}+(e_{12}-ie_{22})\mathfrak{b}_{32}+(e_{13}-ie_{23})\mathfrak{b}_{33}], \\ Aa_{31} = E(e_{31}\mathfrak{c}_{11}+e_{32}\mathfrak{c}_{12}+e_{33}\mathfrak{c}_{13}-i\mathfrak{c}_{14}), \\ Aa_{32} = E(e_{31}\mathfrak{c}_{21}+e_{32}\mathfrak{c}_{22}+e_{33}\mathfrak{c}_{23}-i\mathfrak{c}_{24}), \\ Aa_{33} = E(e_{31}\mathfrak{c}_{31}+e_{32}\mathfrak{c}_{32}+e_{33}\mathfrak{c}_{33}-i\mathfrak{c}_{34}), \\ A = iE(e_{31}\mathfrak{c}_{41}+e_{32}\mathfrak{c}_{42}+e_{33}\mathfrak{c}_{43}-i\mathfrak{c}_{44}); \end{cases}$$

$$(J'.)\quad \begin{cases} Ap_1 = E[i(e_{31}\gamma_{11}+e_{32}\gamma_{12}+e_{33}\gamma_{13}-i\gamma_{14})+ p_1(e)\mathfrak{c}_{11}+p_2(e)\mathfrak{c}_{12}+p_3(e)\mathfrak{c}_{13}-iv_3(e)\mathfrak{c}_{14}], \\ Ap_2 = E[i(e_{31}\gamma_{21}+e_{32}\gamma_{22}+e_{33}\gamma_{23}-i\gamma_{24})+ p_1(e)\mathfrak{c}_{21}+p_2(e)\mathfrak{c}_{22}+p_3(e)\mathfrak{c}_{23}-iv_3(e)\mathfrak{c}_{24}], \\ Ap_3 = E[i(e_{31}\gamma_{31}+e_{32}\gamma_{32}+e_{33}\gamma_{33}-i\gamma_{34})+ p_1(e)\mathfrak{c}_{31}+p_2(e)\mathfrak{c}_{32}+p_3(e)\mathfrak{c}_{33}-iv_3(e)\mathfrak{c}_{34}], \\ Av_3 = E[-(e_{31}\gamma_{41}+e_{32}\gamma_{42}+e_{33}\gamma_{43}-i\gamma_{44})+i(p_1(e)\mathfrak{c}_{41}+p_2(e)\mathfrak{c}_{42}+p_3(e)\mathfrak{c}_{43}-iv_3(e)\mathfrak{c}_{44})]; \\ A(v_1+iv_2) = \mathfrak{A}E[-(e_{11}+ie_{21})p_1(\alpha)-(e_{12}+ie_{22})p_2(\alpha)-(e_{13}+ie_{23})p_3(\alpha)+v_1(e)+iv_2(e)], \\ A(v_1-iv_2) = \mathfrak{B}E[-(e_{11}-ie_{21})p_1(\beta)-(e_{12}-ie_{22})p_2(\beta)-(e_{13}-ie_{23})p_3(\beta)+v_1(e)-iv_2(e)]. \end{cases}$$

Hierbei bedeuten die γ_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ die Coefficienten eines Systems,

*) a. a. O. S. 228.

**) Vgl. C. R. CXXVI, 1014; 1898.

das aus (J_2.) hervorgeht, wenn die Producte $\alpha_i\beta_k$ durch

$$(\alpha_i\beta_k) = \alpha_i d\beta_k - \beta_k d\alpha_i \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

ersetzt werden.

Das in (J.) und (J'.) aufgestellte Orthogonalsystem zeigt die Eigenschaft einer vollständigen Reciprocität zwischen den Elementen a_{mn}, p_h, v_h einerseits und den Elementen e_{mn}, $p_h(e)$, $v_h(e)$ andererseits. In der That erhält man aus (J.) und (J'.) das folgende System:

$$(\bar{J}_{x\cdot})\quad\begin{cases}
\mathfrak{A}E(e_{11}+ie_{21}) = A[(a_{11}+ia_{21})\mathfrak{a}_{11}+(a_{12}+ia_{22})\mathfrak{a}_{21}+(a_{13}+ia_{23})\mathfrak{a}_{31}],\\
\mathfrak{A}E(e_{12}+ie_{22}) = A[(a_{11}+ia_{21})\mathfrak{a}_{12}+(a_{12}+ia_{22})\mathfrak{a}_{22}+(a_{13}+ia_{23})\mathfrak{a}_{32}],\\
\mathfrak{A}E(e_{13}+ie_{23}) = A[(a_{11}+ia_{21})\mathfrak{a}_{13}+(a_{12}+ia_{22})\mathfrak{a}_{23}+(a_{13}+ia_{23})\mathfrak{a}_{33}],\\
\mathfrak{B}E(e_{11}-ie_{21}) = A[(a_{11}-ia_{21})\mathfrak{b}_{11}+(a_{12}-ia_{22})\mathfrak{b}_{21}+(a_{13}-ia_{23})\mathfrak{b}_{31}],\\
\mathfrak{B}E(e_{12}-ie_{22}) = A[(a_{11}-ia_{21})\mathfrak{b}_{12}+(a_{12}-ia_{22})\mathfrak{b}_{22}+(a_{13}-ia_{23})\mathfrak{b}_{32}],\\
\mathfrak{B}E(e_{13}-ie_{23}) = A[(a_{11}-ia_{21})\mathfrak{b}_{13}+(a_{12}-ia_{22})\mathfrak{b}_{23}+(a_{13}-ia_{23})\mathfrak{b}_{33}],\\
\mathfrak{C}Ee_{31} = A(a_{31}\mathfrak{c}_{11}+a_{32}\mathfrak{c}_{21}+a_{33}\mathfrak{c}_{31}-i\mathfrak{c}_{41}),\\
\mathfrak{C}Ee_{32} = A(a_{31}\mathfrak{c}_{12}+a_{32}\mathfrak{c}_{22}+a_{33}\mathfrak{c}_{32}-i\mathfrak{c}_{42}),\\
\mathfrak{C}Ee_{33} = A(a_{31}\mathfrak{c}_{13}+a_{32}\mathfrak{c}_{23}+a_{33}\mathfrak{c}_{33}-i\mathfrak{c}_{43}),\\
\mathfrak{C}E = iA(a_{31}\mathfrak{c}_{14}+a_{32}\mathfrak{c}_{24}+a_{33}\mathfrak{c}_{34}-i\mathfrak{c}_{44});
\end{cases}$$

$$(\bar{J}'_{x\cdot})\quad\begin{cases}
\mathfrak{C}Ep_1(e) = A(p_1\mathfrak{c}_{11}+p_2\mathfrak{c}_{21}+p_3\mathfrak{c}_{31}-iv_3\mathfrak{c}_{41})\\
\qquad -i\mathfrak{C}E\ (e_{31}dlgC-e_{32}p_{12}+e_{33}p_{31}+ip_{14}),\\
\mathfrak{C}Ep_2(e) = A(p_1\mathfrak{c}_{12}+p_2\mathfrak{c}_{22}+p_3\mathfrak{c}_{32}-iv_3\mathfrak{c}_{42})\\
\qquad -i\mathfrak{C}E\ (e_{31}p_{12}+e_{32}dlgC-e_{33}p_{23}+ip_{24}),\\
\mathfrak{C}Ep_3(e) = A(p_1\mathfrak{c}_{13}+p_2\mathfrak{c}_{23}+p_3\mathfrak{c}_{33}-iv_3\mathfrak{c}_{43})\\
\qquad -i\mathfrak{C}E(-e_{31}p_{31}+e_{32}p_{23}+e_{33}dlgC+ip_{34}),\\
-i\mathfrak{C}Ev_3(e) = A(p_1\mathfrak{c}_{14}+p_2\mathfrak{c}_{24}+p_3\mathfrak{c}_{34}-iv_3\mathfrak{c}_{44})\\
\qquad -i\mathfrak{C}E\ (e_{31}p_{14}+e_{32}p_{24}+e_{33}p_{34}+idlgC),\\
\mathfrak{A}E(v_1(e)+iv_2(e)) = A(v_1+iv_2)+\mathfrak{A}E[(e_{11}+ie_{21})p_1(\alpha)\\
\qquad +(e_{12}+ie_{22})p_2(\alpha)+(e_{13}+ie_{23})p_3(\alpha)],\\
\mathfrak{B}E(v_1(e)-iv_2(e)) = A(v_1-iv_2)+\mathfrak{B}E[(e_{11}-ie_{21})p_1(\beta)\\
\qquad +(e_{12}-ie_{22})p_2(\beta)+(e_{13}-ie_{23})p_3(\beta)],
\end{cases}$$

wobei ausser den Beziehungen (J'_2.) noch die folgenden benutzt worden sind:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{B},$$

$$(4.)\quad \begin{cases} \sum_{h=1}^{4}\gamma_{h1}\mathfrak{c}_{h1} = \mathfrak{S}dlgC, & \sum_{h=1}^{4}\gamma_{h1}\mathfrak{c}_{h2} = \mathfrak{S}p_{12}, & \sum_{h=1}^{4}\gamma_{h1}\mathfrak{c}_{h3} = -\mathfrak{S}p_{31}, & \sum_{h=1}^{4}\gamma_{h1}\mathfrak{c}_{h4} = \mathfrak{S}p_{14}, \\ \sum_{h=1}^{4}\gamma_{h2}\mathfrak{c}_{h1} = -\mathfrak{S}p_{12}, & \sum_{h=1}^{4}\gamma_{h2}\mathfrak{c}_{h2} = \mathfrak{S}dlgC, & \sum_{h=1}^{4}\gamma_{h2}\mathfrak{c}_{h3} = \mathfrak{S}p_{23}, & \sum_{h=1}^{4}\gamma_{h2}\mathfrak{c}_{h4} = \mathfrak{S}p_{24}, \\ \sum_{h=1}^{4}\gamma_{h3}\mathfrak{c}_{h1} = \mathfrak{S}p_{31}, & \sum_{h=1}^{4}\gamma_{h3}\mathfrak{c}_{h2} = -\mathfrak{S}p_{23}, & \sum_{h=1}^{4}\gamma_{h3}\mathfrak{c}_{h3} = \mathfrak{S}dlgC, & \sum_{h=1}^{4}\gamma_{h3}\mathfrak{c}_{24} = \mathfrak{S}p_{34}, \\ \sum_{h=1}^{4}\gamma_{h4}\mathfrak{c}_{h1} = -\mathfrak{S}p_{14}, & \sum_{h=1}^{4}\gamma_{h4}\mathfrak{c}_{h2} = -\mathfrak{S}p_{24}, & \sum_{h=1}^{4}\gamma_{h4}\mathfrak{c}_{h3} = -\mathfrak{S}p_{34}, & \sum_{h=1}^{4}\gamma_{h4}\mathfrak{c}_{24} = \mathfrak{S}dlgC. \end{cases}$$

Zur Abkürzung ist noch

$$\sqrt{\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}} = C$$

gesetzt.

II.

Das *F. Kötter*sche Orthogonalsystem.

Bezeichnen x_ν, y_ν $(\nu = 1, 2)$ beliebige Argumente und A_1, A_2 beliebige Functionen derselben, so wähle ich für die zwei Quadrupel von Parametern α_μ, β_μ $(\mu = 1, 2, 3, 4)$ je dasselbe *Göpel*sche System von Thetafunctionen mit verschiedenen Argumenten*):

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= A_1\theta_5\,(x_1+y_1,\ x_2+y_2), & \beta_1 &= A_2\theta_5\,(x_1-y_1,\ x_2-y_2), \\ \alpha_2 &= A_1\theta_{01}(x_1+y_1,\ x_2+y_2), & \beta_2 &= A_2\theta_{01}(x_1-y_1,\ x_2-y_2), \\ \alpha_3 &= A_1\theta_4\,(x_1+y_1,\ x_2+y_2), & \beta_3 &= A_2\theta_4\,(x_1-y_1,\ x_2-y_2), \\ \alpha_4 &= A_1\theta_{23}(x_1+y_1,\ x_2+y_2), & \beta_4 &= A_2\theta_{23}(x_1-y_1,\ x_2-y_2), \end{aligned}$$

wobei die Thetafunctionen in der *Weierstrass*schen Bezeichnung geschrieben sind und die Functionen θ von den Moduln $2\tau_{11}$, $2\tau_{12}$, $2\tau_{22}$ abhängen. Dann geht das System $(J_2.)$, unter Benutzung der Formeln für die quadratische Transformation der Thetafunctionen von zwei Argumenten, über in*):

$$(5.)\quad \begin{cases} 2\mathfrak{c}_{11} = A_1A_2\vartheta_5\,(x_1,x_2)\vartheta_5\,(y_1,y_2), & 2\mathfrak{c}_{21} = -iA_1A_2\vartheta_{34}(x_1,x_2)\vartheta_{34}(y_1,y_2), \\ 2\mathfrak{c}_{12} = -iA_1A_2\vartheta_{12}(x_1,x_2)\vartheta_{12}(y_1,y_2), & 2\mathfrak{c}_{22} = -A_1A_2\vartheta_0\,(x_1,x_2)\vartheta_0\,(y_1,y_2), \\ 2\mathfrak{c}_{13} = -iA_1A_2\vartheta_{01}(x_1,x_2)\vartheta_{01}(y_1,y_2), & 2\mathfrak{c}_{23} = -A_1A_2\vartheta_2\,(x_1,x_2)\vartheta_2\,(y_1,y_2), \\ 2\mathfrak{c}_{14} = A_1A_2\vartheta_{02}(x_1,x_2)\vartheta_{02}(y_1,y_2), & 2\mathfrak{c}_{24} = -iA_1A_2\vartheta_1\,(x_1,x_2)\vartheta_1\,(y_1,y_2), \\ 2\mathfrak{c}_{31} = -iA_1A_2\vartheta_4\,(x_1,x_2)\vartheta_4\,(y_1,y_2), & 2\mathfrak{c}_{41} = A_1A_2\vartheta_3\,(x_1,x_2)\vartheta_3\,(y_1,y_2), \\ 2\mathfrak{c}_{32} = -A_1A_2\vartheta_{03}(x_1,x_2)\vartheta_{03}(y_1,y_2), & 2\mathfrak{c}_{42} = -iA_1A_2\vartheta_{04}(x_1,x_2)\vartheta_{04}(y_1,y_2), \\ 2\mathfrak{c}_{33} = -A_1A_2\vartheta_{23}(x_1,x_2)\vartheta_{23}(y_1,y_2), & 2\mathfrak{c}_{43} = -iA_1A_2\vartheta_{24}(x_1,x_2)\vartheta_{24}(y_1,y_2), \\ 2\mathfrak{c}_{34} = -iA_1A_2\vartheta_{13}(x_1,x_2)\vartheta_{13}(y_1,y_2), & 2\mathfrak{c}_{44} = A_1A_2\vartheta_{14}(x_1,x_2)\vartheta_{14}(y_1,y_2). \end{cases}$$

*) Vgl. *F. Caspary*, dieses Journal Bd. 94, S. 76.

Durch Specialisiren fliessen hieraus die Ausdrücke für die $\mathfrak{a}_{mn}$, $\mathfrak{b}_{mn}$ in den Thetafunctionen. Bezeichnet man die Nullwerthe von ϑ_α und $\vartheta_{\alpha\beta}$ mit c_α und $c_{\alpha\beta}$ und beachtet, dass die Constanten c_{13}, c_3, c_1, c_{24}, c_{04}, c_{02} verschwinden, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
2\mathfrak{A}\mathfrak{a}_{11} &= A_1^2 c_5\,\vartheta_5(x_1+y_1,\ x_2+y_2), & 2\mathfrak{B}\mathfrak{b}_{11} &= A_2^2 c_5\,\vartheta_5(x_1-y_1,\ x_2-y_2),\\
2\mathfrak{A}\mathfrak{a}_{12} &= -iA_1^2 c_{12}\vartheta_{12}(x_1+y_1,\ x_2+y_2), & 2\mathfrak{B}\mathfrak{b}_{12} &= -iA_2^2 c_{12}\vartheta_{12}(x_1-y_1,\ x_2-y_2),\\
2\mathfrak{A}\mathfrak{a}_{13} &= -iA_1^2 c_{01}\vartheta_{01}(x_1+y_1,\ x_2+y_2), & 2\mathfrak{B}\mathfrak{b}_{13} &= -iA_2^2 c_{01}\vartheta_{01}(x_1-y_1,\ x_2-y_2),\\
2\mathfrak{A}\mathfrak{a}_{21} &= -iA_1^2 c_{34}\vartheta_{34}(x_1+y_1,\ x_2+y_2), & 2\mathfrak{B}\mathfrak{b}_{21} &= -iA_2^2 c_{34}\vartheta_{34}(x_1-y_1,\ x_2-y_2),\\
2\mathfrak{A}\mathfrak{a}_{22} &= -A_1^2 c_0\,\vartheta_0(x_1+y_1,\ x_2+y_2), & 2\mathfrak{B}\mathfrak{b}_{22} &= -A_2^2 c_0\,\vartheta_0(x_1-y_1,\ x_2-y_2),\\
2\mathfrak{A}\mathfrak{a}_{23} &= -A_1^2 c_2\,\vartheta_2(x_1+y_1,\ x_2+y_2), & 2\mathfrak{B}\mathfrak{b}_{23} &= -A_2^2 c_2\,\vartheta_2(x_1-y_1,\ x_2-y_2),\\
2\mathfrak{A}\mathfrak{a}_{31} &= -iA_1^2 c_4\,\vartheta_4(x_1+y_1,\ x_2+y_2), & 2\mathfrak{B}\mathfrak{b}_{31} &= -iA_2^2 c_4\,\vartheta_4(x_1-y_1,\ x_2-y_2),\\
2\mathfrak{A}\mathfrak{a}_{32} &= -A_1^2 c_{03}\vartheta_{03}(x_1+y_1,\ x_2+y_2), & 2\mathfrak{B}\mathfrak{b}_{32} &= -A_2^2 c_{03}\vartheta_{03}(x_1-y_1,\ x_2-y_2),\\
2\mathfrak{A}\mathfrak{a}_{33} &= -A_1^2 c_{23}\vartheta_{23}(x_1+y_1,\ x_2+y_2), & 2\mathfrak{B}\mathfrak{b}_{33} &= -A_2^2 c_{23}\vartheta_{23}(x_1-y_1,\ x_2-y_2),\\
2\mathfrak{A} &= A_1^2 c_{14}\vartheta_{14}(x_1+y_1,\ x_2+y_2), & 2\mathfrak{B} &= A_2^2 c_{14}\vartheta_{14}(x_1-y_1,\ x_2-y_2).
\end{aligned}
$$

Wird jetzt noch

$$\frac{A_1}{A_2} = F$$

und der Kürze halber

$$\vartheta(u_1,\ u_2) = \vartheta(u)$$

gesetzt, so liefert das System (J.) folgende Verknüpfung der Thetafunctionen von zwei Argumenten mit den neun Coefficienten eines Orthogonalsystems:

(I.)
$$
\left\{\begin{aligned}
A(a_{11}\pm ia_{21}) &= F^{\pm1}\big[\,(e_{11}\pm ie_{21})c_5\,\vartheta_5(x\pm y) - i(e_{12}\pm ie_{22})c_{12}\vartheta_{12}(x\pm y)\\
&\qquad - i(e_{13}\pm ie_{23})c_{01}\vartheta_{01}(x\pm y)\big],\\
A(a_{12}\pm ia_{22}) &= -F^{\pm1}\big[i(e_{11}\pm ie_{21})c_{34}\vartheta_{34}(x\pm y) + (e_{12}\pm ie_{22})c_0\,\vartheta_0(x\pm y)\\
&\qquad + (e_{13}\pm ie_{23})c_2\,\vartheta_2(x\pm y)\big],\\
A(a_{13}\pm ia_{23}) &= -F^{\pm1}\big[i(e_{11}\pm ie_{21})c_4\,\vartheta_4(x\pm y) + (e_{12}\pm ie_{22})c_{03}\vartheta_{03}(x\pm y)\\
&\qquad + (e_{13}\pm ie_{23})c_{23}\vartheta_{23}(x\pm y)\big],\\
Aa_{31} &= e_{31}\vartheta_5(x)\vartheta_5(y) - ie_{32}\vartheta_{12}(x)\vartheta_{12}(y) - ie_{33}\vartheta_{01}(x)\vartheta_{01}(y) - i\vartheta_{02}(x)\vartheta_{02}(y),\\
Aa_{32} &= -ie_{31}\vartheta_{34}(x)\vartheta_{34}(y) - e_{32}\vartheta_0(x)\vartheta_0(y) - e_{33}\vartheta_2(x)\vartheta_2(y) - \vartheta_1(x)\vartheta_1(y),\\
Aa_{53} &= -ie_{31}\vartheta_4(x)\vartheta_4(y) - e_{32}\vartheta_{03}(x)\vartheta_{03}(y) - e_{33}\vartheta_{23}(x)\vartheta_{23}(y) - \vartheta_{13}(x)\vartheta_{13}(y),\\
A &= ie_{31}\vartheta_3(x)\vartheta_3(y) + e_{32}\vartheta_{04}(x)\vartheta_{04}(y) + e_{33}\vartheta_{24}(x)\vartheta_{24}(y) + \vartheta_{14}(x)\vartheta_{14}(y).
\end{aligned}\right.
$$

Die hierzu gehörigen sechs Differentialgrössen des Orthogonalsystems ergeben sich aus (J'.). Um ihre explicite Darstellung in den Thetafunctionen

zu gewinnen, sind zunächst die γ_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ durch die Thetafunctionen auszudrücken.

Ich führe die Rechnung für γ_{11} durch. Nach einer Bemerkung auf S. 240 gehen die Coefficienten γ_{ij} aus den c_{ij} hervor, wenn die Producte $\alpha_i\beta_k$ durch $\alpha_i d\beta_k - \beta_k d\alpha_i$ ersetzt werden. Demnach ist

$$2\gamma_{11} = \alpha_1 d\beta_1 + \alpha_2 d\beta_2 + \alpha_3 d\beta_3 + \alpha_4 d\beta_4 - \beta_1 d\alpha_1 - \beta_2 d\alpha_2 - \beta_3 d\alpha_3 - \beta_4 d\alpha_4.$$

Jetzt werde

$$x_\nu + y_\nu = \xi_\nu, \quad x_\nu - y_\nu = \eta_\nu,$$

also $(\nu = 1, 2)$

$$x_\nu = \frac{\xi_\nu + \eta_\nu}{2}, \quad y_\nu = \frac{\xi_\nu - \eta_\nu}{2},$$

und zur Abkürzung

$$\vartheta(u_1, u_2) = \vartheta(u), \quad \frac{\partial\vartheta(u_1, u_2)}{\partial u_1} dv_1 + \frac{\partial\vartheta(u_1, u_2)}{\partial u_2} dv_2 = \frac{\partial\vartheta(u)}{\partial u} dv$$

gesetzt, dann giebt die erste Gleichung des Systems (5.)

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + \alpha_4\beta_4 = A_1 A_2 \vartheta_5\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)\vartheta_5\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right).$$

Durch Differentiation nach ξ und η erhält man die beiden Formeln:

$$2(\beta_1 d\alpha_1 + \beta_2 d\alpha_2 + \beta_3 d\alpha_3 + \beta_4 d\alpha_4) = A_1 A_2 \Big[\vartheta_5\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)\vartheta_5'\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) + \vartheta_5\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)\vartheta_5'\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)\Big] d\xi + 2\vartheta_5\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)\vartheta_5\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right) A_2 dA_1,$$

$$2(\alpha_1 d\beta_1 + \alpha_2 d\beta_2 + \alpha_3 d\beta_3 + \alpha_4 d\beta_4) = A_1 A_2 \Big[\vartheta_5\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)\vartheta_5'\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) - \vartheta_5\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)\vartheta_5'\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)\Big] d\eta + 2\vartheta_5\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)\vartheta_5\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right) A_1 dA_2,$$

deren Subtraction zu

$$-2\gamma_{11} = A_1 A_2 \vartheta_5(x)\vartheta_5(y)\Big[\frac{\partial \lg \vartheta_5(x)}{\partial x} dy + \frac{\partial \lg \vartheta_5(y)}{\partial y} dx + d\lg F\Big]$$

führt.

In ähnlicher Weise lassen sich die übrigen Coefficienten berechnen. Wird noch

(6.) $$m_{\alpha\beta} = \vartheta_{\alpha\beta}(x)\vartheta_{\alpha\beta}(y)\Big[\frac{\partial \log \vartheta_{\alpha\beta}(x)}{\partial x} dy + \frac{\partial \log \vartheta_{\alpha\beta}(y)}{\partial y} dx + d\lg F\Big] \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3, 4)$$

gesetzt und m_λ $(\lambda = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ für die entsprechenden Ausdrücke ein-

geführt, so erhält man:

$$(7.)\quad \begin{cases} 2\gamma_{11}=-A_1A_2m_5, & 2\gamma_{21}=iA_1A_2m_{34}, & 2\gamma_{31}=iA_1A_2m_4, & 2\gamma_{41}=-A_1A_2m_3,\\ 2\gamma_{12}=iA_1A_2m_{12}, & 2\gamma_{22}=A_1A_2m_0, & 2\gamma_{32}=A_1A_2m_{03}, & 2\gamma_{42}=iA_1A_2m_{04},\\ 2\gamma_{13}=iA_1A_2m_{01}, & 2\gamma_{23}=A_1A_2m_2, & 2\gamma_{33}=A_1A_2m_{23}, & 2\gamma_{43}=iA_1A_2m_{24},\\ 2\gamma_{14}=-A_1A_2m_{02}, & 2\gamma_{24}=iA_1A_2m_1, & 2\gamma_{34}=iA_1A_2m_{13}, & 2\gamma_{44}=-A_1A_2m_{14}\text{*}). \end{cases}$$

Durch Specialisiren fliessen hieraus die Ausdrücke für die $p_h(\alpha)$, $p_h(\beta)$ $(h=1,2,3)$ in den Thetafunctionen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}p_1(\alpha)&=-A_1^2c_3'\,\vartheta_3\,(x+y), & \mathfrak{B}p_1(\beta)&=-A_2^2c_3'\,\vartheta_3\,(x-y),\\ \mathfrak{A}p_2(\alpha)&=iA_1^2c_{04}'\vartheta_{04}(x+y), & \mathfrak{B}p_2(\beta)&=iA_2^2c_{04}'\vartheta_{04}(x-y),\\ \mathfrak{A}p_3(\alpha)&=iA_1^2c_{24}'\vartheta_{24}(x+y), & \mathfrak{B}p_3(\beta)&=iA_2^2c_{24}'\vartheta_{24}(x-y), \end{aligned}$$

wenn man

$$(8.)\quad c_{\alpha\beta}'=\Big(\frac{\partial\vartheta_{\alpha\beta}(x_1,\,x_2)}{\partial x_1}\Big)_{\substack{x_1=0\\x_2=0}}d(x_1\pm y_1)+\Big(\frac{\partial\vartheta_{\alpha\beta}(x_1,\,x_2)}{\partial x_2}\Big)_{\substack{x_1=0\\x_2=0}}d(x_2\pm y_2)$$
$$(\alpha,\,\beta=0,\,1,\,2,\,3,\,4)$$

und c_λ' $(\lambda=1,3)$ für die entsprechenden Ausdrücke setzt.

Hiernach findet man aus (J'.) für die zum System (I.) gehörigen Differentialgrössen die folgende Darstellung:

$$(\text{II.})\quad \begin{cases} Ap_1 = -ie_{31}m_5-e_{32}m_{12}-e_{33}m_{01}-m_{02}+\mathfrak{p}_1(e),\\ Ap_2 = -e_{31}m_{34}+ie_{32}m_0+ie_{33}m_2+im_1+\mathfrak{p}_2(e),\\ Ap_3 = -e_{31}m_4+ie_{32}m_{03}+ie_{33}m_{23}+im_{13}+\mathfrak{p}_3(e),\\ Av_3 = e_{31}m_3-ie_{32}m_{04}-ie_{33}m_{24}-im_{14}+\mathfrak{v}_3(e),\\ A(v_1\pm iv_2) = F^{\pm1}[(e_{11}\pm ie_{21})c_3'\vartheta_3(x\pm y)-i(e_{12}\pm ie_{22})c_{04}'\vartheta_{04}(x\pm y)\\ \qquad -i(e_{13}\pm ie_{23})c_{24}'\vartheta_{24}(x\pm y)+(v_1(e)\pm iv_2(e))c_{14}\vartheta_{14}(x\pm y)], \end{cases}$$

wo

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_1(e) &= p_1(e)\vartheta_5\,(x)\vartheta_5\,(y)-ip_2(e)\vartheta_{12}(x)\vartheta_{12}(y)-ip_3(e)\vartheta_{01}(x)\vartheta_{01}(y)\\ &\qquad -iv_3(e)\vartheta_{02}(x)\vartheta_{02}(y),\\ \mathfrak{p}_2(e) &= -ip_1(e)\vartheta_{34}(x)\vartheta_{34}(y)-p_2(e)\vartheta_0\,(x)\vartheta_0\,(y)-p_3(e)\vartheta_2\,(x)\vartheta_2\,(y)\\ &\qquad -v_3(e)\vartheta_1\,(x)\vartheta_1\,(y),\\ \mathfrak{p}_3(e) &= -ip_1(e)\vartheta_4\,(x)\vartheta_4\,(y)-p_2(e)\vartheta_{03}(x)\vartheta_{03}(y)-p_3(e)\vartheta_{23}(x)\vartheta_{23}(y)\\ &\qquad -v_3(e)\vartheta_{13}(x)\vartheta_{13}(y),\\ \mathfrak{v}_3(e) &= ip_1(e)\vartheta_3\,(x)\vartheta_3\,(y)+p_2(e)\vartheta_{04}(x)\vartheta_{04}(y)+p_3(e)\vartheta_{24}(x)\vartheta_{24}(y)\\ &\qquad +v_3(e)\vartheta_{14}(x)\vartheta_{14}(y) \end{aligned}$$

---

*) Dieses System ist inzwischen der Ausgangspunkt für meine Untersuchungen über die $n$ten Ableitungen der Thetafunctionen von zwei Argumenten geworden. Vgl. Systèmes

gesetzt ist. In den Ausdrücken für $v_1 \pm iv_2$, $c'_{\alpha\beta}$ ist gleichzeitig das obere oder das untere Zeichen zu nehmen.

Das in (I.) und (II.) aufgestellte Orthogonalsystem ist, abgesehen von der Bezeichnung, dasjenige, welches Herr *F. Kötter* als Lösung für mehrere Probleme der Mechanik entdeckt hat. In dem *Kötter*schen System tragen zwar die Thetafunctionen allgemeine, in dem hier gegebenen specielle Indices. Dadurch wird aber die Allgemeinheit des letzteren in keiner Weise gemindert. Man überzeugt sich sofort, dass *sämmtliche* sechzehn Thetafunctionen in dasselbe eingehen, das System (I.), (II.) ist daher schon das *allgemeine.*

Die bereits von Herrn *F. Kötter* hervorgehobene Eigenschaft seines Systems, dass zwischen den Coefficienten a_{mn} einerseits und den Coefficienten e_{mn} andererseits vollständige Reciprocität besteht, ist keine charakteristische. Sie kommt, wie ich im ersten Abschnitt nachgewiesen habe, einem viel allgemeineren System, dem System (J.) zu. Daselbst ist auch gezeigt, dass sich die Reciprocität noch weiter erstreckt, nämlich auf die Differentialgrössen p_h, v_h einerseits und $p_h(e)$, $v_h(e)$ $(h = 1, 2, 3)$ andererseits.

III.

Die Composition eines Sechzehnersystems aus fünf Sechzehnersystemen.

Versteht man unter einem componirten System ein solches, dessen Elemente g_{ij} aus den Elementen a_{ij}, b_{ij} so zusammengesetzt sind, dass

$$g_{ij} = a_{1i}b_{1j} + a_{2i}b_{2j} + a_{3i}b_{3j} + a_{4i}b_{4j}, \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

und bezeichnen c_1, c_2, c_3, c_4 beliebige Parameter, so habe ich gefunden, dass sich aus den beiden identischen Orthogonalsystemen

$$\text{(C.)} \quad \begin{cases} c_1 & -c_2 & c_3 & c_4 \\ c_2 & c_1 & -c_4 & c_3 \\ -c_3 & c_4 & c_1 & c_2 \\ c_4 & c_3 & c_2 & -c_1 \end{cases} \qquad \text{(C'.)} \quad \begin{cases} c_1 & c_2 & -c_3 & c_4 \\ -c_2 & c_1 & c_4 & c_3 \\ c_3 & -c_4 & c_1 & c_2 \\ c_4 & c_3 & c_2 & -c_1 \end{cases}$$

ein allgemeines orthogonales *Neunersystem* componiren lässt.

---

orthogonaux pour les dérivées etc. C. R. CXXV, 486—489; 1897, und Expressions des dérivées des fonctions thêta etc. C. R. CXXVI 1083—1085; 1898.

Im Besonderen ergiebt sich das System (I.) und demnach auch das *Kötter*sche System durch Composition jener beiden identischen Orthogonalsysteme, wenn, in Rücksicht auf (3.),

$$(9.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{c}_1 = e_1\alpha_4 - e_2\alpha_3 - e_3\beta_2 + e_4\beta_1, \\ \mathfrak{c}_2 = -i(e_1\alpha_4 - e_2\alpha_3 + e_3\beta_2 - e_4\beta_1), \\ \mathfrak{c}_3 = -i(e_1\alpha_2 - e_2\alpha_1 - e_3\beta_4 + e_4\beta_3), \\ \mathfrak{c}_4 = e_1\alpha_2 - e_2\alpha_1 + e_3\beta_4 - e_4\beta_3 \end{cases} \qquad i = \sqrt{-1}$$

gesetzt wird.

Ich ersetze jetzt das System (C'.) durch das folgende

$$(\mathfrak{C}.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{c}_2 & -\mathfrak{c}_3 & \mathfrak{c}_4 \\ -\mathfrak{c}_2 & \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{c}_4 & \mathfrak{c}_3 \\ \mathfrak{c}_3 & -\mathfrak{c}_4 & \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{c}_2 \\ \mathfrak{c}_4 & \mathfrak{c}_3 & \mathfrak{c}_2 & -\mathfrak{c}_1, \end{cases}$$

wo auch die $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{c}_3$, $\mathfrak{c}_4$ beliebige Parameter bedeuten. Dann liefert die Composition der Systeme (C.) und ($\mathfrak{C}$.), wie Herr *Caspary* *) gefunden hat, ein allgemeines orthogonales *Sechzehnersystem* mit den Coefficienten g_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$.

Werden hier den $\mathfrak{c}_\mu$ $(\mu = 1, 2, 3, 4)$ die in (9.) angegebenen Werthe und den $\mathfrak{c}_\mu$ die entsprechenden Werthe

$$(9^*.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{c}_1 = f_1\gamma_4 - f_2\gamma_3 - f_3\delta_2 + f_4\delta_1, \\ \mathfrak{c}_2 = -i(f_1\gamma_4 - f_2\gamma_3 + f_3\delta_2 - f_4\delta_1), \\ \mathfrak{c}_3 = -i(f_1\gamma_2 - f_2\gamma_1 - f_3\delta_4 + f_4\delta_3), \\ \mathfrak{c}_4 = f_1\gamma_2 - f_2\gamma_1 + f_3\delta_4 - f_4\delta_3 \end{cases}$$

beigelegt, wo die f_μ, γ_μ, δ_μ wieder beliebige Parameter bezeichnen, so erhält man die Coefficienten g_{ij} ausgedrückt durch die Parameter α_μ, β_μ, γ_μ, δ_μ; e_μ, f_μ. Entsprechend dem im ersten Abschnitt ausgeführten Gedankengange fasse ich hier, unter Benutzung der in (J_2.) und (J_2'.) gegebenen Darstellung, die Grössen e_μ, f_μ als die Parameter eines Orthogonalsystems mit den Coef-

*) Vgl. dieses Journal Bd. 94, S. 75 und System (J_2.) dieser Arbeit.

ficienten h_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ und den Differentialgrössen $p_h(e)$, $v_h(e)$; $p_h(f)$, $v_h(f)$ $(h = 1, 2, 3)$ und die Grössen α_μ, γ_μ; β_μ, δ_μ; β_μ, γ_μ; α_μ, δ_μ als die Parameter von vier Orthogonalsystemen mit den Coefficienten bezw. $\mathfrak{a}_{ij}$, $\mathfrak{b}_{ij}$, $\mathfrak{c}_{ij}$, $\mathfrak{d}_{ij}$ und den Differentialgrössen $p_h(\alpha)$, $v_h(\alpha)$; $p_h(\beta)$, $v_h(\beta)$; $p_h(\gamma)$, $v_h(\gamma)$; $p_h(\delta)$, $v_h(\delta)$ auf. Alsdann ergeben sich die Elemente des componirten Orthogonalsystems in folgender Form:

(J.)
$$\left\{\begin{aligned}
g_{11}+ig_{21} &= (h_{11}+ih_{21})\mathfrak{a}_{11}+(h_{12}+ih_{22})\mathfrak{a}_{12}+(h_{13}+ih_{23})\mathfrak{a}_{13}+(h_{14}+ih_{24})\mathfrak{a}_{14},\\
g_{12}+ig_{22} &= (h_{11}+ih_{21})\mathfrak{a}_{21}+(h_{12}+ih_{22})\mathfrak{a}_{22}+(h_{13}+ih_{23})\mathfrak{a}_{23}+(h_{14}+ih_{24})\mathfrak{a}_{24},\\
g_{13}+ig_{23} &= (h_{11}+ih_{21})\mathfrak{a}_{31}+(h_{12}+ih_{22})\mathfrak{a}_{32}+(h_{13}+ih_{23})\mathfrak{a}_{33}+(h_{14}+ih_{24})\mathfrak{a}_{34},\\
g_{14}+ig_{24} &= (h_{11}+ih_{21})\mathfrak{a}_{41}+(h_{12}+ih_{22})\mathfrak{a}_{42}+(h_{13}+ih_{23})\mathfrak{a}_{43}+(h_{14}+ih_{24})\mathfrak{a}_{44},\\
g_{11}-ig_{21} &= (h_{11}-ih_{21})\mathfrak{b}_{11}+(h_{12}-ih_{22})\mathfrak{b}_{12}+(h_{13}-ih_{23})\mathfrak{b}_{13}+(h_{14}-ih_{24})\mathfrak{b}_{14},\\
g_{12}-ig_{22} &= (h_{11}-ih_{21})\mathfrak{b}_{21}+(h_{12}-ih_{22})\mathfrak{b}_{22}+(h_{13}-ih_{23})\mathfrak{b}_{23}+(h_{14}-ih_{24})\mathfrak{b}_{24},\\
g_{13}-ig_{23} &= (h_{11}-ih_{21})\mathfrak{b}_{31}+(h_{12}-ih_{22})\mathfrak{b}_{32}+(h_{13}-ih_{23})\mathfrak{b}_{33}+(h_{14}-ih_{24})\mathfrak{b}_{34},\\
g_{14}-ig_{24} &= (h_{11}-ih_{21})\mathfrak{b}_{41}+(h_{12}-ih_{22})\mathfrak{b}_{42}+(h_{13}-ih_{23})\mathfrak{b}_{43}+(h_{14}-ih_{24})\mathfrak{b}_{44},\\
g_{31}+ig_{41} &= (h_{31}+ih_{41})\mathfrak{c}_{11}+(h_{32}+ih_{42})\mathfrak{c}_{12}+(h_{33}+ih_{43})\mathfrak{c}_{13}+(h_{34}+ih_{44})\mathfrak{c}_{14},\\
g_{32}+ig_{42} &= (h_{31}+ih_{41})\mathfrak{c}_{21}+(h_{32}+ih_{42})\mathfrak{c}_{22}+(h_{33}+ih_{43})\mathfrak{c}_{23}+(h_{34}+ih_{44})\mathfrak{c}_{24},\\
g_{33}+ig_{43} &= (h_{31}+ih_{41})\mathfrak{c}_{31}+(h_{32}+ih_{42})\mathfrak{c}_{32}+(h_{33}+ih_{43})\mathfrak{c}_{33}+(h_{34}+ih_{44})\mathfrak{c}_{34},\\
g_{34}+ig_{44} &= (h_{31}+ih_{41})\mathfrak{c}_{41}+(h_{32}+ih_{42})\mathfrak{c}_{42}+(h_{33}+ih_{43})\mathfrak{c}_{43}+(h_{34}+ih_{44})\mathfrak{c}_{44},\\
g_{31}-ig_{41} &= (h_{31}-ih_{41})\mathfrak{d}_{11}+(h_{32}-ih_{42})\mathfrak{d}_{12}+(h_{33}-ih_{43})\mathfrak{d}_{13}+(h_{34}-ih_{44})\mathfrak{d}_{14},\\
g_{32}-ig_{42} &= (h_{31}-ih_{41})\mathfrak{d}_{21}+(h_{32}-ih_{42})\mathfrak{d}_{22}+(h_{33}-ih_{43})\mathfrak{d}_{23}+(h_{34}-ih_{44})\mathfrak{d}_{24},\\
g_{33}-ig_{43} &= (h_{31}-ih_{41})\mathfrak{d}_{31}+(h_{32}-ih_{42})\mathfrak{d}_{32}+(h_{33}-ih_{43})\mathfrak{d}_{33}+(h_{34}-ih_{44})\mathfrak{d}_{34},\\
g_{34}-ig_{44} &= (h_{31}-ih_{41})\mathfrak{d}_{41}+(h_{32}-ih_{42})\mathfrak{d}_{42}+(h_{33}-ih_{43})\mathfrak{d}_{43}+(h_{34}-ih_{44})\mathfrak{d}_{44},
\end{aligned}\right.$$

(J'.)
$$\left\{\begin{aligned}
2p_{14} &= p_1(\mathfrak{C})+p_1(\mathfrak{c}), \quad 2v_{14} = v_1(\mathfrak{C})+v_1(\mathfrak{c}),\\
2p_{24} &= p_2(\mathfrak{C})+p_2(\mathfrak{c}), \quad 2v_{24} = v_2(\mathfrak{C})+v_2(\mathfrak{c}),\\
2p_{34} &= p_3(\mathfrak{C})+p_3(\mathfrak{c}), \quad 2v_{34} = v_3(\mathfrak{C})+v_3(\mathfrak{c}),\\
2p_{23} &= -p_1(\mathfrak{C})+p_1(\mathfrak{c}), \quad 2v_{23} = -v_1(\mathfrak{C})+v_1(\mathfrak{c}),\\
2p_{31} &= -p_2(\mathfrak{C})+p_2(\mathfrak{c}), \quad 2v_{31} = -v_2(\mathfrak{C})+v_2(\mathfrak{c}),\\
2p_{12} &= -p_3(\mathfrak{C})+p_3(\mathfrak{c}), \quad 2v_{12} = -v_3(\mathfrak{C})+v_3(\mathfrak{c}).
\end{aligned}\right.$$

Die Darstellung der Elemente $p_h(\mathfrak{C})$, $v_h(\mathfrak{C})$ ist in (J'.) gegeben; die der $p_h(\mathfrak{c})$, $v_h(\mathfrak{c})$ fliesst aus (J'.), wenn daselbst die e durch die f und die α, β durch die γ, δ ersetzt werden.

Auch das in (𝔍.) und (𝔍′.) aufgestellte System besitzt die schon an (J.) und (J′.) hervorgehobene Eigenschaft einer vollständigen Reciprocität erstens zwischen den Coefficienten g_{ij} einerseits und den Coefficienten h_{ij} andererseits; zweitens, wie aus ($\bar{J}'_x$.) zu ersehen ist, zwischen den Differentialgrössen $p_h(\mathfrak{c})$, $v_h(\mathfrak{c})$ bezw. $p_h(\mathfrak{c})$, $v_h(\mathfrak{c})$ einerseits und den Differentialgrössen $p_h(e)$, $v_h(e)$ bezw. $p_h(f)$, $v_h(f)$ andererseits.

IV.

Das neue orthogonale Sechzehnersystem für die Thetafunctionen von zwei Argumenten.

Um aus den Systemen (𝔍.) und (𝔍′.) Verknüpfungen der Thetafunctionen von zwei Argumenten mit den 28 Elementen eines Orthogonalsystems zu erlangen*), wähle ich für die vier Quadrupel von Parametern α_μ, β_μ, γ_μ, δ_μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) je dasselbe *Göpel*sche System von Thetafunctionen mit verschiedenen Argumenten:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= A_1\theta_5\,(w_1+x_1,\ w_2+x_2), & \beta_1 &= A_2\theta_5\,(w_1-x_1,\ w_2-x_2),\\
\alpha_2 &= A_1\theta_{01}(w_1+x_1,\ w_2+x_2), & \beta_2 &= A_2\theta_{01}(w_1-x_1,\ w_2-x_2),\\
\alpha_3 &= A_1\theta_4\,(w_1+x_1,\ w_2+x_2), & \beta_3 &= A_2\theta_4\,(w_1-x_1,\ w_2-x_2),\\
\alpha_4 &= A_1\theta_{23}(w_1+x_1,\ w_2+x_2), & \beta_4 &= A_2\theta_{23}(w_1-x_1,\ w_2-x_2),\\
\gamma_1 &= A_3\theta_5\,(y_1+z_1,\ y_2+z_2), & \delta_1 &= A_4\theta_5\,(y_1-z_1,\ y_2-z_2),\\
\gamma_2 &= A_3\theta_{01}(y_1+z_1,\ y_2+z_2), & \delta_2 &= A_4\theta_{01}(y_1-z_1,\ y_2-z_2),\\
\gamma_3 &= A_3\theta_4\,(y_1+z_1,\ y_2+z_2), & \delta_3 &= A_4\theta_4\,(y_1-z_1,\ y_2-z_2),\\
\gamma_4 &= A_3\theta_{23}(y_1+z_1,\ y_2+z_2), & \delta_4 &= A_4\theta_{23}(y_1-z_1,\ y_2-z_2),
\end{aligned}$$

wo w_ν, x_ν, y_ν, z_ν ($\nu = 1, 2$) beliebige Argumente, A_1, A_2, A_3, A_4 beliebige Functionen derselben bezeichnen. Alsdann liefert das System (𝔍.), unter Anwendung der Formeln (5.), die sechzehn Coefficienten eines Orthogonalsystems in folgender Form**):

---

*) Vgl. des Verfassers Arbeit: „Ueber ein allgemeines aus Thetafunctionen von zwei Argumenten gebildetes Orthogonalsystem und seine Verwendung in der Mechanik“. Sitzungsber. der Berl. Akad. 1896, S. 1023—1030.

**) Das in den Berl. Ber. S. 1026 mitgetheilte System geht aus dem hier gegebenen hervor, wenn man auf die Thetafunctionen eine *Henoch*sche Substitution anwendet.

$$
\text{(III.)}\quad
\begin{cases}
g_{11}+ig_{21} = (h_{11}+ih_{21})q_5 -i(h_{12}+ih_{22})q_{12}-i(h_{13}+ih_{23})q_{01}+(h_{14}+ih_{24})q_{02},\\
g_{12}+ig_{22} = -i(h_{11}+ih_{21})q_{34}-(h_{12}+ih_{22})q_0-(h_{13}+ih_{23})q_2-i(h_{14}+ih_{24})q_1,\\
g_{13}+ig_{23} = -i(h_{11}+ih_{21})q_4-(h_{12}+ih_{22})q_{03}-(h_{13}+ih_{23})q_{23}-i(h_{14}+ih_{24})q_{13},\\
g_{14}+ig_{24} = (h_{11}+ih_{21})q_3 -i(h_{12}+ih_{22})q_{04}-i(h_{13}+ih_{23})q_{24}+(h_{14}+ih_{24})q_{14},\\
g_{11}-ig_{21} = (h_{11}-ih_{21})r_5 -i(h_{12}-ih_{22})r_{12}-i(h_{13}-ih_{23})r_{01}+(h_{14}-ih_{24})r_{02},\\
g_{12}-ig_{22} = -i(h_{11}-ih_{21})r_{34}-(h_{12}-ih_{22})r_0-(h_{13}-ih_{23})r_2-i(h_{14}-ih_{24})r_1,\\
g_{13}-ig_{23} = -i(h_{11}-ih_{21})r_4-(h_{12}-ih_{22})r_{03}-(h_{13}-ih_{23})r_{23}-i(h_{14}-ih_{24})r_{13},\\
g_{14}-ig_{24} = (h_{11}-ih_{21})r_3 -i(h_{12}-ih_{22})r_{04}-i(h_{13}-ih_{23})r_{24}+(h_{14}-ih_{24})r_{14},\\
g_{31}+ig_{41} = (h_{31}+ih_{41})s_5 -i(h_{32}+ih_{42})s_{12}-i(h_{33}+ih_{43})s_{01}+(h_{34}+ih_{44})s_{02},\\
g_{32}+ig_{42} = -i(h_{31}+ih_{41})s_{34}-(h_{32}+ih_{42})s_0-(h_{33}+ih_{43})s_2-i(h_{34}+ih_{44})s_1,\\
g_{33}+ig_{43} = -i(h_{31}+ih_{41})s_4-(h_{32}+ih_{42})s_{03}-(h_{33}+ih_{43})s_{23}-i(h_{34}+ih_{44})s_{13},\\
g_{34}+ig_{44} = (h_{31}+ih_{41})s_3 -i(h_{32}+ih_{42})s_{04}-i(h_{33}+ih_{43})s_{24}+(h_{34}-ih_{44})s_{14},\\
g_{31}-ig_{41} = (h_{31}-ih_{41})t_5 -i(h_{32}-ih_{42})t_{12}-i(h_{33}-ih_{43})t_{01}+(h_{34}-ih_{44})t_{02},\\
g_{32}-ig_{42} = -i(h_{31}-ih_{41})t_{34}-(h_{32}-ih_{42})t_0-(h_{33}-ih_{43})t_2-i(h_{34}-ih_{44})t_1,\\
g_{33}-ig_{43} = -i(h_{31}-ih_{41})t_4-(h_{32}-ih_{42})t_{03}-(h_{33}-ih_{43})t_{23}-i(h_{34}-ih_{44})t_{13},\\
g_{34}-ig_{44} = (h_{31}-ih_{41})t_3 -i(h_{32}-ih_{42})t_{04}-i(h_{33}-ih_{43})t_{24}+(h_{34}-ih_{44})t_{14}.
\end{cases}
$$

Hierbei ist gesetzt*):

$$
\begin{aligned}
A_1A_3\vartheta_{\alpha\beta}(w_1', w_2')\,\vartheta_{\alpha\beta}(x_1', x_2') &= q_{\alpha\beta},\\
A_2A_4\vartheta_{\alpha\beta}(y_1', y_2')\,\vartheta_{\alpha\beta}(z_1', z_2') &= r_{\alpha\beta},\\
A_2A_3\vartheta_{\alpha\beta}(w_1'', w_2'')\,\vartheta_{\alpha\beta}(x_1'', x_2'') &= s_{\alpha\beta},\\
A_1A_4\vartheta_{\alpha\beta}(y_1'', y_2'')\,\vartheta_{\alpha\beta}(z_1'', z_2'') &= t_{\alpha\beta};
\end{aligned}
\qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3, 4)
$$

unter q_λ, r_λ, s_λ, t_λ $(\lambda = 0, 1, 2, 3, 4)$ sind die entsprechend gebildeten Thetaproducte mit *einem* Index zu verstehen, und die Argumente w_ν', x_ν', y_ν', z_ν'; w_ν'', x_ν'', y_ν'', z_ν'' sind, wie folgt, bestimmt:

$$
\begin{aligned}
2w_\nu' &= w_\nu+x_\nu+y_\nu+z_\nu, & 2w_\nu'' &= w_\nu+x_\nu+y_\nu-z_\nu,\\
2x_\nu' &= w_\nu+x_\nu-y_\nu-z_\nu, & 2x_\nu'' &= w_\nu+x_\nu-y_\nu+z_\nu,\\
2y_\nu' &= w_\nu-x_\nu+y_\nu-z_\nu, & 2y_\nu'' &= w_\nu-x_\nu+y_\nu+z_\nu,\\
2z_\nu' &= w_\nu-x_\nu-y_\nu+z_\nu, & 2z_\nu'' &= w_\nu-x_\nu-y_\nu-z_\nu.
\end{aligned}
\qquad (\nu = 1, 2)
$$

Die zu den Coefficienten des Systems (III.) gehörigen Differentialgrössen ergeben sich in einfacher Weise aus ($\mathfrak{F}'$.) in Verbindung mit (II.).

*) Die Grössen, welche hier $s_{\alpha\beta}$ bezw. $t_{\alpha\beta}$ genannt worden sind, heissen in dem a. a. O. mitgetheilten System $t_{\alpha\beta}$ bezw. $s_{\alpha\beta}$.

V.

Die partiellen Differentialgleichungen.

Die im ersten und dritten Abschnitt aufgestellten allgemeinen Orthogonalsysteme (J.), (J'.) und (ℑ.), (ℑ'.) besitzen eine charakteristische Eigenschaft, die sich in der Darstellung der Differentialgrössen v_1, v_2 ausspricht. Wie man aus den beiden letzten Gleichungen des Systems (J'.) ersieht, ist $A(v_1+iv_2)$ von β, und $A(v_1-iv_2)$ von α unabhängig. Diese Eigenschaft führt zu partiellen Differentialgleichungen für die Systeme (I.) und (III.).

Die letzte Formel des Systems (II.) lässt zunächst erkennen, dass die Differentialgrössen v_1, v_2 von zwei Variablenpaaren x_ν, y_ν $(\nu = 1, 2)$ abhängen und lineare Functionen von dx_ν, dy_ν sind. Daher darf *)

$$v_1 = \sum_{\nu=1}^{2} (v_1^{x_\nu} dx_\nu + v_1^{y_\nu} dy_\nu),$$

$$v_2 = \sum_{\nu=1}^{2} (v_2^{x_\nu} dx_\nu + v_2^{y_\nu} dy_\nu)$$

gesetzt werden. Aus der genannten Formel erschliesst man weiter, dass

$$v_1^{x_\nu} \pm i v_2^{x_\nu} = \pm (v_1^{y_\nu} \pm i v_2^{y_\nu}),$$

wo gleichzeitig das obere oder untere Zeichen zu wählen ist. Daraus folgt

$$(10.) \qquad \begin{cases} v_1^{x_\nu} = i v_2^{y_\nu}, \\ i v_2^{x_\nu} = v_1^{y_\nu}. \end{cases}$$

Diese beiden Relationen setzen sich auf einfache Weise in partielle Differentialgleichungen um. Unter Benutzung der von Herrn *Caspary* aufgestellten Differentialidentitäten *)

$$da_{3h} = -a_{1h} v_2 + a_{2h} v_1 \qquad (h = 1, 2, 3)$$

ergiebt sich

$$\frac{\partial a_{3h}}{\partial x_\nu} = i\left(a_{3l} \frac{\partial a_{3k}}{\partial y_\nu} - a_{3k} \frac{\partial a_{3l}}{\partial y_\nu}\right),$$

$$\frac{\partial a_{3h}}{\partial y_\nu} = i\left(a_{3l} \frac{\partial a_{3k}}{\partial x_\nu} - a_{3k} \frac{\partial a_{3l}}{\partial x_\nu}\right).$$

$$\begin{pmatrix} h, k, l = 1, 2, 3 \\ 2, 3, 1 \\ 3, 1, 2 \\ \nu = 1, 2 \end{pmatrix}$$

Das sind genau die Differentialgleichungen, welche Herr *F. Kötter* **) als charakteristisch für sein Orthogonalsystem aufgestellt hat.

---

*) Vgl. Journ. de Math. (4.) VI, p. 377.

**) Vgl. Berl. Sitzungsberichte 1895, S. 811.

Die Relationen (10.) lassen eine Verallgemeinerung auf das orthogonale Sechzehnersystem ($\mathfrak{J}$.), ($\mathfrak{J}'$.) zu. Gemäss ($\mathfrak{J}'$.) sind die Differentialgrössen v_{rs} mit den Differentialgrössen $v_h(\mathfrak{c})$ und $v_h(\mathfrak{c})$ linear verknüpft. Für diese gelten die Relationen (10.) in folgender Form:

$$v_1^{w_\nu} = iv_2^{x_\nu}, \quad v_1^{x_\nu} = iv_2^{w_\nu},$$
$$v_1^{y_\nu} = iv_2^{z_\nu}, \quad v_1^{z_\nu} = iv_2^{y_\nu}.$$

Hiernach findet man, mit Benutzung von ($\mathfrak{J}'$.), die Relationen:

$$(11.) \quad \begin{cases} v_{14}^{w_\nu} - v_{23}^{w_\nu} = i(v_{24}^{x_\nu} - v_{31}^{x_\nu}), \\ v_{14}^{x_\nu} - v_{23}^{x_\nu} = i(v_{24}^{w_\nu} - v_{31}^{w_\nu}), \\ v_{14}^{y_\nu} + v_{23}^{y_\nu} = i(v_{24}^{z_\nu} + v_{31}^{z_\nu}), \\ v_{14}^{z_\nu} + v_{23}^{z_\nu} = i(v_{24}^{y_\nu} + v_{31}^{y_\nu}). \end{cases}$$

Ueber die Differentialgleichung

$$\varphi(x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\psi(x)y\frac{dy}{dx}+\chi(x)y^2+\theta(x) = 0.$$

(Von Herrn *W. Heymann* in Chemnitz.)

In den Comptes Rendus*) zeigt Herr *Petrovitch*, dass die Gleichung

$$(1.)\qquad \varphi(x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\psi(x)y\frac{dy}{dx}+\chi(x)y^2+\theta(x) = 0$$

mittelst einer Substitution $y = \varrho z$ auf die Form

$$(2.)\qquad \left(\frac{dz}{dx}\right)^2+z^2 = f(x)$$

reducirt werden kann, und letztere führt er dann durch eine Reihe meist transcendenter Substitutionen auf die Normalform

$$(3.)\qquad \frac{dY}{dt} = F(t)+Y^3$$

zurück. Alle die hier auftretenden Gleichungen haben, wie auch Herr *Petrovitch* durch Literaturangaben weiter darlegt, in neuester Zeit Bedeutung erlangt. Es hängt dies besonders mit dem Umstand zusammen, dass die Differentialgleichung**)

$$(4.)\qquad (p_5\eta+p_4)\frac{d\eta}{d\xi}+p_3\eta^3+p_2\eta^2+p_1\eta+p_0 = 0,$$

von welcher eben (3.) als eine *Normalform* angesehen werden kann, bemerkenswerthe *invariantentheoretische* Eigenschaften besitzt.

Verfasser dieser Zeilen möchte nun darauf aufmerksam machen, dass Gleichung (1.) in beträchtlich einfacherer Weise in die Gleichung (4.) transformirt werden kann, so zwar, dass von (4.) nur der Sonderfall

$$(4^a.)\qquad \eta\frac{d\eta}{d\xi}+p_1\eta+p_0 = 0$$

*) Tome CXXII, No. 22, 1896. „Sur une équation différentielle du premier ordre.“

**) Man vergleiche die Abhandlung des Verf., dieses Journal Bd. 113. „Integrable Fälle der Differentialgleichung $(p_5y+p_4)\frac{dy}{dx}+p_3y^3+p_2y^2+p_1y+p_0 = 0$.“

zurückbleibt. Dann dürfte weiter interessiren, dass (4ª.) wieder von

$$\left(\frac{dv}{d\xi}\right)^2 + q_1 v + q_0 = 0 \tag{5.}$$

abhängt, so dass also eine Reduction der Gleichung (1.) auf (5.) möglich wird, was — nebenbei bemerkt — ziemlich versteckt liegt.

Wir werden die Vorgänge nur kurz skizziren, da die auszuführenden Rechnungen ganz elementar sind und keinerlei Interesse bieten; erwähnt sei nur, dass die vorkommenden Coefficienten p, q, r etc. immer als Functionen der unabhängigen Veränderlichen anzusehen sind.

Zunächst sei betreffs der Gleichung (4.) daran erinnert, dass sie vermöge

$$p_5\eta + p_4 = \eta_1$$

in eine Gleichung derselben Form, jedoch mit $p_4 = 0$ verwandelt werden kann, sodann, dass letztere für

$$\eta_1 = \frac{1}{\eta_2}$$

abermals die Form (4.) erlangt, jetzt jedoch mit $p_5 = 0$. Setzt man in eben diese Gleichung

$$\eta_2 = \lambda\zeta + \mu,$$

so kann man mittelst der disponiblen Functionen λ und μ jene Coefficienten annulliren, welche dem p_2 und p_1 entsprechen, und also die Normalform

$$\frac{d\zeta}{d\xi} + r_3\eta^3 + r_0 = 0 \tag{6.}$$

erreichen, welche nach Einführung der Quadratur

$$\int r_i d\xi = t \qquad (i = 3 \text{ oder } 0)$$

und Elimination von ξ nur noch von *einem* Coefficienten abhängt.

Verschwindet in Gleichung (4.) der Coefficient p_3, so wird die eben besprochene Reduction in keiner Weise gestört; es existirt indessen dann noch eine andere bemerkenswerthe Transformation. Für

$$p_5\eta + p_4 = \eta_1$$

erhält man nämlich zunächst eine Gleichung von der Form (4.), jedoch mit $p_4 = 0$ und — vorausgesetztermassen — mit $p_3 = 0$. Die Substitution

$$\eta_1 = \lambda\zeta$$

bewirkt dann, nach geeigneter Wahl von λ, dass auch der dem p_2 ent-

sprechende Coefficient verschwindet, und es verbleibt eine Normalform

$$\zeta\frac{d\zeta}{d\xi}+s_1\zeta+s_0 = 0, \tag{7.}$$

deren Coefficienten nach Einführung einer einfachen Quadratur ebenfalls auf einen *einzigen* veränderlichen Parameter zurückkommen.

Es fragt sich, ob ausser $p_3=0$ noch andere Fälle möglich sind, in welchen die Gleichung (4.) auf die besondere Form (7.) gebracht werden kann. Hier ist zunächst der Fall $p_0=0$ zu nennen, denn die Substitution

$$\eta = \frac{1}{\eta_2}$$

würde in Gleichung (4.) sofort eine Vertauschung der Coefficienten p_3 und p_0 unter sich veranlassen. Die erwähnte Reduction ist weiterhin möglich, falls ein *particuläres* Integral η_0 der Gleichung (4.) von vornherein bekannt ist. Denn setzt man

$$\eta = \eta_0+w,$$

so erscheint vermöge der Structur der Gleichung (4.) eine andere der gleichen Form, deren Absolutglied infolge der Definition von η_0 zu unterdrücken ist, und also läuft dieser Fall auf $p_0=0$ hinaus.

Wir kommen nun zu der in der Ueberschrift angezeigten Gleichung. Benutzt man die Substitution

$$y = \varrho z,$$

so geht (1.) über in

$$\varrho^2\varphi\Big(\frac{dz}{dx}\Big)^2+\varrho\Big(2\varphi\frac{d\varrho}{dx}+\varrho\psi\Big)z\frac{dz}{dx}+\Big(\varphi\Big(\frac{d\varrho}{dx}\Big)^2+\varrho\psi\frac{d\varrho}{dx}+\varrho^2\chi\Big)z^2+\theta=0, \tag{8.}$$

und es wird ersichtlich, dass entweder der Coefficient von zz' oder jener von z^2 durch blosse Quadraturen zum Verschwinden gebracht werden kann. Die erstere Bestimmung hat Herr *Petrovitch* getroffen, aber auch die andere gewinnt Bedeutung, wie sogleich gezeigt werden soll.

Dividirt man Gleichung (1.) durch θ, oder setzt man, was einfacher und nicht beschränkend ist, $\theta=1$, so ergiebt eine einmalige Differentiation jener Gleichung nach x

$$2\varphi y'y''+\psi yy''+(\varphi'+\psi)y'^2+(\psi'+2\chi)yy'+\chi'y^2 = 0, \tag{9.}$$

und für

$$\frac{y'}{y}=v, \quad \frac{y''}{y}=v'+v^2 \quad \Big(v'=\frac{dv}{dx}\Big)$$

entsteht

$$(10.) \quad (2\varphi v+\psi)v'+2\varphi v^3+(\varphi'+2\psi)v^2+(\psi'+2\chi)v+\chi' = 0.$$

Man bemerkt, dass Gleichung (10.) zur Klasse der Gleichung (4.) gehört, und dass die vermittelnde Substitution zwischen (1.) und (10.) *transcendent* ist und einfach

$$y = e^{\int v\,dx}$$

lautet. Da wir uns von vornherein versichert haben, dass der Coefficient von y^2 in (1.) annullirt werden kann, so dürfen wir $\chi = 0$ annehmen; dann aber liegt unter (10.) eine Gleichung (4.) mit $p_0 = 0$ vor, und folglich ist (10.) in die besondere Normalform (7.) reducirbar. Für diesen Zweck wäre die zusammengesetzte Substitution

$$y = \varrho e^{\int v\,dx}$$

zu wählen. Indessen kann die Gleichung (10.) und mit ihr (1.) auch in die Normalform (6.) übergeführt werden, wie es Herr *Petrovitch* gethan hat.

Die obigen Exponentialgrössen sind, was nicht besonders angedeutet wurde, mit einem willkürlichen constanten Factor behaftet, der sich aber sogleich bestimmt, wenn die fertigen Ausdrücke für y in die Gleichung (1.) eingetragen werden. So ergiebt sich beispielsweise in der angezeigten Weise für

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+ay^2 = b$$

das Integral

$$y = c\sin(x\sqrt{a}+k),$$

und hier bleibt k durchaus willkürlich, während c nach dem Eintragen den Werth $c = \sqrt{\frac{b}{a}}$ erlangt.

Wie man sieht, ist durch die fünfgliedrige Gleichung (9.) die sechsgliedrige (4.) noch nicht ganz erschöpft. In der That, es existirt eine allgemeinere, nämlich

$$(11.) \quad P_0y'^3+P_1yy'y''+P_2y^2y''+P_3yy'^2+P_4y^2y'+P_5y^3 = 0,$$

welche für $P_0 = 0$ und nach Ausscheidung von y mit (9.) zusammenfällt, dagegen für $P_0 \gtrless 0$ genau den Umfang der Gleichung (4.) besitzt. Die

Substitutionen

$$\frac{y'}{y} = v, \quad \frac{y''}{y} = v' + v^2$$

bewirken wie früher eine Reduction der Gleichung (11.) auf die Form

$$(12.) \quad (P_1 v + P_2)v' + (P_0 + P_1)v^3 + (P_2 + P_3)v^2 + P_4 v + P_5 = 0,$$

welche genau wie (4.) sechs völlig *beliebige* Coefficienten besitzt. Für (11.) gelten daher in entsprechender Weise alle die Transformationen, welche wir für (4.) angaben, also insbesondere die Reduction auf eine dreigliedrige Form mit nur *einem* von x abhängigen Coefficienten, wie

$$P_0 y'^3 + P_1 y y' y'' + P_5 y^3 = 0$$

oder einfacher

$$(13.) \quad y y' y'' + f(x) y'^3 + y^3 = 0.$$

Betrachten wir endlich noch die *erweiterte* Form der Gleichung (1.)

$$(14.) \quad \varphi(x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \psi(x) y \frac{dy}{dx} + \chi(x) y^2 + \vartheta(x) \frac{dy}{dx} + \omega(x) y + \theta(x) = 0$$

und fragen, ob sonstige Specialfälle derselben von Gleichung (4.) abhängen.

Es mögen ϑ und θ verschwinden, und man setze

$$y = z^2,$$

dann entsteht

$$4\varphi\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + 2\psi z \frac{dz}{dx} + \chi z^2 + \omega = 0,$$

also eine Form wie (1.).

Weiter erwähnen wir den merkwürdigen Fall*), wo ψ, χ und ϑ verschwinden und also eine Gleichung

$$(15.) \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - X_1 y + X_0 = 0$$

vorliegt. Mittelst Variation der Constanten erschliesst man leicht, dass (15.) nach Einführung der Substitution

$$y = z^2 + \frac{X_0}{X_1}$$

in das Product

$$\left[2z\frac{dz}{dx} + z\sqrt{X_1} + \left(\frac{X_0}{X_1}\right)'\right]\left[2z\frac{dz}{dx} - z\sqrt{X_1} + \left(\frac{X_0}{X_1}\right)'\right] = 0$$

---

*) Vergl. die „Studien“ des Verf. — Teubner, 1891. — S. 348.

zerfällt. Hier ist also die Reduction eines Sonderfalls der Gleichung (14.) in die Normalform (7.) in wesentlich anderer Art vollzogen als früher, und da auf eben jene Normalform (7.) auch Gleichung (1.) gebracht werden kann, so existirt eine Transformation der Gleichung (1.) in die Gleichung (15.). Man könnte vermuthen, dass diese Reduction ganz direct und nur durch *algebraische* Substitutionen ausgeführt werden könne, weil (1.) und (15.) derselben Klasse von Gleichungen angehören. Allein die Substitutionen, welche man der Reihe nach leicht anschreiben kann, ziehen sich keineswegs wesentlich zusammen, insbesondere lässt sich die früher erwähnte Exponentialsubstitution *nicht* vermeiden, woraus man schliessen muss, dass irgend eine Vereinfachung des Vorganges unmöglich sein wird.

Francesco Brioschi †.

Am 13. December 1897 verschied in Mailand der Präsident der R. Accademia dei Lincei, Director des R. Istituto tecnico Superiore in Mailand, Herausgeber der Annali di Matematica pura ed applicata, *Francesco Brioschi*. Die mathematische Welt vereint sich mit dem Vaterlande des Dahingeschiedenen in der tiefen Trauer um den schweren Verlust, welcher die Wissenschaft betroffen. An anderen Orten haben hervorragende Gelehrte die grossen Verdienste, welche *Brioschi* durch seine eigenen ausgezeichneten Arbeiten und durch die Förderung der mathematischen Studien in Italien sich erworben hat, in gebührender Weise gewürdigt. Wir haben aber die Pflicht, an dieser Stelle des langjährigen Mitarbeiters an unserem Journale (seine Aufsätze beginnen im 50. Bande desselben) in dankbarer Pietät zu gedenken.

Die Redaction.

Preisaufgabe der Fürstlich *Jablonowski*schen Gesellschaft zu Leipzig für das Jahr 1901.

Für das Jahr 1901 schlägt die Gesellschaft als Preisaufgabe vor:

die Theorie der quadratischen Differentialformen in einem wesentlichen Punkte zu vervollkommnen.

Die Theorie der quadratischen Differentialformen, welche von ***Riemann*** angebahnt und namentlich von ***Christoffel*** und ***Lipschitz*** weitergeführt worden ist, hat durch neuere Untersuchungen in der Geometrie, der Dynamik und der Theorie der Transformationsgruppen eine erhebliche Bedeutung gewonnen, und jeder Fortschritt in jener Theorie würde auch hier einen Gewinn bedeuten. Indem die Gesellschaft wünscht, dass die Theorie der quadratischen Differentialformen in einem wesentlichen Punkte vervollständigt werde, lenkt sie die Aufmerksamkeit der Bewerber besonders auf die durch ***Lie***s Forschungen angeregte Frage nach der Natur und den Eigenschaften der Formen, welche continuirliche Gruppen von Transformationen gestatten. Für den Specialfall $n = 3$ hat neuerdings ***Bianchi****) werthvolle Beiträge geliefert: es ist zu hoffen, dass die Darstellung der Kriterien für die Zugehörigkeit einer gegebenen Form zu einem bestimmten Typus in invarianter Form gelingen, und dass das Studium der in den betreffenden Räumen herrschenden Geometrien sich als lohnend erweisen werde.

Preis 1000 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besonderen Falle ausdrücklich den Gebrauch einer anderen Sprache gestattet, in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache zu verfassen, müssen einseitig geschrieben und paginirt, ferner mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Umschlage begleitet sein, welcher auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Jede Bewerbungsschrift muss auf dem Titelblatte die Angabe einer Adresse enthalten, an welche die Arbeit für den Fall, dass sie nicht preiswürdig befunden wird, zurückzusenden ist. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. November des angegebenen Jahres, und die Zusendung ist an den derz. Sekretär der Gesellschaft (für das Jahr 1898 Professor Dr. August Leskien, Stephanstrasse Nr. 10) zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht. Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft.

---

*) Memorie della Società Italiana delle Scienze, Ser. III^a T. XI, 1897.

Ueber *Abel*sche Gruppen.

(Von Herrn *Lothar Heffter* in Bonn.)

Hat man eine *Abel*sche oder commutative Gruppe A von n Elementen, so lassen sich bekanntlich*) gewisse Elemente

$$g_1, \quad g_2, \quad \ldots, \quad g_\nu$$

so auswählen, dass sie bezw. zu den Zahlen

$$n_1, \quad n_2, \quad \ldots, \quad n_\nu$$

gehören (d. h. dass erst die Potenzen $g_1^{n_1}$, $g_2^{n_2}$, ..., $g_\nu^{n_\nu}$ äquivalent der Einheit werden) und dass jedes Element der Gruppe einmal und nur einmal in der Form

$$g_1^{a_1} \cdot g_2^{a_2} \cdots g_\nu^{a_\nu} \qquad (0 \leqq a_k < n_k)$$

darstellbar ist, wobei

$$(1.) \qquad n_1 . n_2 \ldots n_\nu = n$$

und jede der Zahlen n_k durch die folgende n_{k+1} theilbar ist. n_1 ist das kleinste gemeinsame Vielfache und zugleich die grösste aller Zahlen, zu denen überhaupt Elemente der Gruppe A gehören. $g_1, g_2, \ldots, g_\nu$ bilden eine ***Basis der Gruppe.*** Wir wollen eine solche Basis, bei der jedes n_k durch n_{k+1} theilbar ist, insbesondere eine *reducirte Basis***) nennen. Der Name ist berechtigt; denn, wie man leicht sieht, lässt sich dann, mit n_1 anfangend, keine der Zahlen n_k durch eine grössere ersetzen und mithin keines der Elemente der Basis zum Wegfall bringen. Die Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ werden darum auch die ***Invarianten der Gruppe*** genannt.

*) Vgl. ***Schering,*** Abhandlungen der Ges. der Wiss. zu Göttingen Bd. 14 (1868). ***Kronecker,*** Berliner Monatsberichte, 1. Dez. 1870. ***Frobenius*** und ***Stickelberger,*** dieses Journal Bd. 86 (1878). ***Weber,*** u. a. Lehrbuch der Algebra Bd. II (1896) § 9 ff. ***Bachmann,*** Zahlentheorie Bd. I (1892) S. 80 ff.

) In ähnlichem Sinne ist diese Bezeichnung wohl zuerst von Herrn ***Schlesinger* (Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen Bd. II (1896) S. 6) gebraucht worden.

Wir wollen — beiläufig — zwei extreme specielle Fälle hervorheben:

a) Jedes n_k sei der *grösste* gemeinsame Divisor von

$$n_{k-1} \quad \text{und} \quad \frac{n}{n_1 n_2 \ldots n_{k-1}}.$$

Dann haben wir eine ***Gruppe mit möglichst kleiner reducirter Basis bei gegebenen n und*** n_1.

b) Jedes n_k enthalte jeden Primfactor des grössten gemeinsamen Divisors von n_{k-1} und $\frac{n}{n_1 n_2 \ldots n_{k-1}}$ nur in der *ersten* Potenz. Dann haben wir eine ***Gruppe mit möglichst grosser reducirter Basis bei gegebenen n und*** n_1.

Beide Gruppen sind also durch die Zahlen n und n_1 allein schon wesentlich bestimmt.

Als nächstliegendes Beispiel einer *Abel*schen Gruppe hat schon Herr *Weber**) die Gesammtheit der Zahlen herangezogen, die positiv, kleiner als eine beliebige ganze Zahl m und relativ prim zu ihr sind, wenn die durch Multiplication entstehenden Zahlen immer mod.m genommen werden. Dann ist

$$n = \varphi(m), \tag{2.}$$

und die Elemente einer *reducirten* Basis

$$g_1, \quad g_2, \quad \ldots, \quad g_\nu$$

werden wir in diesem Falle consequenter Weise ein ***System von primitiven Wurzeln für den Modul m*** nennen. Ein solches System von primitiven Wurzeln ist natürlich aus der von Herrn *Weber* (a. a. O. S. 61) aufgestellten Basis $A, B, C_1, C_2, \ldots$ nach dem bekannten, an den oben citirten Orten dargestellten Verfahren leicht herzuleiten. Da die Elemente dieser Basis, wenn

$$m = 2^\lambda . q_1^{k_1} . q_2^{k_2} \ldots,$$

bezw. zu den Exponenten

$$2, \quad \tfrac{1}{2}\varphi(2^\lambda), \quad \varphi(q_1^{k_1}), \quad \varphi(q_2^{k_2}), \quad \ldots$$

gehören, so gehört z. B. $A.B.C_1.C_2\ldots$ zu dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen n_1 aller jener Exponenten und kann daher als eine erste primitive Wurzel G_1 gewählt werden u. s. w.

---

*) a. a. O. § 14, 15, 16.

Da übrigens n_1 im allgemeinen grösser ist als jeder einzelne der Eponenten, zu denen die Elemente A, B, C_1, C_2, ... gehören, so sieht man, dass diese *Weber*sche Basis im allgemeinen noch keine *reducirte* sein wird.

Jedes der n Elemente einer *Abel*schen Gruppe gehört nach den oben historisch angeführten Sätzen entweder zu n_1 oder zu einem Divisor d von n_1. Die Anzahl der zu d gehörigen Elemente werde, wie üblich, mit $\psi(d)$ bezeichnet. Während aber für den Specialfall einer *cyklischen* Gruppe — d. h. in dem zahlentheoretischen Beispiel für den Fall, dass eine *einzige* primitive Wurzel mod.m existirt, — die Identität

$$\psi(d) = \varphi(d) \tag{3.}$$

besteht, gilt diese für beliebige *Abel*sche Gruppen oder für beliebig zusammengesetzte Moduln m bekanntlich nicht mehr. Deshalb ist die Frage nach der *allgemeinen Beziehung zwischen den beiden arithmetischen Functionen* $\psi(d)$ *und* $\varphi(d)$ berechtigt*).

Wenn d ein beliebiger Divisor von n_1 ist, so gehört das Element

$$g_1^{\alpha_1} \cdot g_2^{\alpha_2} \cdots g_\nu^{\alpha_\nu}$$

der Gruppe A dann und nur dann zu d, wenn erst seine $d$te Potenz äquivalent der Einheit ist. Das tritt aber wiederum dann und nur dann ein, wenn die Congruenzen

$$\begin{cases} \alpha_1 d \equiv 0 \mod n_1, \\ \alpha_2 d \equiv 0 \mod n_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \alpha_\nu d \equiv 0 \mod n_\nu \end{cases} \tag{4.}$$

bestehen und das kleinste gemeinsame Vielfache der Exponenten, zu denen $g_1^{\alpha_1}$, $g_2^{\alpha_2}$, ..., $g_\nu^{\alpha_\nu}$ gehören, gleich d ist.

Da nun nach (4.) $g_1^{\alpha_1}$, $g_2^{\alpha_2}$, ..., $g_\nu^{\alpha_\nu}$ entweder zu d oder zu Theilern von d gehören, so muss, wenn d die Potenz einer Primzahl ist, mindestens eines jener Elemente $g_1^{\alpha_1}$, ..., $g_\nu^{\alpha_\nu}$ zu d selbst gehören; dann und nur dann gehört auch ihr Product zu d. ***Wir wollen deshalb vorerst annehmen, dass*** d ***die Potenz einer Primzahl sei.***

---

*) Wie sich ***nachträglich*** im Gespräch herausstellte, ist die Frage nach dem allgemeinen Werth von $\psi(d)$ merkwürdiger Weise völlig gleichzeitig, aber auch völlig unabhängig nicht nur von mir, sondern auch von Herrn *Netto* (in dem bald erscheinenden II. Bande seiner „Vorlesungen über Algebra“) behandelt worden.

Aus (4.) folgt

$$(5.)\qquad \begin{cases} \alpha_1 \equiv 0 \mod \frac{n_1}{\delta_1}, \\ \alpha_2 \equiv 0 \mod \frac{n_2}{\delta_2}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \alpha_\nu \equiv 0 \mod \frac{n_\nu}{\delta_\nu}, \end{cases}$$

wo δ_k der grösste gemeinsame Divisor von d und n_k, insbesondere also $\delta_1 = d$ ist; d. h. α_k hat die δ_k Werthe

$$(6.)\qquad \alpha_k = 0,\quad \frac{n_k}{\delta_k},\quad 2\frac{n_k}{\delta_k},\quad \ldots,\quad (\delta_k - 1)\frac{n_k}{\delta_k}. \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu)$$

Es braucht also nur abgezählt zu werden, wie viele Combinationen von je ν Potenzen, je eine entnommen aus jeder der Zeilen

$$(7.)\qquad \begin{cases} g_1^0,\ g_1^{\frac{n_1}{\delta_1}},\ \ldots,\ g_1^{(\delta_1-1)\frac{n_1}{\delta_1}}, \\ g_2^0,\ g_2^{\frac{n_2}{\delta_2}},\ \ldots,\ g_2^{(\delta_2-1)\frac{n_2}{\delta_2}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_\nu^0,\ g_\nu^{\frac{n_\nu}{\delta_\nu}},\ \ldots,\ g_\nu^{(\delta_\nu-1)\frac{n_\nu}{\delta_\nu}}, \end{cases}$$

sich bilden lassen, sodass mindestens eine der ν Potenzen in jeder Combination thatsächlich erst zu d gehört.

Zu diesem Ende theilen wir die Primpotenz-Divisoren d von n_1 in gewisse Kategorien:

d_1 sei ein Divisor I. Stufe von n_1, d. h. ein solcher, der schon nicht mehr in n_2 enthalten ist,

d_2 ein Divisor II. Stufe von n_1, d. h. ein solcher, der auch in n_2, aber nicht mehr in n_3 enthalten ist, u. s. w.

d_α sei ein Divisor αter Stufe von n_1, der in $n_1, n_2, \ldots, n_\alpha$, aber nicht mehr in $n_{\alpha+1}$ enthalten ist.

Entsprechend d_α geben wir auch den δ noch einen weiteren, vorangesetzten Index α, sodass

$\delta_{\alpha k}$ der grösste gemeinsame Divisor von d_α und n_k

ist, und bemerken, dass auf Grund dieser Definition

$$(8.)\qquad \delta_{\alpha 1} = \delta_{\alpha 2} = \cdots = \delta_{\alpha\alpha} = d_\alpha,$$

aber

$$\delta_{\alpha,\alpha+1},\quad \delta_{\alpha,\alpha+2},\quad \ldots,\quad \delta_{\alpha\nu} < d_\alpha \tag{9.}$$

werden.

Für $d = d_\alpha$ wird also aus (7.)

$$\left\{\begin{array}{llll} g_1^0, & g_1^{\frac{n_1}{d_\alpha}}, & \ldots, & g_1^{(d_\alpha-1)\frac{n_1}{d_\alpha}}, \\ \ldots\ldots\ldots\

oder

$$(A.) \qquad \psi(d_\alpha) = [d_\alpha^\alpha - (d_\alpha - \varphi(d_\alpha))^\alpha]\delta_{\alpha,\alpha+1}\ldots\delta_{\alpha\nu},$$

wo wir absichtlich für $\varphi(d_\alpha)$ seinen Werth nicht einsetzen, (indem etwa $d_\alpha = p^k$ gesetzt würde), um die Beziehung zwischen ψ und φ hervortreten zu lassen.

Da nun jeder beliebige Divisor D von n_1 in Primpotenzen zerlegt werden kann und da überdies die Richtigkeit der Formel

$$(12.) \qquad \psi(a.b) = \psi(a).\psi(b),$$

wenn a und b relativ prim sind, leicht zu erweisen ist*), so ist mit dem in Formel (A.) behandelten Specialfall zugleich die allgemeine Frage nach dem Werthe von $\psi(D)$ erledigt.

Specialisirt man Formel (A.) für einen Primpotenzdivisor νter Stufe d_ν, so ergiebt sich

$$(B.) \qquad \psi(d_\nu) = d_\nu^\nu - (d_\nu - \varphi(d_\nu))^\nu.$$

Andererseits für einen Primpotenzdivisor I. Stufe $d = d_1$ wird

$$(C.) \qquad \psi(d_1) = \varphi(d_1)\delta_{12}.\delta_{13}\ldots\delta_{1\nu}.$$

Ist ferner die *Abel*sche Gruppe ***cyklisch,*** d. h. existirt in dem Beispiel eine primitive Wurzel mod.m im gewöhnlichen Sinne, so dass $n_2 = n_3 = \cdots n_\nu = 1$ werden, so folgt aus (A.) und (12.) und, da auch stets $\varphi(a.b) = \varphi(a).\varphi(b)$ ist, für *jeden* Divisor d von $n_1 = n = \varphi(m)$:

$$(D.) \qquad \psi(d) = \varphi(d).$$

Damit ist bestätigt, dass diese bekannte Formel in der allgemeinen (A.) in Verbindung mit (12.) enthalten ist.

---

*) Ich unterdrücke diese Ausführung und verweise deshalb auf die Darstellung von Herrn *Netto* (a. a. O.); ich würde mich ihr, die mir inzwischen im Manuscript vorgelegen hat, in diesem Punkte vollständig anschliessen und daher auf den Anspruch der Unabhängigkeit verzichten müssen.

Ueber das Verhalten der Integrale von Differentialgleichungen bei der Annäherung der Veränderlichen an eine Unbestimmtheitsstelle.

(Von Herrn *J. Horn* in Charlottenburg.)

Dritter Theil.

Die Differentialgleichung

$$x^{k+1}\frac{dy}{dx} = G(x, y), \tag{1.}$$

worin

$$G(x, y) = ay + \Sigma A_{\lambda\mu} x^\lambda y^\mu \qquad (\lambda = 1,\ \mu = 0;\ \lambda+\mu > 1) \tag{2.}$$

eine in der Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ reguläre Function darstellt und k eine ganze positive Zahl (unter Ausschluss des Werthes $k = 0$) bedeutet, wird durch eine Potenzreihe

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + \cdots \tag{3.}$$

formell befriedigt, welche im allgemeinen für keinen Werth von x ausser $x = 0$ convergirt*). Es soll im Folgenden gezeigt werden, wie sich vermittelst der Reihe (3.) das Verhalten derjenigen Integrale y von (1.) darstellen lässt, welche sich dem Grenzwerthe Null nähern, wenn die Veränderliche x auf einem bestimmten Wege in die singuläre Stelle der Unbestimmtheit**) $x = 0$ geht (§§ 1—4). Daran schliessen sich (§ 5) einige weitergehende Betrachtungen über das Verhalten der erwähnten Integrale.

Ferner wird (§ 6 und § 7) unter der Voraussetzung, dass in (1.)

$$G(x, y) = ay + y\mathfrak{P}(x, y);\quad \mathfrak{P}(0, 0) = 0, \tag{4.}$$

*) In der berühmten Abhandlung von *Briot* und *Bouquet* (Journ. de l'Éc. Pol. cah. 36), worin die Differentialgleichung (1.) als einer der noch unerledigten Typen von Differentialgleichungen erster Ordnung auftritt, wird nur an einer gewissen linearen Differentialgleichung gezeigt, dass die Reihe (3.) divergent ist, falls die Coefficienten der Gleichung nicht eine bestimmte Bedingung erfüllen.

**) *Fuchs,* Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1886.

ist, y in eine Reihe entwickelt, welche zwar nicht in der ganzen Umgebung von $x=0$ convergent ist, wohl aber z. B. für hinreichend kleine reelle positive Werthe von x, wenn der reelle Theil von a positiv ist. In Verbindung mit dieser analytischen Darstellung von y steht eine asymptotische Darstellung in Form einer im allgemeinen divergenten Reihe, welche nach Potenzen der Veränderlichen x und eines Exponentialausdrucks fortschreitet*).

§ 1.

Wir nehmen bis auf weiteres an, die Veränderliche x gehe als reelle positive Grösse zur Grenze Null (was wir durch $\lim x = +0$ bezeichnen), und beweisen den folgenden Satz:

Je nachdem der reelle Theil von a positiv oder negativ ist, giebt es unendlich viele Integrale oder nur ein einziges Integral der Differentialgleichung (1.), *welches für* $\lim x = +0$ *den Grenzwerth Null besitzt. Im Falle* $\Re(a) > 0$ *sind zwei positive Grössen* x_0 *und* η_0 *so vorhanden, dass jedes Integral* y, *dessen absoluter Betrag für* $x = x_0$ *kleiner als* η_0 *ist, für* $\lim x = +0$ *verschwindet.*

Zunächst wird angenommen, die Potenzreihe $G(x, y)$ enthalte kein von y freies Glied, es sei also

$$G(x, y) = y(a+\mathfrak{P}(x, y)), \tag{4.}$$

wo $\mathfrak{P}(x, y)$ eine für $x=0$, $y=0$ verschwindende Potenzreihe darstellt. Dann ist

$$x^{k+1}\frac{d\log y}{dx} = a+\mathfrak{P}(x, y),$$

$$x^{k+1}\frac{d\log|y|}{dx} = \Re(a)+\Re(\mathfrak{P}(x, y));$$

wegen $\mathfrak{P}(0, 0) = 0$ sind, wenn δ eine beliebig kleine positive Grösse bedeutet, positive Grössen x_0 und η_0 so vorhanden, dass, für $0 < x \leqq x_0$, $\frac{d\log|y|}{dx}$ zwischen $\frac{\Re(a)-\delta}{x^{k+1}}$ und $\frac{\Re(a)+\delta}{x^{k+1}}$ liegt, wenn nur $0 < |y| < \eta_0$ ist. Ist $\Re(a) < 0$, so nimmt, wenn man vom Integral $y=0$ absieht, für jedes Integral $\log|y|$ mit abnehmendem x zu, so lange $|y| < \eta_0$ ist; es kann also nicht $\lim y = 0$

*) Die vorliegenden Untersuchungen sollen in einer späteren Arbeit weitergeführt werden.

sein. Im Falle $\Re(a) > 0$ nimmt dagegen $\log|y|$ mit abnehmendem x fortwährend ab, sobald $|y| < \eta_0$ ist. Es ist demnach ein Grenzwerth von $\log|y|$ für $\lim x = +0$ vorhanden, falls für $x = x_0$ $|y| < \eta_0$ war. Dieser Grenzwerth kann aber nur $-\infty$ sein. Denn aus

$$\frac{d\log|y|}{dx} > \frac{\Re(a)-\delta}{x^{k+1}} \quad (0 < x \leqq x_0)$$

folgt, wenn für $x = x_0$ $|y| < \eta_0$ ist und $0 < x < x_0$ angenommen wird,

$$\log|y_0| - \log|y| > (\Re(a)-\delta) \int_x^{x_0} \frac{dx}{x^{k+1}}$$

oder

$$\log|y| - \log|y_0| < -\frac{\Re(a)-\delta}{k}\left(\frac{1}{x^k} - \frac{1}{x_0^k}\right),$$

woraus hervorgeht:

$$\lim_{x=+0} \log|y| = -\infty, \quad \lim_{x=+0} y = 0 \text{ *)}.$$

Besitzt $G(x, y)$ die allgemeine Form (2.) und wird

$$\mathfrak{G}(x, y) = \Sigma A_{\lambda,\mu} x^\lambda y^\mu \qquad (\lambda = 1, \mu = 0;\ \lambda+\mu > 1)$$

gesetzt, so ist

$$x^{k+1} \frac{d\log|y|}{dx} = \Re(a) + \Re\left(\frac{\mathfrak{G}(x, y)}{y}\right).$$

Wir nehmen an, dass

$$|A_{\lambda\mu}| \leqq g$$

ist, wo g eine gewisse positive Grösse bedeutet, dass also die Reihe $\mathfrak{G}(x, y)$ für $|x| < 1$, $|y| < 1$ convergirt, was sich durch eine Transformation $x = \alpha x'$, $y = \beta y'$ mit positiven α, β stets erreichen lässt. Wir haben dann für $0 \leqq x < 1$, $|y| < 1$:

$$|\mathfrak{G}(x, y)| \leqq \Sigma g x^\lambda |y|^\mu \qquad (\lambda = 1, \mu = 0;\ \lambda+\mu > 1)$$

$$\leqq g\left(\frac{1}{1-x-|y|} - 1 - |y|\right) = g\left(\frac{x+|y|}{1-x-|y|} - |y|\right);$$

wenn wir also, unter δ eine beliebig kleine positive Grösse verstehend,

$$q < \frac{|\Re(a)|}{g} - \delta$$

*) Die bisherigen Betrachtungen bleiben ungeändert, wenn in (4.) an Stelle von $\mathfrak{P}(x, y)$ eine für jedes den Bedingungen $0 < x \leqq x_0$, $|y| \leqq \eta_0$ genügende Werthepaar x, y reguläre Function tritt, für welche $\mathfrak{P}(0, 0) = 0$ und $\mathfrak{P}(0, y) = \lim_{x=+0} \mathfrak{P}(x, y)$ stetig ist, so lange $|y| \leqq \eta_0$ bleibt. Diese allgemeinere Voraussetzung wird demnächst zu machen sein.

setzen*) und annehmen, dass $|y|$ der Bedingung

$$\frac{\frac{x+|y|}{1-x-|y|}-|y|}{|y|} < q$$

genügt, so hat $\frac{d\log|y|}{dx}$ und also auch $\frac{d|y|}{dx}$ mit $\Re(a)$ gleiches Vorzeichen. Diese Ungleichung

$$(q+1)|y|^2+((q+1)x-q)|y|+x < 0$$

ist aber erfüllt, wenn

$$\varepsilon_x < |y| < \eta_x$$

ist, wo ε_x und η_x die für hinreichend kleine positive Werthe von x positiven Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(q+1)|y|^2+((q+1)x-q)|y|+x = 0$$

sind; es ist für $\lim x = 0$

$$\lim \varepsilon_x = 0, \quad \lim \eta_x = \frac{q}{q+1}\text{**}).$$

Demnach ist $\frac{d|y|}{dx}$ von gleichem Vorzeichen mit $\Re(a)$, wenn $0 < x \leqq x_0$ (x_0 hinreichend klein) ist und $|y|$ zwischen ε_x und η_x liegt.

Im Falle $\Re(a) > 0$ nimmt also $|y|$ mit abnehmendem x ab, wenn der Werth von $|y|$ für $x = x_0$ zwischen ε_{x_0} und η_{x_0} liegt und für alle kleineren positiven x grösser als ε_x bleibt. Es ist demnach für $\lim x = +0$ ein Grenzwerth von $|y|$ vorhanden, welcher nur gleich Null sein kann. Denn aus

$$\frac{d\log|y|}{dx} > \frac{\Re(a)-gq}{x^{k+1}} > \frac{g\delta}{x^{k+1}}$$

folgt

$$\log|y|-\log|y_0| < -\frac{g\delta}{k}\left(\frac{1}{x^k}-\frac{1}{x_0^k}\right),$$

wenn für $x = x_0$ $y = y_0$ ist und $0 < x < x_0$ angenommen wird. Hieraus folgt

$$\lim_{x=+0} \log|y| = -\infty, \quad \lim_{x=+0} y = 0.$$

Wenn es beliebig kleine positive Werthe von x giebt, für welche $|y| \leqq \varepsilon_x$ ist, so ist wegen $\lim \varepsilon_x = 0$ auch $\lim y = 0$.

---

*) Der Fall $\Re(a) = 0$ bleibt von der Betrachtung ausgeschlossen.

**) ε_x nimmt mit abnehmendem x ab, wenn $0 < x \leqq x_0$ (x_0 hinreichend klein) ist.

Ist $\Re(a) < 0$, so nimmt $|y|$ mit abnehmendem x zu, wenn $\varepsilon_x < |y| < \eta_x$ ist. Es kann also nur ein solches Integral y den Grenzwerth 0 haben, welches für $x \leqq x_0$ stets kleiner als ε_x ist. Mehr als *ein* derartiges Integral kann nicht vorhanden sein. Ist $\mathfrak{y}$ ein solches und setzt man in (1.)

$$y = \mathfrak{y} + z,$$

so erhält man

$$x^{k+1}\frac{dz}{dx} = G(x, \mathfrak{y}+z) - G(x, \mathfrak{y}) = z(a + \mathfrak{Q}(x, z)),$$

wo $\mathfrak{Q}(x, z)$ eine in einem gewissen Gebiete $0 < x \leqq \xi$, $|z| \leqq \xi$ reguläre, für $x = +0$, $|z| \leqq \xi$ stetige Function und $\mathfrak{Q}(0, 0) = 0$ ist*). Dass abgesehen von $z = 0$ kein Integral dieser Differentialgleichung den Grenzwerth 0 haben kann, ist oben gezeigt worden. Dass nothwendig ein Integral $\mathfrak{y}$ mit $\lim \mathfrak{y} = 0$ für $\lim x = +0$ existirt, wird ähnlich wie im Falle der *Riccati*schen Gleichung bewiesen**).

Die geringfügigen Abänderungen, welche an der früheren Entwickelung anzubringen sind, sind folgende. Dort war die singuläre Stelle $x = \infty$ betrachtet, während wir uns jetzt in der Umgebung von $x = 0$ befinden. Demgemäss sind, wie ohne weiteres ersichtlich, wo es sich um Vergleichung zweier Werthe von x handelt, die Zeichen „$>$“ und „$<$“ zu vertauschen. An der Stelle, an welcher für ξ alle ganzen Zahlen $> x_0$ gesetzt wurden, nehmen wir jetzt, unter x_0 eine hinreichend kleine positive Zahl verstehend, für ξ beispielsweise diejenigen Brüche von ganzzahligem Nenner und vom Zähler 1, welche kleiner als x_0 sind. Bei der *Riccati*schen Gleichung mit der singulären Stelle $x = 0$ kann sich kein Integral für $0 < x \leqq x_0$ singulär verhalten, wenn es nicht etwa unendlich wird. Dies gilt für die Differentialgleichung (1.) allerdings nicht mehr; sind aber x_0 und ε hinreichend kleine positive Zahlen, so verhält sich

$$\frac{G(x, y)}{x^{k+1}}$$

für jedes den Bedingungen $0 < x \leqq x_0$, $|y| \leqq \varepsilon$ genügende Werthepaar x, y regulär, und deshalb kann auch kein Integral y in dem Intervall $0 < x \leqq x_0$ eine singuläre Stelle besitzen, so lange $|y| < \varepsilon$ bleibt. Dies reicht aber für unseren Beweis aus.

---

*) Vgl. Fussnote S. 269.

**) Bd. 118, S. 263 dieses Journals.

§ 2.

Es sei nun *im Falle* $\Re(a) > 0$ $y = f(x)$ eines der unendlich vielen particulären Integrale von (1.), welche für $\lim x = +0$ den Grenzwerth 0 besitzen, und *es soll das Verhalten von*

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

beim Grenzübergange $\lim x = +0$ *untersucht werden**).

Durch wiederholte Differentiation von (1.) erhält man

$$(5.) \qquad x^{k+1}\frac{dy^{(n)}}{dx} = P_n y^{(n)} + Q_n;$$

hierbei ist

$$(6_1.) \qquad P_1 = \frac{\partial G}{\partial y} - (k+1)x^k, \quad Q_1 = \frac{\partial G}{\partial x},$$

und zur Bestimmung von

$$P_n = P_n(x,\ y), \quad Q_n = Q_n(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})$$

dienen die Recursionsformeln

$$(6.) \quad \begin{cases} P_n = P_{n-1} - (k+1)x^k, \\ Q_n = \left(\frac{\partial P_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial P_{n-1}}{\partial y}y'\right)y^{(n-1)} + \frac{\partial Q_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{n-1}}{\partial y}y' + \cdots + \frac{\partial Q_{n-1}}{\partial y^{(n-2)}}y^{(n-1)}, \end{cases}$$

woraus sich sofort ergiebt:

$$(6_n.) \qquad P_n = \frac{\partial G}{\partial y} - n(k+1)x^k.$$

Wir nehmen an, für das vorgelegte Integral $y = f(x)$ und dessen Ableitungen erster bis $(n-1)$-ter Ordnung seien bereits bestimmte endliche Grenzwerthe gefunden:

$$\begin{aligned} \lim f(x) &= 0, \\ \lim f'(x) &= 1!\,\varepsilon_1, \\ &\cdots\cdots \\ \lim f^{(n-1)}(x) &= (n-1)!\,\varepsilon_{n-1}. \end{aligned}$$

$y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ ist ein particuläres Integral der linearen Differentialgleichung

$$(7.) \qquad x^{k+1}\frac{dy^{(n)}}{dx} = P_n(x,\ f(x)).y^{(n)} + Q_n(x,\ f(x),\ f'(x),\ \ldots,\ f^{(n-1)}(x)).$$

Die Sätze über die *Riccati*sche Gleichung**) gelten auch hier, denn es ge-

---

*) Vgl. II. Theil § 2 Bd. 119, dieses Journals.

**) Dieses Journal Bd. 118.

nügt für dieselben die Voraussetzung, dass P_n, Q_n in einem gewissen Intervalle $0 < x \leqq x_0$ reguläre und für $x = +0$ stetige Functionen von x sind. Es ist für $\lim x = +0$

$$\lim P_n = \lim \frac{\partial G}{\partial y} = a,$$

$$\lim Q_n = Q_n(0,\ 0,\ 1!\,\varepsilon_1,\ \ldots,\ (n-1)!\,\varepsilon_{n-1}),$$

und es werde

$$(8.) \qquad n!\,\varepsilon_n = -\frac{1}{a}\,Q_n(0,\ 0,\ 1!\,\varepsilon_1,\ \ldots,\ (n-1)!\,\varepsilon_{n-1})$$

gesetzt, so dass ε_n endlich ist. Da $\Re(a) > 0$ vorausgesetzt wurde, so ist für alle Integrale $y^{(n)}$ von (7.)

$$\lim y^{(n)} = n!\,\varepsilon_n,$$

mit Ausnahme eines einzigen $\mathfrak{y}^{(n)}$, für welches $\lim \mathfrak{y}^{(n)} = \infty$ ist. Hier ist aber $\mathfrak{y}^{(n)}$ dasjenige Integral, welches für jeden Werth von x unendlich ist; es kann also $f^{(n)}(x)$ nicht mit $\mathfrak{y}^{(n)}$ übereinstimmen, denn

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_{n-1}(x,\ f(x)).f^{(n-1)}(x) + Q_{n-1}(x,\ f(x),\ \ldots)}{x^{k+1}}$$

hat für jeden hinreichend kleinen positiven Werth von x einen endlichen Werth. Es ist demnach

$$(9.) \qquad \lim f^{(n)}(x) = n!\,\varepsilon_n.$$

Wir werden sogleich sehen, dass ε_n nichts anderes ist, als der Coefficient c_n in der der Differentialgleichung genügenden Reihe

$$(3.) \qquad y = c_1 x + c_2 x^2 + \cdots.$$

Die Coefficienten der Reihe (3.) können wie folgt bestimmt werden. Es sei

$$\Delta(y) = -x^{k+1}\frac{dy}{dx} + G(x,\ y).$$

Setzt man für y die Reihe (3.) und entwickelt man $\Delta(y)$ unter Anwendung der für convergente Reihen gültigen Rechenregeln nach Potenzen von x, so erhält man durch Nullsetzen des Coefficienten von x^n die Recursionsformel für c_n. Die Reihenentwickelung von $\Delta(y)$ wird auch so erhalten: man bildet, y als Function x auffassend,

$$\frac{d^n \Delta(y)}{dx^n} = \Delta_n(y) = -x^{k+1}y^{(n+1)} + P_n(x,\ y).y^{(n)} + Q_n(x,\ y,\ \ldots,\ y^{(n-1)});$$

setzt man darin

$$x = 0, \quad y = 0, \quad y^{(\nu)} = \nu!\,c_\nu, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

so geht $\Delta_n(y)$ über in

$$\Delta_n = a.n!\,c_n + Q_n(0,\ 0,\ 1!\,c_1 \ldots (n-1)!\,c_{n-1}),$$

und es ist

$$\Delta(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n \frac{x^n}{n!}.$$

Die Recursionsformel $\Delta_n = 0$ für c_n stimmt mit der Recursionsformel (8.) für ε_n überein; es ist also

$$\varepsilon_n = c_n$$

und demnach *für jedes Integral y von* (1.), *welches für* $\lim x = +0$ *verschwindet,*

$$\lim \frac{d^n y}{dx^n} = n!\,c_n. \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{10.}$$

Hieraus folgt die asymptotische Darstellung des Integrals y durch die Reihe (3.). Setzt man nämlich, unter n eine der Zahlen 1, 2, 3, ... verstehend,

$$y = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu x^\nu + z_n x^n, \tag{11.}$$

also

$$z_n = \frac{y - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu x^\nu}{x^n},$$

so ist für $\lim x = +0$

$$\lim z_n = \lim \frac{\frac{d^n y}{dx^n} - n!\,c_n}{n!}\ ^*),$$

also mit Rücksicht auf (10.)

$$\lim z_n = 0. \tag{12.}$$

---

*) Setzt man

$$y - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu x^\nu = \varphi(x) + i\psi(x),$$

$$z_n = \xi_n + i\eta_n,$$

so ist nach (10.)

$$\lim \varphi^{(n)}(x) = 0, \quad \lim \psi^{(n)}(x) = 0,$$

und es ist nach der bekannten Regel, deren Voraussetzungen hier erfüllt sind,

$$\lim \xi_n = \lim \frac{\varphi(x)}{x^n} = \lim \frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!} = 0,$$

$$\lim \eta_n = \lim \frac{\psi(x)}{x^n} = \lim \frac{\psi^{(n)}(x)}{n!} = 0.$$

§ 3.

Wir weisen jetzt im Falle $\Re(a) < 0$ ***die asymptotische Darstellung des einzigen für*** $\lim x = +0$ ***verschwindenden Integrals*** $\mathfrak{y}$ ***von*** (1.) ***durch die Reihe*** (3.) ***nach,*** **ohne vorher** $\lim \frac{d^n \mathfrak{y}}{dx^n}$ **zu bestimmen*). Setzt man**

$$(13.) \qquad y = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu x^\nu + z_n x^n = \eta_n + z_n x^n,$$

so ergiebt sich aus (1.) für z_n **die Differentialgleichung**

$$(14.) \qquad x^{k+1} \frac{dz_n}{dx} = x \mathfrak{P}_n(x) + \Big(\frac{\partial G(x, \eta_n)}{\partial \eta_n} - n x^k \Big) z_n + \frac{x^n}{2!} \frac{\partial^2 G(x, \eta_n)}{\partial \eta_n} z_n^2 + \cdots;$$

hierin ist unter Benutzung der in § 2 eingeführten Bezeichnung

$$\mathfrak{P}_n(x) = \frac{\Delta(\eta_n)}{x^{n+1}}$$

eine für hinreichend kleine Werthe von x **convergente, nach positiven Potenzen von** x **fortschreitende Reihe, ebenso wie die Coefficienten von** z_n, z_n^2, ..., **und zwar hat die den Coefficienten von** z_n **bildende Potenzreihe für** $x = 0$ **den Werth** a. **Wegen** $\Re(a) < 0$ **besitzt die Differentialgleichung (14.) nach § 1 ein einziges Integral** $z_n = \zeta_n$, **für welches** $\lim \zeta_n = 0$ **für** $\lim x = +0$ **ist. Diesem entspricht der Substitution (13.) zufolge ein Integral** y **von (1.) mit** $\lim y = 0$. **Dies kann aber nach § 1 nur das einzige für** $\lim x = +0$ **verschwindende Integral** $\mathfrak{y}$ **sein; der Substitution (13.) zufolge entspricht dem Integral** $y = \mathfrak{y}$ **von (1.) das Integral** $z_n = \zeta_n$ **von (14.).**

Es ist also für $\lim x = +0$:

$$(15.) \qquad \lim \zeta_n = \lim \frac{\mathfrak{y} - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu x^\nu}{x^n} = 0,$$

oder wir haben die asymptotische Gleichung

$$\mathfrak{y} \sim \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu x^\nu.$$

Durch $(n-1)$**-malige Differentiation der Gleichung (1.) erhält man**

$$(16.) \qquad x^{k+1} y^{(n)} = H_n(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

wo

$$H_n = P_{n-1}(x, y) . y^{(n-1)} + Q_{n-1}(x, y, \ldots, y^{(n-2)})$$

eine ganze rationale Function von $y', \ldots, y^{(n-1)}$ **ist, deren Coefficienten**

*) Vgl. Bd. 118, S. 266 dieses Journals.

Potenzreihen von x, y sind, welche für hinreichend kleine absolute Beträge dieser Grössen convergiren. Wenn nun für ein gewisses Integral y von (1.) ausser der asymptotischen Gleichung

$$y \backsim \eta,$$

wo η die Reihe (3.) darstellt, noch die asymptotischen Gleichungen

$$y^{(\nu)} \backsim \eta^{(\nu)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$$

bestehen, wo $\eta^{(\nu)}$ die durch ν-malige gliedweise Differentiation von η gebildete Reihe bedeutet, so ist*)

$$\frac{H_n(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})}{x^{k+1}} \backsim \frac{H_n(x, \eta, \eta', \ldots, \eta^{(n-1)})}{x^{k+1}},$$

wo die Rechnungen auf der rechten Seite formal nach den Regeln für convergente Reihen auszuführen sind; links erhält man zufolge (16.) $y^{(n)}$, die rechte Seite stimmt, da die Reihe η der Differentialgleichung (11.) formell genügt, mit der Reihe $\eta^{(n)}$ überein; es ist also

$$y^{(n)} \backsim \eta^{(n)}$$

oder

$$y^{(n)} \backsim 1.2\ldots n.c_n + 2.3\ldots(n+1).c_{n+1}x + \cdots$$

und insbesondere

$$\lim \frac{d^n y}{dx^n} = n!\, c_n. \tag{17.}$$

Demnach sind auch die Grenzwerthe der Ableitungen des Integrals $\mathfrak{y}$ ***für*** $\lim x = +0$ ***gefunden.***

§ 4.

Wenn die Veränderliche x mit dem constanten Argument ω zur Grenze 0 geht:

$$x = \varrho e^{i\omega}, \quad \lim \varrho = 0, \tag{18.}$$

so haben wir für y als Function von ϱ die Differentialgleichung

$$\varrho^{k+1} \frac{dy}{d\varrho} = e^{-ik\omega} a y + \cdots; \tag{19.}$$

nach § 1 giebt es, je nachdem der reelle Theil von $e^{-ik\omega}a$ positiv oder negativ ist, unendlich viele Integrale, welche bei dem Grenzübergange (18.)

---

*) In Betreff des Rechnens mit asymptotischen Reihen sehe man ***Poincaré***, Act. math. Bd. 8 und ***Poincaré***, les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste, Bd. 2.

verschwinden, oder nur ein einziges Integral. Wir haben jetzt die Reihe

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} e^{in\omega} c_n \varrho^n,$$

welche (19.) formell befriedigt, und es ist, wenn y irgend ein für $\lim \varrho = +0$ verschwindendes Integral bedeutet, nach § 2 bezw. § 3:

$$\lim \frac{d^n y}{d\varrho^n} = n! e^{in\omega} c_n,$$

also auch jetzt noch

$$\lim \frac{d^n y}{dx^n} = n! c_n. \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{20.}$$

Ferner ist

$$\lim_{\varrho=+0} \frac{y - \sum_{\nu=1}^{n} e^{i\nu\omega} c_\nu \varrho^\nu}{\varrho^n} = 0, \tag{21.}$$

also auch beim Grenzübergange (18.)

$$\lim \frac{y - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu x^\nu}{x^n} = 0;$$

d. h. die Reihe (3.) stellt auch jetzt das Integral y asymptotisch dar.

Wir fassen die bisherigen Ergebnisse in den folgenden Satz zusammen:

Wenn die Veränderliche x mit dem Argument ω in die singuläre Stelle der Unbestimmtheit $x = 0$ geht, nähern sich unendlich viele) Integrale y der Differentialgleichung* (1.) *oder nur ein einziges Integral dem Grenzwerthe Null, je nachdem der reelle Theil von $e^{-ik\omega} a$ positiv oder negativ ist. Jedes auf dem betrachteten Wege**) verschwindende Integral y wird durch die der Differentialgleichung formell genügende, im allgemeinen divergente Potenzreihe*

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu x^\nu$$

asymptotisch dargestellt; d. h. es ist, wenn unter n irgend eine ganze positive Zahl verstanden wird,

$$\lim \frac{y - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu x^\nu}{x^n} = 0,$$

$$\lim \frac{d^n y}{dx^n} = n! c_n.$$

---

*) Man vergleiche den Satz am Anfang von § 1.

**) Argumente ω, für welche $\Re(e^{-ik\omega} a) = 0$ ist, sind im Bisherigen ausgeschlossen worden.

§ 5.

Wir setzen jetzt wieder voraus, dass x als reelle positive Grösse zur Grenze 0 geht. Im Falle $\Re(a) > 0$ stellt nach § 2 dieselbe Potenzreihe (3.) sämmtliche Integrale asymptotisch dar, welche bei diesem Grenzübergange verschwinden. Um ein unterscheidendes Merkmal im Verhalten dieser unendlich vielen Integrale zu gewinnen, stellen wir folgende Betrachtung an.

Es sei

$$(22.) \qquad \left[\frac{\partial G(x, y)}{\partial y}\right]_{y = c_1 x + c_2 x^2 + \cdots} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots;$$

d. h. man ersetze in der nach y genommenen partiellen Ableitung des Ausdrucks (2.) y durch die Reihe (3.) und nehme die formale Entwickelung nach Potenzen von x vor. Der Differentialgleichung

$$x^{k+1}\frac{dt}{dx} = (a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k)t$$

genügt die Function

$$(23.) \qquad t = Ce^{-\left(\frac{1}{k}\frac{a_0}{x^k} + \frac{1}{k-1}\frac{a_1}{x^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{x}\right).x^{a_k}},$$

worin C eine willkürliche Constante ist. Es ist $a_0 = a$, also $\Re(a_0) > 0$ und demnach

$$\lim t = 0 \quad \text{für} \quad \lim x = +0.$$

Es gilt nun der folgende Satz:

Ist y_0 ein für $\lim x = +0$ verschwindendes particuläres Integral der Differentialgleichung (1.), *in welcher $\Re(a) > 0$ vorausgesetzt wird, und legt man der in dem Ausdruck* (23.)

$$t = Ce^{-\left(\frac{1}{k}\frac{a_0}{x^k} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{x}\right).x^{a_k}}$$

enthaltenen Constanten C einen bestimmten endlichen Werth bei, so ist ein und nur ein Integral y von (1.) *vorhanden, für welches*

$$\lim_{x=+0} \frac{y - y_0}{t} = 1$$

ist.

Durch die Substitution

$$(24.) \qquad y = y_0 + z$$

geht (1.) über in

$$x^{k+1}\frac{dz}{dx} = G(x,\ y_0+z)-G(x,\ y_0)$$

oder

$$x^{k+1}\frac{dz}{dx} = z\,H(x,\ z) = z\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi_\nu(x)z^\nu, \tag{25.}$$

wobei gesetzt ist:

$$\varphi_\nu(x) = \frac{1}{(\nu+1)!}\frac{\partial^{\nu+1}G(x,\ y_0)}{\partial y_0^{\nu+1}}. \qquad (\nu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

Nimmt man die positiven Zahlen x_0 und ϱ hinreichend klein, so ist $H(x, z)$ für $0 < x \leqq x_0$, $|z| \leqq \varrho$ regulär und für $x = +0$, $|z| \leqq \varrho$ stetig. Die asymptotische Gleichung $y_0 \backsim \eta$, wo η die Reihe (3.) darstellt, hat die asymptotische Gleichung

$$\varphi_0(x) = \frac{\partial G(x,\ y_0)}{\partial y_0} \backsim \frac{\partial G(x,\ \eta)}{\partial \eta}$$

oder nach (22.)

$$\varphi_0(x) \backsim a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

zur Folge, woraus hervorgeht:

$$\lim\frac{\varphi_0(x)-(a_0+a_1x+\cdots+a_kx^k)}{x^{k+1}} = a_{k+1}.$$

Da auch $\varphi_\nu(x)$ durch eine Potenzreihe asymptotisch dargestellt wird, so ist

$$\lim\varphi_\nu(x) = a_0^{(\nu)} \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots)$$

endlich. Die weitere Substitution

$$z = tw, \tag{26.}$$

wobei der in t enthaltenen Constanten C ein bestimmter endlicher Werth beigelegt wird, liefert die Differentialgleichung

$$\frac{dw}{dx} = w\,F(x,\ w), \tag{27.}$$

wobei

$$F(x,\ w) = \frac{H(x,\ tw)-(a_0+a_1x+\cdots+a_kx^k)}{x^{k+1}}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty}\psi_\nu(x).w^\nu$$

und

$$\psi_0(x) = \frac{\varphi_0(x)-(a_0+a_1x+\cdots+a_kx^k)}{x^{k+1}},$$

$$\psi_\nu(x) = x^{-\nu(k+1)}t^\nu\varphi_\nu(x), \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots)$$

ferner

$$\lim \psi_0(x) = a_{k+1},$$
$$\lim \psi_\nu(x) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

ist. Wenn die positive Grösse r kleiner angenommen wird, als der von Null verschiedene kleinste Werth von

$$\left| \frac{\varrho}{x^{-(k+1)}t} \right|$$

im Intervall $0 \leqq x \leqq x_0$, so ist die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \psi_\nu(x).w^\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(x).x^{-\nu(k+1)}t^\nu w^\nu$$

für $0 \leqq x \leqq x_0$, $|w| \leqq r$ gleichmässig convergent; die Function $F(x, w)$ ist in diesem Gebiete stetig und zwar regulär, wenn $x > 0$ ist. Wegen

$$\lim_{x=+0} x^{-(k+1)}t = 0$$

kann man x_0 so klein wählen, dass $r > 1$ wird. Da $\frac{\partial(wF(x, w))}{\partial w}$ in dem angegebenen Gebiete endlich ist, so sind die Voraussetzungen des Fundamentalsatzes über die Existenz der Integrale eines Differentialgleichungssystems mit reellen Veränderlichen erfüllt*). Es giebt demnach eine und nur eine der Differentialgleichung (27.) genügende Function w von x, welche für $x = 0$ den Werth 1 annimmt und in dem Intervall $0 \leqq x < x_1$ (x_1 hinreichend klein) stetig ist. Diese Function muss in unserem Falle eine analytische Function sein, welche sich im Innern des Intervalles $0 < x < x_1$ überall regulär verhält; denn wäre sie an einer Stelle $x = \xi$ nicht regulär, so wäre ausserdem noch eine reguläre Function vorhanden, welche für $x = \xi$ denselben Werth annimmt; wir hätten zwei stetige Functionen mit demselben Werthe für $x = \xi$, was dem Existenzbeweise widerspricht.

Einem Integral w von (27.) entspricht aber auf Grund der Substitution

$$w = \frac{y - y_0}{t}$$

ein Integral y von (1.), so dass der ausgesprochene Satz bewiesen ist.

---

*) *Picard*, Traité d'Analyse, Bd. II, S. 291 oder S. 301. Nimmt man etwa den vermittelst successiver Näherungen geführten Beweis (S. 301—304), so sieht man ohne weiteres, dass derselbe auch gültig bleibt, wenn nur die Veränderliche x reell, die Function w aber complex ist und wenn das betrachtete Intervall von x sich vom Ausgangswerthe $x = 0$ nur nach einer Seite hin erstreckt.

Hat $G(x, y)$ die Form (4.), in welcher die von y freien Glieder fehlen, so ist $y_0 = 0$ ein Integral; man hat

$$\varphi_0(x) = \left[\frac{\partial G(x, y)}{\partial y}\right]_{y=0} = a_0 + a_1 x + \cdots,$$

und einem bestimmten endlichen Werthe der Constanten C in dem Ausdrucke für t entspricht ein einziges Integral y der Differentialgleichung (1.), für welches

$$\lim_{x=+0} \frac{y}{t} = 1$$

ist. Dieses Integral wird im folgenden Paragraphen in eine nach Potenzen von t fortschreitende Reihe entwickelt, aus welcher sich sein Verhalten beim Grenzübergange $\lim x = +0$ genauer ersehen lässt.

§ 6.

In der Differentialgleichung (1.) sollen jetzt in $G(x, y)$ die von y freien Glieder fehlen. Wir schreiben die Differentialgleichung in der Form

$$x^{k+1} \frac{dy}{dx} = G(x, y) = g_0(x).y + g_1(x).y^2 + \cdots; \tag{28.}$$

es sei

$$g_\lambda(x) = a_0^{(\lambda)} + a_1^{(\lambda)} x + a_2^{(\lambda)} x^2 + \cdots \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots)$$

und insbesondere

$$g_0(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots.$$

Wir wollen wieder annehmen, die Reihe $G(x, y)$ sei für $|x| \leqq 1$, $|y| \leqq 1$ convergent; ferner setzen wir $g_0(x)$ als ganze Function $k$ten Grades

$$g_0(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k \tag{29.}$$

voraus, was stets dadurch erreicht werden kann, dass man an Stelle von y vermittelst der Substitution

$$y = z e^{\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{k+\nu} \frac{x^\nu}{\nu}}$$

eine neue Function z einführt. Wir setzen

$$t = C e^{-\left(\frac{1}{k}\frac{a_0}{x^k} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{x}\right)} . x^{a_k}, \tag{30.}$$

wo C eine willkürliche Constante bedeutet, so dass die Differentialgleichung

$$x^{k+1} \frac{dt}{dx} = g_0(x).t$$

besteht. Wenn für C ein bestimmter endlicher Werth gesetzt wird, *besitzt die Differentialgleichung* (28.) *ein Integral* y, *für welches*

$$\lim_{x=+0} \frac{y}{t} = 1$$

ist, vorausgesetzt, dass $\Re(a_0) > 0$ *ist. Wir wollen dieses Integral in eine convergente Reihe entwickeln:*

$$y = Y_0 + Y_1 + Y_2 + \cdots, \tag{31.}$$

in der Weise, dass

$$\lim_{x=+0} \frac{Y_n}{t^{n+1}} = c_0^{(n)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

endlich ist. Wir setzen

$$Y_n = tF_n = t^{n+1} f_n, \tag{32.}$$

so dass wir haben

$$y = t(F_0 + F_1 + F_2 + \cdots), \tag{33.}$$

$$y = f_0 t + f_1 t^2 + f_3 t^3 + \cdots \tag{34.}$$

und

$$\lim_{x=+0} \frac{F_n}{t^n} = \lim_{x=+0} f_n = c_0^{(n)}.$$

Eine Reihe von der Form (31.) erhalten wir durch folgendes Verfahren. Setzt man die Reihe (31.) in die Differentialgleichung (28.) ein, so erhält man

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{k+1} \frac{dY_n}{dx} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} g_\lambda \Big(\sum_{n=0}^{\infty} Y_n \Big)^{\lambda+1};$$

ersetzt man in dieser Gleichung Y_n durch $Y_n \tau^{n+1}$ und vergleicht man die Coefficienten von τ, τ^2, τ^3, …, τ^{n+1}, so erhält man die Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned}
x^{k+1} \frac{dY_0}{dx} &= g_0 Y_0, \\
x^{k+1} \frac{dY_1}{dx} &= g_0 Y_1 + g_1 Y_0^2, \\
x^{k+1} \frac{dY_2}{dx} &= g_0 Y_2 + 2 g_1 Y_0 Y_1 + g_2 Y_0^3, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x^{k+1} \frac{dY^n}{dx} &= g_0 Y_n + \Psi_n(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1});
\end{aligned}\right. \tag{35.}$$

hierbei ist Ψ_n eine Summe von Producten von der Form

$$g_m Y_{\mu_1} \ldots Y_{\mu_{m+1}},$$

wo m eine der Zahlen $1, \ldots, n$ ist, $\mu_1, \ldots, \mu_{m+1}$ Zahlen aus der Reihe $0, 1, \ldots, n-1$ mit der Summe $\mu_1 + \cdots + \mu_{m+1} = n-m$.

Setzt man die Reihe (34.) in (28.) ein, so ergiebt die Vergleichung der Coefficienten von $t, t^2, t^3, \ldots, t^{n+1}$ die zur Bestimmung von $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n$ dienenden linearen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(36.) \quad \begin{cases} \dfrac{df_0}{dx} = 0, \\ x^{k+1}\dfrac{df_1}{dx} = -g_0 f_1 + g_1 f_0^2, \\ x^{k+1}\dfrac{df_2}{dx} = -2g_0 f_2 + 2g_1 f_0 f_1 + g_2 f_0^3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^{k+1}\dfrac{df_n}{dx} = -n g_0 f_n + \Psi_n(f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}), \end{cases}$$

und zwar ist jetzt Ψ_n aus $f_0, f_1, \ldots$ ebenso zusammengesetzt wie vorhin aus $Y_0, Y_1, \ldots$.

Setzt man schliesslich in (35.) $Y_n = tF_n$, so erhält man die zur Bestimmung von F_n dienenden Gleichungen

$$(37.) \quad \begin{cases} \dfrac{dF_0}{dx} = 0, \\ x^{k+1}\dfrac{dF_1}{dx} = t g_1 F_0^2, \\ x^{k+1}\dfrac{dF_2}{dx} = 2t g_1 F_0 F_1 + t^2 g_2 F_0^3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^{k+1}\dfrac{dF_n}{dx} = \Phi_n(F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}), \end{cases}$$

wo Φ_n eine Summe von Producten

$$t^m g_m F_{\mu_1} \ldots F_{\mu_{m+1}} \qquad (m = 1, \ldots, n;\ \mu_1 + \cdots + \mu_{m+1} = n-m)$$

darstellt.

Die Differentialgleichungen (37.) ergeben bei passender Wahl der Integrationsconstanten

$$(38.)\qquad \begin{cases} F_0 = 1, \\ F_1 = \int_0^x \frac{t g_1}{x^{k+1}}\, dx, \\ F_2 = \int_0^x \frac{2 t g_1 F_1 + t^2 g_2}{x^{k+1}}\, dx, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_n = \int_0^x \frac{\Phi_n(F_0, F_1, \ldots, F_{n-1})}{x^{k+1}}\, dx. \end{cases}$$

Hieraus erhält man unter Berücksichtigung von (32.) oder auch durch Integration der linearen Differentialgleichungen (36.):

$$(39.)\qquad \begin{cases} f_0 = 1, \\ f_1 = t^{-1} \int_0^x \frac{g_1 f_0^2}{x^{k+1}}\, t\, dx, \\ f_2 = t^{-2} \int_0^x \frac{2 g_1 f_0 f_1 + g_2 f_0^3}{x^{k+1}}\, t^2\, dx, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n = t^{-n} \int_0^x \frac{\Psi_n(f_0, f_1, \ldots, f_{n-1})}{x^{k+1}}\, t^n\, dx, \end{cases}$$

und aus (35.) ergiebt sich

$$(40.)\qquad \begin{cases} Y_0 = t, \\ Y_1 = t \int_0^x \frac{g_1 Y_0^2}{x^{k+1}}\, t^{-1}\, dx, \\ Y_2 = t \int_0^x \frac{2 g_1 Y_0 Y_1 + g_2 Y_0^3}{x^{k+1}}\, t^{-1}\, dx, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y_n = t \int_0^x \frac{\Psi_n(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1})}{x^{k+1}}\, t^{-1}\, dx. \end{cases}$$

Wir werden im nächsten Paragraphen nachweisen, dass die Reihen (31.), (33.), (34.) für hinreichend kleine positive Werthe von x convergent sind, wenn, wie vorausgesetzt wurde, $\Re(a_0) > 0$ ist.

Die Differentialgleichung (36.) für f_n besitzt ein einziges Integral, welches für $\lim x = +0$ einen endlichen Grenzwerth hat*); das allgemeine

*) Nach den Sätzen über die *Riccati*sche Gleichung (Bd. 118). Die Behauptung ergiebt sich übrigens auch aus § 1 der gegenwärtigen Arbeit.

Integral derselben ist

$$f_n = t^{-n}\left\{c_n + \int_0^x \frac{\Psi_n(f_0, f_1, \ldots, f_{n-1})}{x^{k+1}}\, t^n\, dx\right\};$$

legt man der Integrationsconstanten c_n einen von Null verschiedenen Werth bei, so ist $\lim f_n = \infty$. Das nothwendig vorhandene Integral mit endlichem Grenzwerthe entspricht demnach dem Werthe $c_n = 0$, d. h. es ist durch (39.) dargestellt.

Die Differentialgleichungen (36.) werden formell befriedigt durch Potenzreihen

$$f_n = c_0^{(n)} + c_1^{(n)} x + c_2^{(n)} x^2 + \cdots \tag{41.}$$

und demnach die Gleichung (28.) durch die Reihe

$$y = \Sigma c_m^{(n)} x^m t^{n+1}. \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{42.}$$

Diese Reihen sind jedoch im allgemeinen divergent. Wie aber früher gezeigt wurde, stellt die Reihe (41.) die Function f_n in (39.) asymptotisch dar.

§ 7.

Um die *Convergenz der in* § 6 *aufgestellten Reihen* zu beweisen, vergleichen wir die Differentialgleichung (28.) mit

$$x^{k+1}\frac{d\mathfrak{y}}{dx} = \mathfrak{G}(x, \mathfrak{y}) = \mathfrak{g}_0\mathfrak{y} + \mathfrak{g}_1\mathfrak{y}^2 + \cdots; \tag{43.}$$

hier ist

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a}_0,$$
$$\mathfrak{g}_\lambda = \mathfrak{a}_0^{(\lambda)} + \mathfrak{a}_1^{(\lambda)} x + \mathfrak{a}_2^{(\lambda)} x^2 + \cdots, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots)$$

und zwar sind $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_0^{(\lambda)}$, $\mathfrak{a}_1^{(\lambda)}$, ... positive Grössen, welche die Bedingungen erfüllen:

$$\mathfrak{R}(a_0) > \mathfrak{a}_0,$$
$$|a_0^{(\lambda)}| < \mathfrak{a}_0^{(\lambda)}, \quad |a_1^{(\lambda)}| < \mathfrak{a}_1^{(\lambda)}, \quad \ldots.$$

Wir setzen, unter $\mathfrak{C}$ den absoluten Betrag der in t enthaltenen Constanten C verstehend,

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{C} e^{-\frac{1}{k}\frac{\mathfrak{a}_0}{x^k}}, \tag{44.}$$

ferner

$$(45.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{F}_0 = 1, \\ \mathfrak{F}_1 = \int_0^x \frac{\mathfrak{t}\mathfrak{g}_1}{x^{k+1}}\,dx, \\ \mathfrak{F}_2 = \int_0^x \frac{2\mathfrak{t}\mathfrak{g}_1\mathfrak{F}_1+\mathfrak{t}^2\mathfrak{g}_2}{x^{k+1}}\,dx, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \mathfrak{F}_n = \int_0^x \frac{\varphi_n(\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n)}{x^{k+1}}\,dx, \end{cases}$$

wobei φ_n aus Φ_n dadurch hervorgeht, dass man g_m, t, F_0, ... durch $\mathfrak{g}_m$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{F}_0$, ... ersetzt.

Wegen $\Re(a_0-\mathfrak{a}_0) > 0$ ist

$$\lim_{x=+0}\frac{t}{\mathfrak{t}} = \lim_{x=+0}\frac{C}{\mathfrak{C}}\,e^{-\left(\frac{1}{k}\frac{a_0-\mathfrak{a}_0}{x^k}+\cdots\right)}x^{a_k} = 0,$$

also

$$|t| < \mathfrak{t} \quad \text{für} \quad 0 < x \leqq x_0,$$

wenn x_0 hinreichend klein genommen wird.

Wenn die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{F}_n$$

für $0 \leqq x \leqq x_0$ gleichmässig convergent ist, gilt das auch für die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}F_n.$$

Denn nach (45.) ist $\mathfrak{F}_n$ für hinreichend kleine positive Werthe von x positiv, und durch Vergleichung der Formeln (38.) und (45.) ergiebt sich

$$|F_n| \leqq \mathfrak{F}_n.$$

Ist nämlich:

$$|F_\nu| \leqq \mathfrak{F}_\nu, \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$$

so ist

$$|t^m g_m F_{\mu_1}\ldots F_{\mu_{m+1}}| \leqq \mathfrak{t}^m \mathfrak{g}_m \mathfrak{F}_{\mu_1}\cdots\mathfrak{F}_{\mu_{m+1}}$$

und demnach

$$|\Phi_n(F_0, F_1, \ldots, F_{n-1})| \leqq \varphi_n(\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_{n-1}),$$

also auch

$$\left|\int_0^x \frac{\Phi_n\,dx}{x^{k+1}}\right| \leqq \int_0^x \frac{|\Phi_n|\,dx}{x^{k+1}} \leqq \int_0^x \frac{\varphi_n\,dx}{x^{k+1}},$$

d. i.

$$|F_n| \leqq \mathfrak{F}_n,$$

w. z. b. w.

Die Coefficienten von $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, ... in (43.) wählen wir folgendermassen. Da die Reihe $G(x, y)$ für $|x| \leqq 1$, $|y| \leqq 1$ convergiren soll, ist eine positive Grösse $\mathfrak{g}$ so vorhanden, dass alle Coefficienten der Reihen $g_1(x)$, $g_2(x)$, ... dem absoluten Betrage nach kleiner als $\mathfrak{g}$ sind. Wir setzen

$$\mathfrak{g}_2(x) = \mathfrak{g} + \mathfrak{g}x + \mathfrak{g}x^2 + \cdots = \frac{\mathfrak{g}}{1-x},$$

indem wir $0 \leqq x < 1$ annehmen, so dass die Differentialgleichung (43.) übergeht in

$$x^{k+1}\frac{d\mathfrak{y}}{dx} = \mathfrak{a}_0\mathfrak{y} + \frac{\mathfrak{g}}{1-x}(\mathfrak{y}^2+\mathfrak{y}^3+\cdots). \tag{46.}$$

Um die Convergenz der hieraus gebildeten Reihe

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{t}\sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{F}_n\mathfrak{t}^n = \sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{f}_n\mathfrak{t}^{n+1}$$

nachzuweisen, ziehen wir zum Vergleich die Differentialgleichung

$$x^{k+1}\frac{d\bar{\mathfrak{y}}}{dx} = \mathfrak{a}_0\bar{\mathfrak{y}} + \mathfrak{g}(\bar{\mathfrak{y}}^2+\bar{\mathfrak{y}}^3+\cdots) \tag{47.}$$

heran, welche, wenn

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{G}e^{-\frac{1}{k}\frac{\mathfrak{a}_0}{x^k}},$$

also

$$\mathfrak{a}_0\frac{dx}{x^{k+1}} = \frac{d\mathfrak{t}}{\mathfrak{t}}$$

gesetzt wird, übergeht in

$$\mathfrak{t}\frac{d\bar{\mathfrak{y}}}{d\mathfrak{t}} = \bar{\mathfrak{y}} + \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{a}_0}(\bar{\mathfrak{y}}^2+\bar{\mathfrak{y}}^3+\cdots). \tag{48.}$$

Letztere Gleichung wird durch eine Potenzreihe von $\mathfrak{t}$

$$\bar{\mathfrak{y}} = c_0\mathfrak{t} + c_1\mathfrak{t}^2+\cdots; \quad c_0 = 1$$

befriedigt, welche, wenn die positive Grösse $\mathfrak{r}$ hinreichend klein angenommen wird, für $|\mathfrak{t}| < \mathfrak{r}$ convergirt*). Bestimmt man nach der in § 6 auseinander-

*) Setzt man $\mathfrak{y} = \mathfrak{t}\mathfrak{z}$, so ist

$$\frac{d\mathfrak{z}}{d\mathfrak{t}} = \frac{\mathfrak{g}_0}{\mathfrak{a}}(\mathfrak{z}^2+\mathfrak{t}\mathfrak{z}^3+\cdots),$$

und nach dem Fundamentalsatz ist eine und nur eine Potenzreihe

$$\mathfrak{z} = c_0 + c_1\mathfrak{t} + c_2\mathfrak{t}^2+\cdots$$

mit dem Anfangsglied $c_0 = 1$ vorhanden.

gesetzten Methode die der Gleichung (48.) genügende Potenzreihe von t

$$\bar{\eta} = \bar{f}_0 t + \bar{f}_1 t^2 + \bar{f}_2 t^3 + \cdots,$$

so ist nach (39.)

$$(49.)\qquad \begin{cases} \bar{f}_0 = 1, \\ \bar{f}_1 = g t^{-1} \int_0^x \frac{\bar{f}_0^2}{x^{k+1}} t\, dx, \\ \bar{f}_2 = g t^{-2} \int_0^x \frac{2\bar{f}_0 \bar{f}_1 + \bar{f}_0^3}{x^{k+1}} t^2\, dx, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots; \end{cases}$$

nun ist aber

$$t^{-n} \int_0^x \frac{t^n dx}{x^{k+1}} = e^{\frac{n a_0}{k x^k}} \int_0^x \frac{e^{-\frac{n a_0}{k x^k}} dx}{x^{k+1}} = \frac{1}{n a_0}$$

und demnach

$$\begin{aligned} \bar{f}_0 &= 1, \\ \bar{f}_1 &= \frac{g \bar{f}_0^2}{a_0}, \\ \bar{f}_2 &= \frac{g(2\bar{f}_0 \bar{f}_1 + \bar{f}_0^3)}{2 a_0}, \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

d. h. $\bar{f}_n$ ist eine positive Constante und stimmt mit c_n überein.

Aus der Differentialgleichung (46.) erhält man nach (39.)

$$(50.)\qquad \begin{cases} f_0 = 1, \\ f_1 = g t^{-1} \int_0^x \frac{f_0^2}{(1-x) x^{k+1}} t\, dx, \\ f_2 = g t^{-2} \int_0^x \frac{2 f_0 f_1 + f_0^3}{(1-x) x^{k+1}} t^2\, dx, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n = g t^{-n} \int_0^x \frac{\psi_n(f_0, f_1, \ldots, f_{n-1})}{(1-x) x^{k+1}} t^n\, dx, \end{cases}$$

wo ψ_n eine Summe von Producten

$$f_{\mu_1} \cdots f_{\mu_{m+1}} \qquad (m = 1, \ldots, n;\ \mu_1 + \cdots + \mu_{m+1} = n - m)$$

ist, so dass ψ_n aus Ψ_n dadurch hervorgeht, dass man g_m durch 1 und $f_0, f_1, \ldots$ durch $f_0, f_1, \ldots$ ersetzt. Nun ist aber, da $0 \leqq x < 1$ an-

genommen war,

$$\mathfrak{f}_0 = \bar{\mathfrak{f}}_0$$

$$\mathfrak{f}_1 \leqq \frac{\mathfrak{g}}{1-x}\mathfrak{t}^{-1}\int_0^x \frac{\mathfrak{f}_0^2}{x^{k+1}}\mathfrak{t}\,dx = \frac{\bar{\mathfrak{f}}_1}{1-x}.$$

Nachdem man gezeigt hat, dass

$$\mathfrak{f}_\nu \leqq \frac{\bar{\mathfrak{f}}_\nu}{(1-x)^\nu} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$$

ist, hat man

$$\mathfrak{f}_{\mu_1}\cdots\mathfrak{f}_{\mu_{m+1}} \leqq \frac{\bar{\mathfrak{f}}_{\mu_1}\cdots\bar{\mathfrak{f}}_{\mu_{m+1}}}{(1-x)^{\mu_1+\cdots+\mu_{m+1}}} = \frac{\bar{\mathfrak{f}}_{\mu_1}\cdots\bar{\mathfrak{f}}_{\mu_{m+1}}}{(1-x)^{n-m}}$$

$$\leqq \frac{\bar{\mathfrak{f}}_{\mu_1}\cdots\bar{\mathfrak{f}}_{\mu_{m+1}}}{(1-x)^{n-1}},$$

woraus folgt:

$$\psi_n(\mathfrak{f}_0, \mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_{n-1}) \leqq \frac{\psi_n(\bar{\mathfrak{f}}_0, \bar{\mathfrak{f}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{f}}_{n-1})}{(1-x)^{n-1}}.$$

Es ist also

$$\mathfrak{f}_n \leqq \mathfrak{g}\mathfrak{t}^{-n}\int_0^x \frac{\psi_n(\bar{\mathfrak{f}}_0, \bar{\mathfrak{f}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{f}}_{n-1})}{(1-x)^n x^{k+1}}\mathfrak{t}^n\,dx$$

$$\leqq \frac{\mathfrak{g}}{(1-x)^n}\mathfrak{t}^{-n}\int_0^x \frac{\psi_n(\bar{\mathfrak{f}}_0, \bar{\mathfrak{f}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{f}}_{n-1})}{x^{k+1}}\mathfrak{t}^n\,dx,$$

d. i.

$$\mathfrak{f}_n \leqq \frac{\bar{\mathfrak{f}}_n}{(1-x)^n}.$$

Also ist

$$\sum_{n=0}^{x}\mathfrak{f}_n\mathfrak{t}^n \leqq \sum_{n=0}^{\infty}\bar{\mathfrak{f}}_n\left(\frac{\mathfrak{t}}{1-x}\right)^n.$$

Nachdem die in $\mathfrak{t}$ enthaltene Constante $\mathfrak{C}$ festgelegt ist, lässt sich eine positive Grösse $x_0 < 1$ so angeben, dass für $0 \leqq x \leqq x_0$

$$\frac{\mathfrak{t}}{1-x} = \frac{\mathfrak{C}e^{-\frac{1}{k}\frac{a_0}{x^k}}}{1-x} < \mathfrak{r}$$

ist. Dann ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{f}_n\mathfrak{t}^{n+1} = \mathfrak{t}\sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{F}_n$$

für $0 \leqq x \leqq x_0$ gleichmässig convergent, was nach der zuerst angestellten Betrachtung auch für die Reihen (31.), (33.), (34.) gilt.

Wir können demnach den Satz aussprechen:

Die Differentialgleichung (28.)

$$x^{k+1}\frac{dy}{dx} = g_0(x).y + g_1(x).y^2 + \cdots$$

wird durch eine Reihe

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n$$

befriedigt, welche, wenn $\Re(a_0) > 0$ *ist, in einem Intervall* $0 \leqq x \leqq x_0$ (x_0 *positiv und hinreichend klein) gleichmässig convergirt. Die Reihenglieder* Y_n *lassen sich nach den Formeln* (40.) *durch successive Integrationen berechnen. Setzt man*

$$Y_n = t^{n+1} f_n(x), \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

wo

$$t = Ce^{-\left(\frac{1}{k}\frac{a_0}{x^k} + \frac{1}{k-1}\frac{a_1}{x^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{x}\right).x^{a_k}}$$

ist, so hat man zur successiven Bestimmung der f_n *die linearen Differentialgleichungen* (36.), *deren Integrale durch die Formeln* (39.) *dargestellt werden.*

Formell wird die Differentialgleichung (28.) *durch eine Potenzreihe von* x *und* t

$$y = \Sigma c_m^{(n)} x^m t^{n+1} \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots)$$

befriedigt; die im allgemeinen divergente Potenzreihe von x, *mit welcher* t^{n+1} *multiplicirt ist,*

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m^{(n)} x^m,$$

stellt die Function $f_n(x)$ *asymptotisch dar**).

Die Umgestaltung und weitere Untersuchung der obigen Reihen soll in einem späteren Aufsatze erfolgen, ebenso die Betrachtung complexer Werthe von x, von welcher zuletzt abgesehen wurde, weil es sich im gegenwärtigen Aufsatze hauptsächlich um das Verhalten der Integrale auf einem bestimmten nach der singulären Stelle $x = 0$ gehenden Wege handelte.

---

*) Durch Reihenentwickelung der Integrale (40.) erhält man für y eine Reihe, in deren Gliedern, falls a_k keine ganze Zahl ist, Potenzen von x^{a_k} vorkommen, multiplicirt mit Reihen, welche nach positiven und negativen Potenzen von x fortschreiten. Die oben eingeführte divergente Potenzreihe von x und t zeigt eine gewisse Aehnlichkeit mit den einer linearen Differentialgleichung formell genügenden Normalreihen.

Ueber rationale Auflösungen der Functionalgleichung

$$C\psi(n)\psi(n+1)+(A''n+B'')\psi(n+1)-(A'(n+1)+B')\psi(n)+(A'-A'') = 0.$$

(Von Herrn *L. Saalschütz* in Königsberg i. Pr.)

Bei Untersuchungen über Kettenbrüche, welche ihrem Abschlusse nahe sind, war ich genöthigt, die in der Ueberschrift genannte Functionalgleichung ins Auge zu fassen. Dabei kam der Hauptsache nach nur der allgemeine Fall in Betracht, dass A', A'', B', B'', C von einander unabhängige und, bis darauf, $A' > A'' > 0$ voraussetzen zu müssen, beliebige Constanten sind. Die Gleichung genügt, um die Natur und den Verlauf der Function $\psi(n)$ erkennen zu lassen, obgleich eine eigentliche analytische Beziehung zwischen $\psi(n)$ und n in geschlossener oder gar rationaler Form sich nicht aufstellen lässt. In gewissen durch Bedingungen zwischen den obigen fünf Constanten charakterisirten *Specialfällen* indessen, die trotzdem für die allgemeine Untersuchung von zu grosser Bedeutung sind, um unbeachtet bleiben zu dürfen, kann $\psi(n)$ auch in *rationaler, geschlossener Form* dargestellt werden. Die betreffenden Entwickelungen dem in Vorbereitung begriffenen Aufsatze einzufügen, scheute ich mich, sowohl weil das Gleichmaass seines Baues dadurch über Gebühr gestört würde, als auch weil die eine der beiden vorhandenen Klassen von $\psi(n)$ für jene Untersuchungen nicht in Betracht kommt. Andererseits bieten gerade diese Entwickelungen auch für sich selbst ein, wie ich hoffe, nicht nur den Autor anregendes Interesse dar, und so mögen sie den Gegenstand einer besonderen, hier vorliegenden Arbeit bilden, welche durch sich selbst vollkommen verständlich ist.

§ 1.

Die Functionalgleichung:

(1.) $$C\psi(n)\psi(n+1)+(A''n+B'')\psi(n+1)-(A'(n+1)+B')\psi(n)+(A'-A'') = 0$$

lässt sich, wenn wir dauernd die Abkürzung

$$c = A'-A'' \tag{2.}$$

und γ statt C durch die Gleichung

$$C = \frac{\gamma}{c}$$

einführen, mittels Auflösung nach $\psi(n+1)$ in die Form

$$\psi(n+1) = \frac{(A'n+A'+B')\psi(n)-c}{(A''n+B'')+\frac{\gamma}{c}\psi(n)} \tag{3.}$$

setzen. Die Differenz c muss von 0 verschieden sein, ausserdem sind die Constanten A', A'', B', B'' völlig willkürlich*); das Argument n ist als positive Zahl anzunehmen.

Wir fragen nun: ***Welche Beziehung muss zwischen γ und den anderen Constanten bestehen, damit $\psi(n)$ sich rational durch diese und durch n ausdrücken lasse, und welches ist dann der Ausdruck für $\psi(n)$?***

Zunächst untersuchen wir, welchem Werthe $\psi(n)$ für $n=\infty$ zustrebt; derselbe kann eine endliche constante Grösse, etwa M, oder 0 oder ∞ sein. Im ersten Falle würde die linke Seite von (1.) die unendliche Grösse $(A''-A')M.n$ enthalten, die sich gegen keine andere forthebt; dieser Fall kann also nicht stattfinden. Den zweiten Fall präcisiren wir versuchsweise folgendermassen:

$$\lim_{n=\infty}\psi(n)=0, \quad \lim_{n=\infty}(n\psi(n))=1,$$

und hierdurch wird in der That der Gleichung (1.) genügt. Endlich wird sie noch näherungsweise durch die Annahme

$$\psi(n) = \frac{c}{C}n$$

befriedigt, denn hierbei heben sich die höchsten (zweiten) Potenzen von n fort.

Es giebt also ***zwei Klassen von $\psi(n)$***: eine, die dem Werthe $\frac{1}{n}$, und die andere, die dem Werthe $\frac{c}{C}n$ oder $\frac{c^2}{\gamma}n$ zustrebt. Wir können indess die eine auf die andere zurückführen. Setzen wir nämlich in (1.) nach

*) Die in der Einleitung erwähnte Bedingung $A'>A''>0$ darf also bezüglich $\psi(n)$ aufgegeben werden.

Substitution von $C = \frac{\gamma}{c}$

$$\psi(n) = \frac{\alpha}{\Psi(n)},$$

multipliciren die Gleichung mit $\Psi(n)\Psi(n+1)$ und dividiren sie durch α, so erhalten wir:

$$\frac{c}{\alpha}\Psi(n)\Psi(n+1)-(A'n+A'+B')\Psi(n+1)+(A''n+B'')\Psi(n)+\frac{\alpha\gamma}{c} = 0.$$

Setzen wir nun, um die Form der Gleichung (1.) wieder herzustellen:

$$(4.) \qquad A' = -A_1'', \quad A'' = -A_1', \quad B' = A_1''-B_1'', \quad B'' = -(A_1'+B_1'),$$

so bleibt $A_1'-A_1'' = A'-A'' = c$ invariant, und es ist α so zu bestimmen, dass

$$\frac{\alpha\gamma}{c} = c$$

wird; das giebt:

$$\alpha = \frac{c^2}{\gamma},$$

dadurch wird $\frac{c}{\alpha} = \frac{\gamma}{c}$ und die ganze Gleichung geht in folgende über:

$$(5.) \quad \begin{cases} \frac{\gamma}{c}\Psi(n)\Psi(n+1)+(A_1''n+B_1'')\Psi(n+1)-(A_1'n+A_1'+B_1')\Psi(n)+c = 0. \\ c = A_1'-A_1''. \end{cases}$$

Diese hat genau die Form der Gleichung (1.) und ihre Constanten A_1', A_1'', B_1', B_1'' sind mittelst (4.) durch die gegebenen Constanten ausgedrückt. Ist aus Gleichung (5.) $\Psi(n)$ gefunden, so folgt:

$$(6.) \qquad \psi(n) = \frac{c^2}{\gamma}\cdot\frac{1}{\Psi(n)}.$$

Z. B. ergiebt sich für sehr grosses n aus:

$$\Psi(n) = \frac{1}{n}$$

der Werth

$$\psi(n) = \frac{c^2}{\gamma}n = \frac{c}{C}n,$$

der oben direct gefunden wurde.

Wir brauchen daher nur *eine* Klasse näher zu betrachten und wählen dazu *diejenige, die für sehr grosses n dem Werthe* $\frac{1}{n}$ *zustrebt.*

§ 2.

Bei der Beantwortung der in § 1 gestellten Frage müssen wir gewissermassen in umgekehrter Ordnung zu Werke gehen, indem wir zuerst die Form von $\psi(n)$ feststellen. Da dasselbe rational und in geschlossenem Ausdruck erscheinen und dem Werthe $\frac{1}{n}$ für unendlich wachsendes n zustreben soll, kann es nur folgende Form besitzen:

$$(7.) \qquad \psi(n) = \frac{n^{\lambda-1}+r_1 n^{\lambda-2}+\cdots+r_{\lambda-1}}{n^{\lambda}+s_1 n^{\lambda-1}+\cdots+s_{\lambda}},$$

worin λ eine positive ganze Zahl und $r_1, \ldots, r_{\lambda-1}, s_1, \ldots, s_{\lambda}$ unbekannte von λ abhängige Constanten sind. Dabei zeigt sich der unerwartete Umstand, *dass λ beliebig gewählt werden darf, wenn nur γ in richtiger Art von A', A'', B', B'' und λ abhängig gemacht wird.*

Wir wollen zuerst den Specialfall $\lambda = 1$ durchführen, setzen also

$$\psi(n) = \frac{1}{n+s_1}, \quad \psi(n+1) = \frac{1}{n+s_1+1}.$$

Erweitern wir die linke Seite von (3.) im Zähler und Nenner durch den Factor $A''n+z$, wo z eine zunächst unbekannte Constante ist, so wird aus (3.):

$$\frac{A''n+z}{(A''n+z)(n+s_1+1)} = \frac{(A'n+A'+B')-c(n+s_1)}{(A''n+B'')(n+s_1)+\frac{\gamma}{c}},$$

und nun giebt die Vergleichung der Coefficienten von n^0, n^1, n^2, Zähler gegen Zähler und Nenner gegen Nenner, ohne Schwierigkeit die Werthe:

$$(8.) \qquad \begin{cases} z = B''-A'', \quad \gamma = A'B''-A''B'-2A'A'', \\ cs_1 = A'+A''+B'-B'', \end{cases}$$

und daher

$$\psi(n) = \frac{c}{cn+(A'+A''+B'-B'')}.$$

Wir gehen nun zum allgemeinen Falle über. Setzen wir in (7.) $n+1$ an Stelle von n, so werde

$$(9.) \qquad \psi(n+1) = \frac{n^{\lambda-1}+\sum_1^{\lambda-1} \varrho_k n^{\lambda-k-1}}{n^{\lambda}+\sum_1^{\lambda} \sigma_k n^{\lambda-k}};$$

darin ist

$$(10.)\quad \begin{cases} \varrho_k = r_k+(\lambda-k)_1 r_{k-1}+(\lambda-k+1)_2 r_{k-2}+\cdots+(\lambda-2)_{k-1} r_1+(\lambda-1)_k, \\ \sigma_k = s_k+(\lambda-k+1)_1 s_{k-1}+(\lambda-k+2)_2 s_{k-2}+\cdots+(\lambda-1)_{k-1} s_1+(\lambda)_k, \end{cases}$$

woraus insbesondere

$$(10^a.)\qquad \varrho_1 = r_1+\lambda-1, \quad \sigma_1 = s_1+\lambda.$$

Fügen wir bei $\psi(n+1)$ wieder oben und unten den Factor $A''n+z$ hinzu, multipliciren die rechte Seite von (3.) oben und unten mit dem Nenner von $\psi(n)$, setzen

$$(11.)\qquad A'+B' = E',$$

d. h. führen statt der Constanten B' die Constante E' ein und bezeichnen Zähler und Nenner der linken und der rechten Seite von (3.) nach den angegebenen Erweiterungen mit bez. Z_l, N_l, Z_r, N_r, so haben wir die Gleichungen:

$$(12.)\qquad Z_r = Z_l, \quad N_r = N_l,$$

und zwar ist:

$$(13.)\qquad Z_r = A''n^\lambda+\sum_0^{\lambda-1}{}_k (E' r_k+A' r_{k+1}-c s_{k+1}) n^{\lambda-k-1}; \quad (r_0 = 1,\ r_\lambda = 0),$$

$$(14.)\qquad N_r = A''n^{\lambda+1}+\sum_0^{\lambda}{}_k \left(B'' s_k+A'' s_{k+1}+\frac{\gamma}{c} r_{k-1}\right) n^{\lambda-k}; \quad (s_0 = 1,\ s_{\lambda+1} = 0,\ r_{-1} = 0),$$

$$(15.)\qquad Z_l = A''n^\lambda+\sum_0^{\lambda-1}{}_k (A''\varrho_{k+1}+\varrho_k z) n^{\lambda-k-1}; \quad (\varrho_0 = 1,\ \varrho_\lambda = 0),$$

$$(16.)\qquad N_l = A''n^{\lambda+1}+\sum_0^{\lambda}{}_k (A''\sigma_{k+1}+\sigma_k z) n^{\lambda-k}; \quad (\sigma_0 = 1,\ \sigma_{\lambda+1} = 0).$$

Die Gleichsetzung der Coefficienten von n^λ in der ersten und von $n^{\lambda+1}$ in der zweiten Gleichung (12.) liefert identische Gleichungen; die Gleichsetzung der Coefficienten von n^λ in der zweiten (12.) giebt mit Rücksicht auf (10^a.):

$$(17.)\qquad z = B''-\lambda A'',$$

wodurch also z bestimmt ist; doch wollen wir die Bezeichnung z als Abkürzung beibehalten. Durch Vergleichung der Coefficienten von $n^{\lambda-k-1}$ in der ersten Gleichung (12.) erhalten wir, wenn $A' = c+A''$ gesetzt und die erste Gleichung (10.) benutzt wird:

$$(18.)\quad \begin{cases} c s_{k+1} = c r_{k+1}+E' r_k \\ \qquad -A''\{(\lambda-k-1)_1 r_k+(\lambda-k)_2 r_{k-1}+(\lambda-k+1)_3 r_{k-2}+\cdots+(\lambda-1)_{k+1}\} \\ \qquad -z\{r_k+(\lambda-k)_1 r_{k-1}+(\lambda-k+1)_2 r_{k-2}+\cdots+(\lambda-1)_k\}. \end{cases}$$

Benutzt man nun diese Gleichung, indem man darin k, $k-1$, $k-2$, ..., 0 an Stelle von k setzt, um die sich ergebenden Werthe von s_{k+1}, s_k, ..., s_1 in die beiderseits mit c multiplicirte zweite Gleichung (10.) (mit $k+1$ statt k) einzusetzen, so erhält man eine Gleichung, welche σ_{k+1} durch $r_{k+1}, r_k, \ldots, r_1$ ausdrückt. Ersetzt man auf ihrer rechten Seite c durch $A'-A''$, so ergeben sich die Coefficienten von A' und E' ohne weiteres, die Coefficienten von A'' und z mit Hülfe der leicht beweisbaren Summationsformeln:

$$\mu+(m)_1(\mu+1)+(m)_2(\mu+2)+\cdots+(m)_m(\mu+m) = 2^m\mu+2^{m-1}m,$$

woraus:

$$(\lambda-k+h-1)_{h+1}+(\lambda-k)_1(\lambda-k+h-1)_h+(\lambda-k+1)_2(\lambda-k+h-1)_{h-1}+\cdots$$
$$\cdots+(\lambda-k+h-1)_h(\lambda-k+h-1)_1+(\lambda-k+h)_{h+1}$$
$$= \frac{(\lambda-k+h-1)_h}{h+1}\cdot 2^h(2\lambda-2k+h-1);$$

und

$$(\mu+m-1)_m+(\mu)_1(\mu+m-1)_{m-1}+(\mu+1)_2(\mu+m-1)_{m-2}+\cdots$$
$$\cdots+(\mu+m-2)_{m-1}(\mu+m-1)_1+(\mu+m-1)_m = 2^m(\mu+m-1)_m$$

und wir erhalten:

$$(19.)\quad \begin{cases} c\sigma_{k+1} = A'\{r_{k+1}+(\lambda-k)_1r_k+(\lambda-k+1)_2r_{k-1}+(\lambda-k+2)_3r_{k-2}+\cdots+(\lambda)_{k+1}\} \\ \quad -A''\Big\{r_{k+1}+1.(2\lambda-2k-1)r_k+\frac{(\lambda-k)_1}{2}\cdot 2(2\lambda-2k)r_{k-1} \\ \quad +\frac{(\lambda-k+1)_2}{3}\cdot 2^2(2\lambda-2k+1)r_{k-2}+\cdots+\frac{(\lambda-1)_k}{k+1}2^k(2\lambda-2k+k-1)\Big\} \\ \quad +E'\{r_k+(\lambda-k)_1r_{k-1}+(\lambda-k+1)_2r_{k-2}+\cdots+(\lambda-1)_k\} \\ \quad -z\{r_k+2(\lambda-k)_1r_{k-1}+2^2(\lambda-k+1)_2r_{k-2}+\cdots+2^k(\lambda-1)_k\}. \end{cases}$$

Durch Subtraction der Gleichung (18.) von (19.) folgt:

$$(20.)\quad \begin{cases} c(\sigma_{k+1}-s_{k+1}) = c(\lambda-k)r_k+A'\sum_1^k{}_h(\lambda-k+h)_{h+1}r_{k-h} \\ \quad -A''\sum_1^k{}_h\frac{(\lambda-k+h-1)_h}{h+1}\{(2^{h+1}-1)(\lambda-k)+2^h(h-1)+1\} \\ \quad +E'\sum_1^k{}_h(\lambda-k+h-1)_hr_{k-h}-z\sum_1^k{}_h(2^h-1)(\lambda-k+h-1)_hr_{k-h}. \end{cases}$$

Wenden wir uns jetzt zur Gleichung:

$$(12.)\qquad N_r = N_l,$$

deren linke und rechte Seite durch (14.) und (16.) gegeben sind, und ver-

gleichen darin die Coefficienten von $n^{\lambda-k}$, so erhalten wir:

$$B''s_k+A''s_{k+1}+\frac{\gamma}{c}r_{k-1} = A''\sigma_{k+1}+\sigma_k z,$$

oder wenn B'' durch (17.) eliminirt wird:

(21.) $$A''c(\sigma_{k+1}-s_{k+1}-\lambda s_k)+cz(\sigma_k-s_k) = r_{k-1}\gamma.$$

In dieser Gleichung können die Differenzen $(\sigma_{k+1}-s_{k+1})$ und (σ_k-s_k), sowie s_k vermöge (20.) und (18.) linear durch die r_h ausgedrückt werden. Setzt man dann $k=1, 2, \ldots, \lambda$, so erhält man ein System von Gleichungen, deren erste und letzte folgende sind:

(22.) $$-A''cr_1+(\lambda)_2A'A''-(\lambda-1)_2A''A''-A''(E'-z)+cz\lambda = \gamma:$$

(23.) $$\begin{cases} |cz-A''\lambda(E'-z)|r_{\lambda-1}+z(A''\lambda+z+A'+E')(r_{\lambda-2}+r_{\lambda-3}+\cdots+r_1+1) \\ \qquad -z(A''+z)(2r_{\lambda-2}+2^2r_{\lambda-3}+\cdots+2^{\lambda-2}r_1+2^{\lambda-1}) = r_{\lambda-1}\gamma. \end{cases}$$

Im allgemeinen sind sie aber von folgender Form, worin die $\overset{h}{a}_i$ Constanten, die aus bekannten Grössen zusammensetzbar sind, bedeuten:

(24.) $$\begin{cases} \overset{1}{a}_1r_1+(\overset{1}{a}_0-\gamma) = 0, \\ \overset{2}{a}_2r_2+(\overset{2}{a}_1-\gamma)r_1+\overset{2}{a}_0 = 0, \\ \overset{3}{a}_3r_3+(\overset{3}{a}_2-\gamma)r_2+\overset{3}{a}_1r_1+\overset{3}{a}_0 = 0, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overset{\lambda-1}{a}_{\lambda-1}r_{\lambda-1}+(\overset{\lambda-1}{a}_{\lambda-2}-\gamma)r_{\lambda-2}+\cdots+\overset{\lambda-1}{a}_1r_1+\overset{\lambda-1}{a}_0 = 0, \\ (\overset{\lambda}{a}_{\lambda-1}-\gamma)r_{\lambda-1}+\overset{\lambda}{a}_{\lambda-2}r_{\lambda-2}+\cdots+\overset{\lambda}{a}_1r_1+\overset{\lambda}{a}_0 = 0. \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich eine Gleichung λten Grades für γ, nämlich:

(25.) $$\begin{vmatrix} \overset{\lambda}{a}_{\lambda-1}-\gamma & \overset{\lambda}{a}_{\lambda-2} & \overset{\lambda}{a}_{\lambda-3} & \ldots & \overset{\lambda}{a}_1 & \overset{\lambda}{a}_0 \\ \overset{\lambda-1}{a}_{\lambda-1} & (\overset{\lambda-1}{a}_{\lambda-2}-\gamma) & \overset{\lambda-1}{a}_{\lambda-3} & \ldots & \overset{\lambda-1}{a}_1 & \overset{\lambda-1}{a}_0 \\ 0 & \overset{\lambda-2}{a}_{\lambda-2} & (\overset{\lambda-2}{a}_{\lambda-3}-\gamma) & \ldots & \overset{\lambda-2}{a}_1 & \overset{\lambda-2}{a}_0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \overset{1}{a}_1 & (\overset{1}{a}_0-\gamma) \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung beginnt mit den Gliedern:

(26.) $$(-1)^\lambda\left\{\gamma^\lambda-\left(\sum_1^\lambda{}_k\,\overset{k}{a}_{k-1}\right)\gamma^{\lambda-1}+\cdots\right\}$$

und es möchte wohl ziemlich unbequem sein, die Gleichung (25.) vollständig zu entwickeln und dann aus ihr direct die Wurzeln zu erschliessen. Wir gelangen glücklicherweise auf indirecte Art zum Ziel.

§ 3.

Sei es gelungen, eine Wurzel der Gleichung (25.) nach Festsetzung von λ zu finden, und hiermit, vermöge der Gleichungen (24.) und (18.), die Function $\psi(n)$, wie sie durch (7.) dargestellt ist, wirklich aufzustellen. Dann darf natürlich, wenn q eine beliebige Constante, d. h. von n unabhängige Grösse ist, statt (7.) auch:

$$(27.) \qquad \psi(n) = \frac{(n^{\lambda-1}+r_1 n^{\lambda-2}+\cdots+r_{\lambda-1})(n+q)}{(n^{\lambda}+s_1 n^{\lambda-1}+\cdots+s_{\lambda})(n+q)}$$

gesetzt werden, oder nach Ausführung der Multiplication in Zähler und Nenner, wenn die Bezeichnungen

$$(28.) \qquad \begin{cases} r'_k = r_k + q r_{k-1}, & (k=1, 2, \ldots, \lambda) \\ s'_k = s_k + q s_{k-1}, & (k=1, 2, \ldots, \lambda+1) \end{cases}$$

insbesondere:

$$(29.) \qquad r'_1 = r_1+q, \quad r'_\lambda = q r_{\lambda-1}; \quad s'_1 = s_1+q, \quad s'_{\lambda+1} = q s_\lambda$$

eingeführt werden, auch:

$$(30.) \qquad \psi(n) = \frac{n^{\lambda}+r'_1 n^{\lambda-1}+\cdots+r'_\lambda}{n^{\lambda+1}+s'_1 n^{\lambda}+\cdots+s'_{\lambda+1}};$$

wir behaupten aber:

A) Es giebt *einen* und *nur* einen Werth von q, der es bewirkt, dass das in (18.) zusammengefasste Gleichungssystem richtig bleibt, wenn darin r' und s' (im Sinne von (28.) und (29.)) statt bez. r und s, und $\lambda+1$ statt λ gesetzt wird. Die Auffindung dieses Werthes von q bedarf nicht der Auflösung von (25.), sondern er ist direct angebbar, nämlich:

$$(31.) \qquad q = \frac{B''-(\lambda+1)A''}{A''}.$$

B) Es bleiben hiermit auch die Gleichungen (21.) oder (24.) für $\lambda+1$ statt λ und den *beibehaltenen* Werth von γ richtig, oder, präciser gesprochen: Wenn man das System (24.) für $\lambda+1$ statt λ bildet, wobei unter anderem: $z = B''-(\lambda+1)A''$ zu setzen ist, darin statt $r_1, r_2, \ldots, r_\lambda$ beziehungsweise die durch (28.) und (29.) gegebenen $r'_1, r'_2, \ldots, r'_\lambda$ substituirt und für γ den bisherigen Werth beibehält, so erhält man ein System richtiger Gleichungen.

Wir nehmen diese Behauptungen zuvörderst als erwiesen an, und ziehen daraus weitere Schlüsse.

Sei γ_λ der bisherige Werth von γ; ist nun das System $(24.)_{(\lambda+1)}$*) für r_1' als neues r_1, r_2' als neues r_2 etc. und $\gamma=\gamma_\lambda$ richtig, so genügt $\gamma=\gamma_\lambda$ auch der aus $(24.)_{(\lambda+1)}$ durch Elimination der r_h' entstehenden Gleichung $(25.)_{(\lambda+1)}$, d. h. *die Wurzel $\gamma=\gamma_\lambda$ der Gleichung λten Grades* (25.) *bleibt auch Wurzel der Gleichung* $(\lambda+1)$*-ten Grades* $(25.)_{(\lambda+1)}$.

Multiplicirt man ferner die rechte Seite der Gleichung (30.) oben und unten mit $n+q'$, wo

$$q' = \frac{B''-(\lambda+2)A''}{A''}, \tag{32.}$$

so dass für $\psi(n)$ die Form:

$$\psi(n) = \frac{n^{\lambda+1}+r_1''n^\lambda+\cdots+r_{\lambda+1}''}{n^{\lambda+2}+s_1''n^{\lambda+1}+\cdots+s_{\lambda+2}''} \tag{33.}$$

entsteht, so kann man die analogen Schlüsse wie früher machen und also folgern, dass $\gamma=\gamma_\lambda$, welches eine Wurzel der Gleichung (25.) war und Wurzel der Gleichung $(25.)_{(\lambda+1)}$ blieb, auch noch Wurzel der Gleichung $(25.)_{(\lambda+2)}$ ist. — Diese Schlussweise lässt sich beliebig weit fortsetzen.

Zur bequemeren Darstellung haben wir den Grad der Gleichung (25.) durch einen Index angezeigt; führen wir denselben noch als oberen Index für die r_h und s_h ein, so lassen sich im Anschluss an das eben Gesagte noch folgende Ergebnisse aussprechen:

I. Wenn man mittels der den Gleichungen (24.) entsprechenden und als $(24.)_{(\lambda+1)}$ zu bezeichnenden Gleichungen die Grössen $r_1^{\lambda+1}, r_2^{\lambda+1}, \ldots, r_\lambda^{\lambda+1}$ berechnet, indem für γ die Wurzel γ_λ der Gleichung $(25.)_{(\lambda+1)}$ genommen wird, so lässt sich der Bruch:

$$\psi(n) = \frac{n^\lambda+r_1^{\lambda+1}n^{\lambda-1}+\cdots+r_\lambda^{\lambda+1}}{n^{\lambda+1}+s_1^{\lambda+1}n^\lambda+\cdots+s_{\lambda+1}^{\lambda+1}}$$

durch $n+q$ (s. Gleichung (31.)) heben; berechnet man aus den Gleichungen $(24.)_{(\lambda+2)}$ die Grössen $r_1^{\lambda+2}, \ldots, r_{\lambda+1}^{\lambda+2}$, indem wiederum für γ die Wurzel γ_λ der Gleichung $(25.)_{(\lambda+2)}$ genommen wird, so lässt sich der Bruch:

$$\psi(n) = \frac{n^{\lambda+1}+r_1^{\lambda+2}n^\lambda+\cdots+r_{\lambda+1}^{\lambda+2}}{n^{\lambda+2}+s_1^{\lambda+2}n^{\lambda+1}+\cdots+s_{\lambda+2}^{\lambda+2}}$$

*) d. h. (24.) für $\lambda+1$ statt λ.

durch $(n+q)(n+q')$ (siehe die Gleichungen (31.) und (32.)) heben; — und so weiter fort, ***wobei immer der zurückbleibende Bruch die Function $\psi(n)$ für den Grad λ ist.***

II. Die Gleichung $(25.)_{(1)}$ hat *eine* Wurzel, sie sei γ_1; die Gleichung $(25.)_{(2)}$ hat die Wurzel γ_1 und ausserdem noch eine zweite γ_2; die Gleichung $(25.)_{(3)}$ hat die beiden Wurzeln γ_1, γ_2 und ausserdem noch eine dritte γ_3, überhaupt irgend eine Gleichung $(25.)_{(\lambda)}$ besitzt alle Wurzeln der vorangehenden $(25.)_{(\lambda-1)}$ und dazu noch eine ihr eigenthümliche, sozusagen primitive Wurzel.

Dadurch gewinnen wir ein Mittel, um die Wurzeln der Gleichung (25.) zu finden, ohne die Gleichung vollständig entwickeln und auflösen zu müssen. Wie nämlich aus (26.) hervorgeht, ist:

$$\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\lambda = \sum_1^\lambda{}_k\, a_{k-1}^k;$$

bilden wir also die rechts stehende Summe, was uns möglich sein wird, und bezeichnen sie mit $\Phi(\lambda)$, so ist

$$\gamma_\lambda = \Phi(\lambda)-\Phi(\lambda-1). \tag{34.}$$

§ 4.

Nachdem durch die Folgerungen I und II, insbesondere durch die Gleichung (34.) des vorigen Paragraphen die Tragweite der darin aufgestellten Behauptungen dargethan worden, unterbrechen wir die Reihe der Schlüsse, um diese Behauptungen selbst zu beweisen. Gemäss (18.) ist:

$$(35.)\quad \begin{cases} cs_k = cr_k+\{E'-(\lambda-k)A''-z\}r_{k-1} \\ \qquad -\sum_1^{k-1}{}_h\,\{(\lambda-k+h)_{h+1}A''+(\lambda-k+h)_h z\}\,r_{k-h-1}, \end{cases}$$

$$(36.)\quad \begin{cases} cs_{k-1} = cr_{k-1}+\{E'-(\lambda-k+1)A''-z\}\,r_{k-2} \\ \qquad -\sum_1^{k-1}{}_h\,\{(\lambda-k+h+1)_{h+1}A''+(\lambda-k+h+1)_h z\}\,r_{k-h-2}, \end{cases}$$

wobei die Summation in (36.) bis $k-1$, statt nur bis $k-2$, ausgeführt werden darf, weil der letzte Summand wegen des Factors r_{-1} verschwindet. Wir setzen jetzt in (35.) $\lambda+1$ an Stelle von λ, dadurch geht z wegen (17.) in $z-A''$ über, und die aus s_k und r_h $(h=1, 2, \ldots, k)$ hervorgehenden Grössen bezeichnen wir mit bez. s_k' und r_h'. Dann ist

$$(37.)\quad \begin{cases} cs_k' = cr_k'+\{E'-(\lambda-k)A''-z\}r_{k-1}' \\ \qquad -\sum_1^{k-1}{}_h\,\{(\lambda+1-k+h)_{h+1}A''+(\lambda+1-k+h)_h(z-A'')\}r_{k-h-1}'. \end{cases}$$

Mögen nun die Grössen r'_h die Bedeutung der durch die erste Gleichung (28.) gegebenen haben; soll dann s'_k die Bedeutung der durch die zweite Gleichung (28.) gegebenen gewinnen, so muss sich q so bestimmen lassen, dass aus den Gleichungen (35.) bis (37.) die folgende

$$c(s_k+qs_{k-1})-cs'_k = 0 \tag{38.}$$

hervorgeht. In dieser Differenz heben sich die Glieder mit r_k und r_{k-1} von selbst fort, und es ist:

$$\left\{\begin{aligned} c(s_k+qs_{k-1})-cs'_k = &-A''qr_{k-2}+\sum_1^{k-1}{}_h\{(\lambda-k+h)_hA''+(\lambda-k+h)_{h-1}z\}r_{k-h-1} \\ &-A''\sum_1^{k-1}{}_h(\lambda-k+h+1)_h(r_{k-h-1}+qr_{k-h-2}); \end{aligned}\right. \tag{39.}$$

setzt man in der Summe $\sum_1^{k-1}{}_h(\lambda-k+h+1)_hr_{k-h-2}$, welche aber auf die Grenzen 1 bis $k-2$ beschränkt werden kann, $h=\tau-1$, sodass sie für τ von 2 bis $k-1$ geht, dehnt sie nach unten hin bis $\tau=1$ aus, wodurch das erste Glied auf der rechten Seite von (39.) mit hineingezogen wird, und schreibt wieder h statt τ, so erhält man folgende Umformung:

$$\begin{aligned} c(s_k+qs_{k-1})-cs'_k = &\sum_1^{k-1}{}_h\{-A''q(\lambda-k+h)_{h-1} \\ &+A''((\lambda-k+h)_h-(\lambda-k+h+1)_h)+z(\lambda-k+h)_{h-1}\}r_{k-h-1} \\ = &(-A''q-A''+z)\sum_1^{k-1}{}_h(\lambda-k+h)_{h-1}r_{k-h-1}. \end{aligned}$$

Gilt also die Gleichung

$$A''(1+q)-z = 0, \tag{40.}$$

so verschwindet die rechte Seite der obigen Gleichung und unser Zweck ist erreicht; dies ist aber wegen (17.) der Fall, wenn

$$q = \frac{B''-(\lambda+1)A''}{A''} \tag{41.}$$

ist, welche Gleichung mit (31.) coincidirt.

Bezeichnet man ferner mit σ'_k dasjenige, was aus σ_k (siehe zweite Gleichung (10.)) hervorgeht, wenn darin $\lambda+1$ statt λ und s'_h im Sinne der zweiten Gleichung (28.) statt des allgemeinen $s_h^{\lambda+1}$ gesetzt wird, so ist:

$$\sigma'_k = s'_k+(\lambda-k+2)_1s'_{k-1}+(\lambda-k+3)_2s'_{k-2}+\cdots+(\lambda+1)_k \tag{42.}$$

und hier lässt sich die rechte Seite mit Rücksicht auf die zweite Gleichung (28.) bez. (29.) leicht durch σ_k und σ_{k-1} ausdrücken. Man kann

nämlich die zweite Gleichung (10.) und die aus ihr durch Substitution von $k-1$ an Stelle von k entstehende in folgender Art schreiben:

$$\begin{aligned}
\sigma_k &= s_k+\{(\lambda-k+2)_1-1\}s_{k-1}+\{(\lambda-k+3)_2-(\lambda-k+2)_1\}s_{k-2}+\cdots,\\
\sigma_{k-1} &= \qquad\qquad s_{k-1} \qquad\qquad +(\lambda-k+2)_1\, s_{k-2}+\cdots,\\
\sigma_{k-1} &= s_{k-1}+(\lambda-k+2)_1\times s_{k-2}+(\lambda-k+3)_2 \quad\times\quad s_{k-3}+\cdots.
\end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit bez. 1, 1, q und addirt die vertical unter einander stehenden Glieder, so erhält man genau die rechte Seite von (42.), also ist:

$$\sigma'_k = \sigma_k+(1+q)\sigma_{k-1}, \tag{43.}$$

wovon wir sofort Gebrauch machen werden.

Die Behauptung B) des § 3 lässt sich, wenn γ_λ eine Wurzel der Gleichung $(25.)_{(\lambda)}$ ist, nach (21.) durch folgende Gleichung ausdrücken:

$$A''c(\sigma'_{k+1}-s'_{k+1}-(\lambda+1)s'_k)+c(z-A'')(\sigma'_k-s'_k) = r'_{k-1}\gamma_\lambda, \tag{44.}$$

und die Richtigkeit derselben muss also bewiesen werden. Es ist aber nach (21.):

$$\begin{aligned}
A''c(\sigma_{k+1}-s_{k+1}-\lambda s_k) \;+cz(\sigma_k \;-s_k) \;&= r_{k-1}\gamma_\lambda,\\
A''c(\sigma_k \;-s_k \;-\lambda s_{k-1})+cz(\sigma_{k-1}-s_{k-1}) \;&= r_{k-2}\gamma_\lambda,
\end{aligned}$$

also, wenn die erstere mit 1, die zweite mit q multiplicirt und dann beide addirt werden:

$$A''c\{(\sigma_{k+1}+q\sigma_k)-s'_{k+1}-\lambda s'_k\}+cz\{(\sigma_k+q\sigma_{k-1})-s'_k\} = r'_{k-1}\gamma_\lambda. \tag{44ª.}$$

Zieht man von dieser richtigen Gleichung die vermuthete Gleichung (44.) ab, so entsteht nach geringer Zusammenziehung, als des Beweises bedürftige Gleichung die folgende:

$$A''c(\sigma_{k+1}+q\sigma_k-\sigma'_{k+1}+\sigma'_k)+cz(\sigma_k+q\sigma_{k-1}-\sigma'_k) = 0;$$

die linke Seite ist aber mittels (43.):

$$A''c(1+q)\sigma_{k-1}-cz\sigma_{k-1} = c\sigma_{k-1}(A''+A''q-z),$$

und dies ist nach Gleichung (40.) in der That gleich Null. Somit sind die unseren Schlüssen in § 3 vorangehenden Behauptungen erwiesen, und die Schlüsse selbst treten in Gültigkeit.

§ 5.

Um nunmehr an (34.) anknüpfen zu können, haben wir die Summe

$$\Phi(\lambda) = \sum_1^\lambda{}_k\, a_{k-1}^k$$

zu bilden.

Zu dem Zwecke suchen wir die Coefficienten $\overset{k}{a}_k$ und $\overset{k}{a}_{k-1}$ der ersten beiden Glieder der linken Seite von (21.) $\overset{k}{a}_k r_k$ und $\overset{k}{a}_{k-1} r_{k-1}$. Es ist gemäss (20.) und (18.):

$$c(\sigma_{k+1}-s_{k+1}) = c(\lambda-k)r_k+\left\{A'(\lambda-k+1)_2-A''\frac{(\lambda-k)(3\lambda-3k+1)}{2}\right.$$
$$\left.+(E'-z)(\lambda-k)\right\}r_{k-1}+\cdots,$$
$$cs_k = cr_k+\{(E'-z)-A''(\lambda-k)\}r_{k-1}+\cdots,$$
$$c(\sigma_k-s_k) = c(\lambda-k+1)r_{k-1}+\cdots.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen bez. mit A'', $-A''\lambda$, z, so giebt die Addition nach sehr leichten Umformungen:

$$(46.)\qquad \overset{k}{a}_k = -A''ck, \qquad (k=1,2,\ldots,\lambda-1)$$

$$(47.)\quad \begin{cases} \overset{k}{a}_{k-1} = A''\{A'(\lambda-k+1)_2-A''(3(\lambda-k+1)_2-(\lambda+1)(\lambda-k)_1) \\ \qquad -(E'-z)k\}+cz(\lambda-k+1)_1, \qquad (k=1,2,\ldots,\lambda) \end{cases}$$

woraus speciell:

$$(48.)\qquad \overset{\lambda}{a}_{\lambda-1} = cz-A''\lambda(E'-z).$$

Mittels der bekannten Formeln

$$\sum_{\lambda}^{1}{}_k(\lambda-k+1)_2 = \frac{(\lambda-1)\lambda(\lambda+1)}{1.2.3},$$
$$\sum_{\lambda}^{1}{}_k(\lambda-k+1)_1 = \sum_{1}^{\lambda}{}_k k = \frac{\lambda(\lambda+1)}{1.2}$$

folgt dann leicht:

$$\Phi(\lambda) = A'A''\frac{(\lambda-1)\lambda(\lambda+1)}{6}+(A'z-A''E')\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}$$

oder mittels Substitution der Werthe von z und E' aus (17.) und (11.):

$$\Phi(\lambda) = -A'A''\frac{\lambda(\lambda+1)(2\lambda+1)}{6}+(A'B''-A''B'-A'A'')\frac{\lambda(\lambda+1)}{2},$$

folglich

$$\Phi(\lambda-1) = -A'A''\frac{(\lambda-1)\lambda(2\lambda-1)}{6}+(A'B''-A''B'-A'A'')\frac{(\lambda-1)\lambda}{2},$$
$$\Phi(\lambda)-\Phi(\lambda-1) = -A'A''\lambda^2+(A'B''-A''B'-A'A'')\lambda$$

und somit nach (34.):

$$(49.)\qquad \gamma_\lambda = (A'B''-A''B'-A'A'')\lambda-A'A''\lambda^2.$$

Die Wurzeln der Gleichung (25.) $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_\lambda$, ***deren letzte keiner früheren Gleichung zukommt, bilden somit eine arithmetische Reihe zweiten Grades.***

Setzt man diese Werthe und insbesondere den letzten derselben γ_λ in die Gleichungen (24.) ein, so folgen im gegebenen Falle nach einander und linear, also ohne jede Schwierigkeit, die Grössen $r_1, \ldots, r_{\lambda-1}$*) und hieraus mittels (18.) die Grössen $s_1, \ldots, s_\lambda$, deren letzte, für $k = \lambda - 1$, $(r_\lambda = 0)$ den Werth hat:

$$(50.) \qquad s_\lambda = \frac{1}{c}\{(E'-z)r_{\lambda-1} - z(r_{\lambda-2}+r_{\lambda-3}+\cdots+r_1+1)\}.$$

Zur weiteren theoretischen Entwickelung machen wir von diesen Gleichungen (24.) nur soweit Gebrauch, dass wir die Grössen r_h und s_h mittels derselben nach fallenden Potenzen von γ entwickeln und nur den Coefficienten der höchsten Potenz feststellen. Sie ergeben:

$$\begin{aligned} \overset{1}{a}_1 r_1 &= \gamma + \cdots, \\ \overset{2}{a}_2 r_2 &= r_1\gamma + \cdots, \\ &\cdots\cdots \\ \overset{k}{a}_k r_k &= r_{k-1}\gamma + \cdots, \end{aligned}$$

also kommt wegen (46.):

$$(51.) \qquad r_k = (-1)^k \frac{\gamma^k}{k!(A''c)^k} + \cdots \qquad (k = 1, 2, \ldots, \lambda-1)$$

und weiter wegen (18.):

$$(52.) \qquad s_k = r_k + \cdots = (-1)^k \frac{\gamma^k}{k!(A''c)^k} + \cdots \qquad (k = 1, 2, \ldots, \lambda-1)$$

---

*) Wenn das Gleichungssystem (24.) bekannt ist, kann man daraus mittels der Methode, welche die Gleichung (44ª.) entstehen lässt, und mit Benutzung der aus (28.) folgenden:

$$\begin{aligned} r_k &= r'_k - qr'_{k-1} + q^2 r'_{k-2} \mp \cdots \pm q^k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, \lambda-1) \\ 0 &= r'_\lambda - qr'_{\lambda-1} + q^2 r'_{\lambda-2} \mp \cdots \pm q^\lambda \end{aligned}$$

das Gleichungssystem $(24.)_{(\lambda+1)}$ bilden. Die ersten $\lambda-1$ Gleichungen folgen unmittelbar in der genannten Art, die λte und die $(\lambda+1)$-te, indem man diese Gleichungen so beginnen lässt, wie es die Gleichungen (46.) (für $k = \lambda$) und (48.) (für $\lambda+1$ statt λ) bedingen. Schliesslich sind bei den r'_k die Striche wegzulassen oder durch den oberen Index $\lambda+1$ zu ersetzen, und statt γ_λ ist γ zu schreiben. Da nun sämmtliche Werthe $\overset{\lambda}{r}_k$ $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ etc. aus (49.) direct zu finden sind, so kann man auch die ***successive*** finden, ohne auf die Gleichungen (18.) bis (21.) zurückgehen zu müssen. — Vgl. aber die Anm. am Schlusse des § 5.

und wegen (50.):

$$(53.)\quad s_\lambda = \frac{E'-z}{c} r_{\lambda-1} + \cdots = (-1)^{\lambda-1} \frac{E'-z}{c} \frac{\gamma^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!\,(A''c)^{\lambda-1}} + \cdots.$$

Es haben somit, wenn das Vorhandensein niedrigerer Potenzen von γ durch Punkte angedeutet wird, Zähler und Nenner von $\psi(n)$ (s. (7.)) die Form:

$$(54.)\quad \begin{cases} \text{Zähler von } \psi(n) = Z(n,\ \lambda) \\ \qquad = n^{\lambda-1} - \left(\frac{\gamma}{A''c} + \cdots\right) n^{\lambda-2} + \left(\frac{\gamma^2}{2!(A''c)^2} + \cdots\right) n^{\lambda-3} \mp \cdots \\ \qquad\qquad + (-1)^{\lambda-1} \left(\frac{\gamma^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!\,(A''c)^{\lambda-1}} + \cdots\right) \end{cases}$$

$$(55.)\quad \begin{cases} \text{Nenner von } \psi(n) = N(n,\ \lambda) \\ \qquad = n^{\lambda} - \left(\frac{\gamma}{A''c} + \cdots\right) n^{\lambda-1} + \left(\frac{\gamma^2}{2!(A''c)^2} + \cdots\right) n^{\lambda-2} \mp \cdots \\ + (-1)^{\lambda-1} \left(\frac{\gamma^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!\,(A''c)^{\lambda-1}} + \cdots\right) n + (-1)^{\lambda-1} \left(\frac{E'-z}{c} \frac{\gamma^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!\,(A''c)^{\lambda-1}} + \cdots\right), \end{cases}$$

worin

$$(17.)\qquad z = B'' - \lambda A''.$$

Darin bedeutet γ irgend eine Wurzel der Gleichung (25.), doch liefert nur die letzte γ_λ einen nicht reducirbaren Ausdruck für $\psi(n)$.

Wir brauchen uns aber nicht mit der durch (54.) und (55.) angegebenen *Form* von $\psi(n)$ zu begnügen, sondern können uns vermöge der vorangehenden Betrachtungen für Zähler und Nenner von $\psi(n)$ vollständige und übersichtliche Ausdrücke schaffen. Dazu bezeichnen wir zunächst, um uns etwas bequemer ausdrücken zu können, die durch (31.) gegebene Zahl q für $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$ mit bez.: $-n_1, -n_2, -n_3, \ldots$ sodass überhaupt, indem wir als Index τ (statt λ, um Irrthümer zu vermeiden), gebrauchen:

$$(56.)\qquad n_\tau = -\frac{B''-(\tau+1)A''}{A''}$$

ist. Dann lassen sich die Resultate I des § 3 folgendermassen aussprechen:

Für $\gamma = \gamma_\lambda$ haben Zähler und Nenner von $\psi(n)$ keinen Factor gemeinsam;

für $\gamma = \gamma_{\lambda-1}$ ist ihr gemeinsamer Factor:

$$n - n_{\lambda-1};$$

für $\gamma = \gamma_{\lambda-2}$ sind ihre gemeinsamen Factoren:

$$n - n_{\lambda-2},\quad n - n_{\lambda-1};$$

für $\gamma = \gamma_{\lambda-3}$ sind ihre gemeinsamen Factoren:

$$n-n_{\lambda-3},\quad n-n_{\lambda-2},\quad n-n_{\lambda-1};$$

u. s. w.,

für $\gamma = \gamma_1$ sind ihre gemeinsamen Factoren:

$$n-n_1,\quad n-n_2,\quad \ldots,\quad n-n_{\lambda-1}.$$

Der für $\gamma = \gamma_\tau$ $(\tau < \lambda)$ nach Absondernng dieser Factoren in Zähler und Nenner übrig bleibende Bruch ist $\psi(n)$ (für τ statt λ) in unreducirbarer Form.

Aus dem Obigen ergiebt sich: Der Zähler sowie der Nenner verschwindet in jedem der folgenden Fälle, wobei die Klammern bedeuten, dass die beiden durch sie umschlossenen Gleichungen gleichzeitig gelten sollen:

$$(57.)\quad \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{matrix}\gamma=\gamma_{\lambda-1}\\ n=n_{\lambda-1}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\gamma=\gamma_{\lambda-2}\\ n=n_{\lambda-2}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\gamma=\gamma_{\lambda-3}\\ n=n_{\lambda-3}\end{matrix}\right\}\text{ etc. bis }\left\{\begin{matrix}\gamma=\gamma_1\\ n=n_1\end{matrix}\right\}\\ \qquad\left\{\begin{matrix}\gamma=\gamma_{\lambda-2}\\ n=n_{\lambda-1}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\gamma=\gamma_{\lambda-3}\\ n=n_{\lambda-2}\end{matrix}\right\}\text{ etc. bis }\left\{\begin{matrix}\gamma=\gamma_1\\ n=n_2\end{matrix}\right\}\\ \qquad\qquad\left\{\begin{matrix}\gamma=\gamma_{\lambda-3}\\ n=n_{\lambda-1}\end{matrix}\right\}\text{ etc. bis }\left\{\begin{matrix}\gamma=\gamma_1\\ n=n_3\end{matrix}\right\}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\left\{\begin{matrix}\gamma=\gamma_1\\ n=n_{\lambda-1}\end{matrix}\right\}. \end{array}\right.$$

Dies führt zur Aufstellung muthmasslicher Ausdrücke für Zähler und Nenner, welche wir nunmehr von einander trennen.

Der Zähler von $\psi(n)$. Wir behaupten, dass der Zähler durch folgenden Ausdruck gegeben wird, worin die C_h sogleich anzugebende Constanten bedeuten, und welcher Ausdruck für $\gamma = \gamma_\lambda$, siehe Gleichung (49.), in seiner unreducirbaren Form*) erscheint:

$$(58.)\quad \left\{\begin{array}{rl} Z(n,\ \lambda) = & C_1(n-n_{\lambda-1})\ldots(n-n_3)(n-n_2)(n-n_1)\\ & +C_2(n-n_{\lambda-1})\ldots(n-n_3)(n-n_2)(\gamma-\gamma_1)\\ & +C_3(n-n_{\lambda-1})\ldots(n-n_3)(\gamma-\gamma_2)(\gamma-\gamma_1)\\ & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ & +C_\lambda(\gamma-\gamma_{\lambda-1})\ldots(\gamma-\gamma_3)(\gamma-\gamma_2)(\gamma-\gamma_1). \end{array}\right.$$

---

*) d. h. in einer derartigen, dass für $\gamma = \gamma_\lambda$ Zähler und Nenner keinen Factor mit einander gemeinsam haben.

Denkt man sich die einzelnen Zeilen ausmultiplicirt, so beginnen die Producte mit $n^{\lambda-1}$, $n^{\lambda-2}\gamma$, $n^{\lambda-3}\gamma^2$, ..., $\gamma^{\lambda-1}$, und zwar kommt jeder dieser Terme nur dieses eine Mal vor. Daher ergiebt der Vergleich von (58.) mit (54.), *falls überhaupt die Form von* (58.) *richtig ist,* die Werthe:

$$(59.) \qquad C_1 = 1, \quad C_k = (-1)^{k-1}\frac{1}{(k-1)!\,(A''c)^{k-1}}. \qquad (k = 2, 3, \ldots, \lambda)$$

Nehmen wir nun an, dass diese Werthe in (58.) substituirt seien, so folgt die Richtigkeit von (58.) sehr einfach, wenn wir den Schluss von λ auf $\lambda+1$ mit dem Satze verbinden, dass eine ganze algebraische Function $m$ten Grades einer Variablen dann bestimmt ist, wenn sie für m Werthe dieser Variablen bekannte Werthe besitzt, und wenn ausserdem der Coefficient ihrer $m$ten Potenz gegeben ist.

Wir nehmen nun an, dass die Gleichung (58.) richtig sei, wenn statt λ darin 1 oder 2 etc. oder $\lambda-1$ gesetzt wird, dass also z. B. die Gleichungen, von deren Gültigkeit man sich direct überzeugen kann:

$$\mathbf{Z}(n,\ 1) = 1; \quad \mathbf{Z}(n,\ 2) = (n-n_1) - \frac{(\gamma_2-\gamma_1)}{A''c}$$

richtig seien. Ferner ist die rechte Seite von (58.) eine ganze algebraische Function $(\lambda-1)$-ten Grades von γ; ertheilen wir nun dem γ successive die Werthe $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_{\lambda-1}$, so erhalten wir bez. für $\mathbf{Z}(n, \lambda)$ die Werthe:

$$\begin{aligned}
&(n-n_{\lambda-1})\ldots(n-n_1);\\
&(n-n_{\lambda-1})\ldots(n-n_2)\{(n-n_1)+C_2(\gamma_2-\gamma_1)\} \;=\; (n-n_{\lambda-1})\ldots(n-n_2)\mathbf{Z}(n,\ 2);\\
&(n-n_{\lambda-1})\ldots(n-n_3)\mathbf{Z}(n,\ 3);\\
&\text{etc.}\\
&(n-n_{\lambda-1})\mathbf{Z}(n,\ \lambda-1);
\end{aligned}$$

diese Werthe sind es aber, welche dem kurz vor den Gleichungen (57.) hervorgehobenen Passus zufolge in der That durch die obigen Substitutionen erzielt werden sollten. Endlich ist der Coefficient von $\gamma^{\lambda-1}$ gleich dem Coefficienten hiervon in (54.) und somit die Richtigkeit des Ausdrucks auf der rechten Seite von (58.) bewiesen, und zugleich auch bewiesen, dass er, weil identisch mit (54.) für $\gamma = \gamma_\lambda$ die nicht reducirbare Form von $\mathbf{Z}(n, \lambda)$ liefert.

Der Nenner von $\psi(n)$. Wir führen zunächst eine neue abkürzende Bezeichnung ein. Der im letzten Summand von (55.) stehende Factor ist

nach (11.) und (17.):

$$\frac{E'-z}{c} = \frac{A'+B'-B''+\lambda A''}{c}$$

d. i. nach (56.):

$$= \frac{1}{c}(A'+B'+A''n_{\lambda-1}),$$

und nun setzen wir:

$$(60.) \qquad H_\tau = \frac{1}{c}(A'+B'+A''n_\tau);$$

dann schliesst also $N(n, \lambda)$ in (55.) mit

$$(61.) \qquad (-1)^{\lambda-1}\Big(H_{\lambda-1}\frac{\gamma^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!(A''c)^{\lambda-1}}+\cdots\Big).$$

Für $\lambda = 1$ ist somit

$$(62.) \qquad N(n,\ 1) = n+H_0 = n+\frac{A'+B'+A''-B''}{c},$$

was mit der zweiten Gleichung (8.) übereinstimmt. Für $\lambda = 2$ ist nach (55.) mit vorübergehender Einführung zweier sehr bald herausfallender Constanten D_1 und D_2:

$$N(n,\ 2) = n^2-\Big(\frac{\gamma}{A''c}+D_1\Big)n-\Big(H_1\frac{\gamma}{A''c}+D_2\Big);$$

gemäss (57.) ist aber

$$0 = n_1^2-\Big(\frac{\gamma_1}{A''c}+D_1\Big)n_1-\Big(H_1\frac{\gamma_1}{A''c}+D_2\Big)$$

also durch Subtraction bei Beachtung der Identität:

$$\gamma n-\gamma_1 n_1 = n(\gamma-\gamma_1)+\gamma_1(n-n_1):$$

$$N(n,\ 2) = (n-n_1)\Big(n+n_1-\frac{\gamma_1}{A''c}-D_1\Big)-\frac{(\gamma-\gamma_1)}{A''c}(n+H_1).$$

Nun muss aber für $\gamma = \gamma_1$:

$$N(n,\ 2) = (n-n_1)N(n,\ 1)$$

sein, also ist der Factor von $(n-n_1)$ nach (62.) $(n+H_0)$ und somit:

$$(63.) \qquad N(n,\ 2) = (n-n_1)(n+H_0)-\frac{(\gamma-\gamma_1)}{A''c}(n+H_1).$$

Die Ausdrücke (62.) und (63.) führen zur vermuthungsweisen Aufstellung

folgender allgemeinen Gleichung:

$$(64.)\quad \left\{\begin{aligned} N(n,\lambda) = {} & C_1(n-n_{\lambda-1})\dots(n-n_3)(n-n_2)(n-n_1)(n+H_0)\\ & +C_2(n-n_{\lambda-1})\dots(n-n_3)(n-n_2)(\gamma-\gamma_1)(n+H_1)\\ & +C_3(n-n_{\lambda-1})\dots(n-n_3)(\gamma-\gamma_2)(\gamma-\gamma_1)(n+H_2)\\ & +\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ & +C_\lambda(\gamma-\gamma_{\lambda-1})\dots(\gamma-\gamma_3)(\gamma-\gamma_2)(\gamma-\gamma_1)(n+H_{\lambda-1}), \end{aligned}\right.$$

worin die Grössen C_h durch (59.) gegeben sind. Der Beweis dieser Gleichung, deren rechte Seite wieder eine ganze Function $(\lambda-1)$-ten Grades von γ ist, lässt sich genau wie derjenige der Gleichung (58.) führen und möge deshalb nicht weiter ausgeführt werden*).

§ 6.

Wir beschliessen die Betrachtungen über diese Klasse von $\psi(n)$ mit zwei speciellen Sätzen:

I. *Der Ausdruck*

$$\frac{A''(n-1)+B''}{c}\psi(n)+1$$

lässt sich für $\gamma=\gamma_\lambda$, durch $A'(n+\lambda)+B'$ ohne Rest dividiren.

Beweis. Da wir es in Zähler und Nenner von $\psi(n)$ mit ganzen Functionen von n zu thun haben, so wird der Beweis geführt sein, wenn die im Satze genannte Summe gleichzeitig mit $A'(n+\lambda)+B'$ verschwindet. Wir transformiren, um dies zu zeigen, Zähler und Nenner von $\psi(n)$, also $Z(n,\lambda)$ und $N(n,\lambda)$ unter der Voraussetzung:

$$(65.)\qquad A'n = -A'\lambda-B'.$$

Es ist nach (56.), (60.) und (2.):

$$(66.)\qquad A''(n-n_\tau) = A''(n-\tau-1)+B'',$$

$$(66_a.)\qquad c(n+H_\tau) = A'(n+1)+B'-A''(n-n_\tau),$$

also wegen (65.):

$$A'A''(n-n_\tau) = A'B''-A''(A'\lambda+B'+A'(\tau+1))$$

und

$$(67.)\qquad c(n+H_\tau) = -A'(\lambda-1)-A''(n-n_\tau),$$

---

*) Die Gleichungen (58.) und (64.), deren rechte Seiten nach Potenzen von n entwickelt werden können, machen die anderweitige Berechnung der Grössen r_h und s_h überflüssig.

ferner wegen (49.):

$$\gamma_\lambda - \gamma_\tau = (\lambda-\tau)\{A'B''-A''B'-A'A''(\lambda+\tau+1)\},$$

daher haben wir

$$\gamma_\lambda - \gamma_\tau = A'A''(\lambda-\tau)(n-n_\tau).$$

Demgemäss wird nach (58.) mit Benutzung der Werthe in (59.):

$$(68.)\quad \begin{cases} Z(n,\ \lambda) = (n-n_{\lambda-1})(n-n_{\lambda-2})\dots(n-n_1) \\ \quad \times\left\{1-(\lambda-1)_1\frac{A'}{c}+(\lambda-1)_2\left(\frac{A'}{c}\right)^2\mp\dots\pm(\lambda-1)_{\lambda-1}\left(\frac{A'}{c}\right)^{\lambda-1}\right\} \\ \qquad = (n-n_{\lambda-1})(n-n_{\lambda-2})\dots(n-n_1)\left(-\frac{A''}{c}\right)^{\lambda-1}. \end{cases}$$

Soll nun $c.N(n,\ \lambda)$ gebildet werden, so sind, wie (64.) zeigt, die einzelnen Summanden in der Klammer der rechten Seite von (68.), mit bez. $c(n+H_0)$, $c(n+H_1)$, ..., $c(n+H_{\lambda-1})$, wofür die Werthe aus (67.) und (66.) zu entnehmen sind, zu multipliciren. Benutzt man nun die identische Gleichung:

$$1-2(m)_1x+3(m)_2x^2-4(m)_3x^3\pm\dots = (1-x)^{m-1}(1-(m+1)x),$$

woraus:

$$1-2(\lambda-1)_1\frac{A'}{c}+3(\lambda-1)_2\left(\frac{A'}{c}\right)^2\mp\dots = \left(-\frac{A''}{c}\right)^{\lambda-2}\left(-\frac{A''+(\lambda-1)A'}{c}\right)$$

folgt, so ergiebt sich:

$$(69.)\quad \begin{cases} cN(n,\ \lambda) = -(n-n_{\lambda-1})(n-n_{\lambda-2})\dots(n-n_1) \\ \quad \times\left\{\left(-\frac{A''}{c}\right)^{\lambda-1}(A''n+B''+(\lambda-1)A')+\frac{A''}{c}\left(-\frac{A''}{c}\right)^{\lambda-2}(A''+(\lambda-1)A')\right\} \\ \qquad = -(n-n_{\lambda-1})\dots(n-n_1)\left(-\frac{A''}{c}\right)^{\lambda-1}(A''(n-1)+B''). \end{cases}$$

Daher ist unter der Voraussetzung (65.):

$$(70.)\qquad \frac{1}{c}\psi(n) = -\frac{1}{A''(n-1)+B''}$$

und daher

$$\frac{A''(n-1)+B''}{c}\psi(n)+1 = 0,$$

w. z. b. w.

II. *Der Ausdruck*

$$A''n+B''+\frac{\gamma}{c}\psi(n)$$

lässt sich für $\gamma=\gamma_\lambda$ durch $A''(n-\lambda)+B''$ ohne Rest dividiren.

Beweis: Nach (66.) ist:

$$A''(n-n_{\lambda-1}) = A''(n-\lambda)+B'',$$

folglich:

$$\psi(n) = \frac{A''Z(n,\ \lambda)}{A''N(n,\ \lambda)} = \frac{\{A''(n-\lambda)+B''\}\Psi_1+A''C_\lambda(\gamma-\gamma_{\lambda-1})\ldots(\gamma-\gamma_1)}{\{A''(n-\lambda)+B''\}\Psi_2+A''C_\lambda(\gamma-\gamma_{\lambda-1})\ldots(\gamma-\gamma_1)(n+H_{\lambda-1})},$$

worin zur Abkürzung mit Ψ_1 und Ψ_2 die beiden Summen:

$$\Psi_1 = \sum_{\tau=1}^{\lambda-1} C_\tau(n-n_{\lambda-2})\ldots(n-n_\tau)(\gamma-\gamma_{\tau-1})\ldots(\gamma-\gamma_1),$$

$$\Psi_2 = \sum_{\tau=1}^{\lambda-1} C_\tau(n-n_{\lambda-2})\ldots(n-n_\tau)(\gamma-\gamma_{\tau-1})\ldots(\gamma-\gamma_1)(n+H_{\tau-1})$$

bezeichnet sind. Da nun

$$A''n+B'' = A''(n-\lambda)+B''+A''\lambda,$$

so ist nur der Ausdruck $A''c\lambda+\gamma_\lambda\psi(n)$ zu bilden. Der Zähler desselben er sei Z, hat den nachfolgenden Werth, während der Nenner sich nicht durch $A''(n-\lambda)+B''$ heben lässt.

$$Z = (A''(n-\lambda)+B'')(\gamma_\lambda\Psi_1+A''c\lambda\Psi_2)$$
$$+A''C_\lambda(\gamma-\gamma_{\lambda-1})\ldots(\gamma-\gamma_1)\{A''c\lambda(n+H_{\lambda-1})+\gamma_\lambda\};$$

aber nach (66.) und (66_a.) ist:

$$c(n+H_{\lambda-1}) = A'(n+1)+B'-(A''(n-\lambda)+B'')$$

und

$$\gamma_\lambda = (A'B''-A''B'-A'A'')\lambda-A'A''\lambda^2 \qquad (49.)$$

also wird die obige Klammer:

$$\{A''c\lambda(n+H_{\lambda-1})+\gamma_\lambda\} = c\lambda(A''(n-\lambda)+B''),$$

womit der Satz bewiesen ist.

§ 7.

Der allgemeine Ausdruck für die Function $\psi(n)$ zweiter Klasse, welche mit wachsendem n dem Grenzwerthe $\frac{c^2}{\gamma}n$ zustrebt, lässt sich mit Hülfe der Gleichungen für γ_λ, n_τ, H_τ, C_k, also bez. (49.), (56.), (60.), (59.) sehr leicht bilden. Nach den Ausführungen des § 1 haben wir nämlich in diesen Gleichungen zuerst $A_1'A_1''B_1'B_1''$ an Stelle von $A'A''B'B''$ treten zu lassen und dann die neuen Constanten vermöge der Gleichungen (4.) durch die alten auszudrücken, wobei c die alte Bedeutung behält. Hierdurch möge γ in δ, n_τ in ν_τ, H_τ in H_τ, C_k in K_k übergehen, und für diese Grössen

gelten dann die Gleichungen:

$$(71.) \qquad \delta_\lambda = (A''B'-A'B''+A'A'')\lambda - A'A''\lambda^2,$$

$$(72.) \qquad \nu_\tau = -\frac{B'-\tau A'}{A'}, \quad H_\tau = -\frac{1}{c}(B''+A'\nu_\tau),$$

$$(73.) \qquad K_1 = 1, \quad K_k = \frac{1}{(k-1)!(A'c)^{k-1}}. \qquad (k=2, 3, \ldots, \lambda)$$

Nach den Gleichungen (58.) und (64.) lässt sich $\Psi(n)$ finden und hieraus nach (6.) $\psi(n)$. Setzen wir demnach:

$$(74.) \quad \begin{cases} Z(n, \lambda) = K_1(n-\nu_{\lambda-1})\ldots(n-\nu_3)(n-\nu_2)(n-\nu_1)(n+H_0) \\ \qquad + K_2(n-\nu_{\lambda-1})\ldots(n-\nu_3)(n-\nu_2)(\delta_\tau-\delta_1)(n+H_1) \\ \qquad + K_3(n-\nu_{\lambda-1})\ldots(n-\nu_3)(\delta_\tau-\delta_2)(\delta_\tau-\delta_1)(n+H_2) \\ \qquad + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \qquad + K_\lambda(\delta_\tau-\delta_{\lambda-1})\ldots(\delta_\tau-\delta_3)(\delta_\tau-\delta_2)(\delta_\tau-\delta_1)(n+H_{\lambda-1}) \end{cases}$$

und

$$(75.) \quad \begin{cases} N(n, \lambda) = K_1(n-\nu_{\lambda-1})\ldots(n-\nu_3)(n-\nu_2)(n-\nu_1) \\ \qquad + K_2(n-\nu_{\lambda-1})\ldots(n-\nu_3)(n-\nu_2)(\delta_\tau-\delta_1) \\ \qquad + K_3(n-\nu_{\lambda-1})\ldots(n-\nu_3)(\delta_\tau-\delta_2)(\delta_\tau-\delta_1) \\ \qquad + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \qquad + K_\lambda(\delta_\tau-\delta_{\lambda-1})\ldots(\delta_\tau-\delta_3)(\delta_\tau-\delta_2)(\delta_\tau-\delta_1), \end{cases}$$

so ist:

$$(76.) \qquad \psi(n) = \frac{c^2}{\delta_\tau}\frac{Z(n, \lambda)}{N(n, \lambda)}.$$

In den Formeln (74.), (75.) und (76.) kann τ beliebig gleich 1, 2, ..., λ genommen werden, aber nur für $\tau = \lambda$ haben Zähler und Nenner von $\psi(n)$ keinen Factor gemeinsam, und sind sie, ersterer vom λten, letzterer vom $(\lambda-1)$-ten Grade für n.

Schlussbemerkung. Vergleicht man die Gleichungen (49.) und (71.) mit einander, so sieht man, dass die rechte Seite der letzteren entsteht, wenn man in der rechten Seite der ersteren $-\lambda$ an Stelle von λ setzt. Man erhält also rationale Werthe von $\psi(n)$, wenn man in (49.) für λ positive oder negative ganze Zahlen setzt. Die Frage liegt nun nahe: Wie ist es, wenn $\lambda = 0$, also $\gamma = 0$ und $C = 0$ gesetzt wird? Die Antwort aber lautet:

Die Gleichung für $\psi(n)$:

$$(A''n+B'')\psi(n+1)-(A'(n+1)+B')\psi(n)+(A'-A'') = 0$$

besitzt keine rationale Auflösung.

Zusammenstellung der Formeln des Herrn *S. Gundelfinger* zum Hauptaxenproblem der Flächen zweiter Ordnung und zweiter Klasse bei Zugrundelegung von projectiven Coordinaten.

(Fortsetzung aus Band 119 Heft III.)

(Von Herrn *Ph. Brückel* in Darmstadt.)

Dritter Theil.

Hauptaxenproblem für die Flächen zweiter Klasse.

Es sei

$$\varphi(u, u) \equiv \sum_1^4{}_i \sum_1^4{}_k e_{ik} u_i u_k = 0 \quad (e_{ik} = e_{ki})$$

die Gleichung einer Fläche II. Grades in Ebenencoordinaten und

$$\Phi(x, x) \equiv \sum_1^4{}_i \sum_1^4{}_k E_{ik} x_i x_k$$

die adjungirte Form von $\varphi(u, u)$. Ist ferner

$$(1.) \qquad \mu\varphi(u, u) - \omega(u, u) \equiv \sum_1^4{}_i \sum_1^4{}_k \gamma_{ik} u_i u_k,$$

wobei

$$\gamma_{ik} = \mu e_{ik} - \omega_{ik},$$

so liefert deren Determinante (analog den Entwickelungen im II. Theil)

$$(2.) \quad \delta(\mu) \equiv \Sigma\pm(\gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33}\gamma_{44}) = \delta_4\mu^4 - \delta_3\mu^3 + \delta_2\mu^2 - \delta_1\mu + \delta_0,$$

gleich Null gesetzt, eine biquadratische Gleichung, die nur reelle Wurzeln $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 = 0$ besitzt, und deren Coefficienten folgende Werthe haben:

$$(3.) \begin{cases} \delta_4 = \Sigma\pm(e_{11}e_{22}e_{33}e_{44}), \quad \delta_3 = \sum_{i,k=1}^4 E_{ik}\omega_{ik}, \quad \delta_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^4 \sum_{l,m=1}^4 \frac{\partial^2\delta_4}{\partial e_{ik}\partial e_{lm}}\omega_{ik}\omega_{lm}, \\ \delta_1 = \tau\varphi(p, p), \quad \delta_0 = 0. \end{cases}$$

Ferner wird von folgenden Formen Gebrauch gemacht:

$$(4.)\qquad \begin{cases} c(\mu) \equiv -\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}_{\gamma_{ik}} = c_3\mu^3 - c_2\mu^2 + c_1\mu - c_0, \\ \zeta(\mu) \equiv -\begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}\varphi'(u) \end{pmatrix}_{\gamma_{ik}} = \zeta_3\mu^3 - \zeta_2\mu^2 + \zeta_1\mu - \zeta_0, \\ \gamma(\mu) \equiv -\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\varphi'(u) \\ \frac{1}{2}\varphi'(u) \end{pmatrix}_{\gamma_{ik}} = \gamma_3\mu^3 - \gamma_2\mu^2 + \gamma_1\mu - \gamma_0. \end{cases}$$

Wegen des Zusammenhanges vergleiche man die entsprechenden Werthe der C_i, Z_i, Γ_i bei den Flächen II. Ordnung im Falle $A \gtrless 0$. Ersetzt man hier die e_{ik} durch die früheren A_{ik}, so gehen die c_i, γ_i, ζ_i in die C_i, Z_i, Γ_i über, vorausgesetzt, dass $A \equiv \Sigma \pm a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} \gtrless 0$, und dass $\mu A = \lambda$ gesetzt wird.

Schliessen wir wiederum vorerst den Fall aus, dass die Gleichung $\delta(\mu) = 0$ gleiche Wurzeln habe, so sind folgende Fälle zu unterscheiden.

I. $\varphi(p, p) \gtrless 0$.

1) $\delta_4 = \Sigma \pm (e_{11}e_{22}e_{33}e_{44}) \gtrless 0$.

Durch Partialbruchzerlegung erhält man

$$(5.)\qquad \frac{c(\mu)}{\delta(\mu)} = \frac{c(\mu_1)}{\delta'(\mu_1)} \cdot \frac{1}{\mu - \mu_1} + \frac{c(\mu_2)}{\delta'(\mu_2)} \cdot \frac{1}{\mu - \mu_2} + \frac{c(\mu_3)}{\delta'(\mu_3)} \cdot \frac{1}{\mu - \mu_3} + \frac{c(0)}{\delta'(0)} \cdot \frac{1}{\mu},$$

worin

$$\frac{c(0)}{\delta'(0)} = \frac{p_x^2}{\varphi(p, p)}.$$

Da ausserdem $c(\mu_i)$ $[i = 1, 2, 3]$ ein vollständiges Quadrat ist, so kann man setzen

$$\frac{c(\mu_i)}{\delta'(\mu_i)\mu_i} = (u_1^{(i)}x_1 + u_2^{(i)}x_2 + u_3^{(i)}x_3 + u_4^{(i)}x_4)^2 = X_i^2 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

und erhält

$$(6.)\qquad \frac{c(\mu)}{\delta(\mu)} = \frac{\mu_1 X_1^2}{\mu - \mu_1} + \frac{\mu_2 X_2^2}{\mu - \mu_2} + \frac{\mu_3 X_3^2}{\mu - \mu_3} + \frac{X_4^2}{\varphi(p, p)} \cdot \frac{1}{\mu}.$$

Die speciellen Werthe $\mu = \infty$ resp. $\mu = 0$ liefern hieraus für die Adjungirten der $\varphi(u, u)$ und $\omega(u, u)$:

$$(7.)\qquad \frac{\Phi(x, x)}{\Sigma \pm (e_{11}e_{22}e_{33}e_{44})} = \mu_1 X_1^2 + \mu_2 X_2^2 + \mu_3 X_3^2 + \frac{1}{\varphi(p, p)} X_4^2,$$

$$\Omega(x, x) = \tau X_4^2.$$

Ersetzt man nun in den X_i $(i = 1, 2, 3)$ die x_i durch $\frac{1}{2}\omega'(u_i)$, so mögen die dadurch entstehenden Ausdrücke mit U_i $(i = 1, 2, 3)$, und $\varphi(p, u) : \varphi(p, p)$

mit U_4 bezeichnet werden; dann erhält man, wenn man in den X_i $(i=1, 2, 3, 4)$ die x_i durch $\frac{1}{2}\varphi'(u_i)=\varphi_i$ ersetzt, die Werthe

$$\frac{U_1}{\mu_1},\quad \frac{U_2}{\mu_2},\quad \frac{U_3}{\mu_3},\quad \varphi(p,\ p)U_4.$$

Daraus folgt

$$(8.)\qquad -\binom{\varphi}{\varphi}_{\gamma_{ik}} : \delta(\mu) = \frac{U_1^2}{\mu_1(\mu-\mu_1)}+\frac{U_2^2}{\mu_2(\mu-\mu_2)}+\frac{U_3^2}{\mu_3(\mu-\mu_3)}+\frac{\varphi(p,\ p)U_4^2}{\mu},$$

sodass

$$\frac{\gamma(\mu_i)}{\delta'(\mu_i)} = \frac{U_i^2}{\mu_i}. \qquad (i=1, 2, 3)$$

Analog zu (13.) in § 16 der „Kegelsch." ist nun

$$(9.)\qquad -\binom{\varphi}{\varphi}_{\gamma_{ik}}\cdot\mu^2 : \delta(\mu) = \omega(u,\ u)+\mu\varphi(u,\ u)-\binom{\omega}{\omega}\cdot\frac{1}{\delta(\mu)},$$

folglich

$$(10.)\qquad \begin{cases} \omega(u,\ u)+\mu\varphi(u,\ u)-\binom{\omega}{\omega}\cdot\dfrac{1}{\delta(\mu)} \\ \qquad = \mu^2\left\{\dfrac{U_1^2}{\mu_1(\mu-\mu_1)}+\dfrac{U_2^2}{\mu_2(\mu-\mu_2)}+\dfrac{U_3^2}{\mu_3(\mu-\mu_3)}+\dfrac{\varphi(p,\ p)U_4^2}{\mu}\right\}. \end{cases}$$

Entwickelt man hierin auf der rechten Seite nach absteigenden Potenzen von μ, so erhält man durch Vergleichen der beiderseitigen Coefficienten von μ^1 resp. μ^0

$$(11.)\qquad \begin{cases} \text{a)}\quad \varphi(u,\ u) = \dfrac{U_1^2}{\mu_1}+\dfrac{U_2^2}{\mu_2}+\dfrac{U_3^2}{\mu_3}+\varphi(p,\ p)U_4^2, \\ \text{b)}\quad \omega(u,\ u) = U_1^2+U_2^2+U_3^2. \end{cases}$$

Ersetzt man in (6.) die x_i durch $x_i+\nu\varphi_i$, so entsteht durch Vergleichen der Coefficienten von ν^1

$$(12.)\qquad -\binom{x}{\varphi_i}_{\gamma_{ik}} : \delta(\mu) = \frac{U_1X_1}{\mu-\mu_1}+\frac{U_2X_2}{\mu-\mu_2}+\frac{U_3X_3}{\mu-\mu_3}+\frac{U_4X_4}{\mu},$$

wobei

$$(13.)\qquad U_iX_i = -\binom{x}{\varphi_i}_{\gamma_{ik}}\cdot\frac{1}{\delta'(\mu_i)}. \qquad (i=1, 2, 3)$$
$$\mu=\mu_i$$

Die Gleichung

$$\binom{x}{\varphi_i}_{\gamma_{ik}} = 0, \quad \text{worin} \quad \gamma_{ik}=\mu^{(l)}e_{ik}-\omega_{ik}, \qquad (l=1, 2, 3)$$

repräsentirt für beliebig fixirte u_i in variablen x_i die Gleichung der Hauptebene $X_i=0$ und für beliebig fixirte x_i in variablen u_i die Gleichung des zugehörigen Normalencentrums.

Multiplicirt man (12.) mit μ und setzt man nachher $\mu = \infty$, so ergiebt sich

$$(13^a.) \quad u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4 = U_1X_1+U_2X_2+U_3X_3+U_4X_4.$$

Die Bedeutung der Gleichungen in (11^b.) und (13^a.) ergiebt sich aus den Entwickelungen in § 3, A.

2) $\delta_4 = 0,\ \delta_3 \gtrless 0.$

$\delta(\mu)$ ist nunmehr eine cubische Function. Werden die Wurzeln der quadratischen Gleichung $\delta_3\mu^2-\delta_2\mu+\delta_1 = 0$ mit μ_1 und μ_2 bezeichnet, so erhält man analog 1) durch Partialbruchzerlegung

$$(14.) \quad \begin{cases} \dfrac{c(\mu)}{\delta(\mu)} = \dfrac{c(\mu_1)}{\delta'(\mu_1)}\cdot\dfrac{1}{\mu-\mu_1}+\dfrac{c(\mu_2)}{\delta'(\mu_2)}\cdot\dfrac{1}{\mu-\mu_2}+\dfrac{c(0)}{\delta'(0)}\cdot\dfrac{1}{\mu}-\dfrac{\Phi(x,\ x)}{\delta_3} \\ \qquad = \dfrac{\mu_1X_1^2}{\mu-\mu_1}+\dfrac{\mu_2X_2^2}{\mu-\mu_2}+\dfrac{X_4^2}{\varphi(p,\ p)}\cdot\dfrac{1}{\mu}-\dfrac{\Phi(x,\ x)}{\delta_3}, \end{cases}$$

worin $\Phi(x,\ x)$ ein vollständiges Quadrat ist; denn $\Phi(x,\ x) = 0$ repräsentirt die Gleichung der doppelt genommenen Ebene der Grenzfläche II. Klasse, die hier vorliegt, da unmöglich $\Phi(x,\ x)$ proportional p_x^2 sein kann, weil sonst δ_3 verschwinden müsste (cfr. 5). Man setze

$$\frac{\Phi(x,\ x)}{\delta_3} = X_3^2.$$

Definirt man wiederum U_1, U_2, U_3, U_4 wie in 1), so erhält man aus (14.) durch die Substitution $x_i = \frac{1}{2}\varphi'(u_i)$, wobei X_3 in 0 übergeht,

$$(15.) \quad \frac{\gamma(\mu)}{\delta(\mu)} = \frac{U_1^2}{\mu_1(\mu-\mu_1)}+\frac{U_2^2}{\mu_2(\mu-\mu_2)}+\frac{\varphi(p,\ p)U_4^2}{\mu},$$

und auf Grund der Relation (9.):

$$(16.) \quad \omega(u,\ u)+\mu\varphi(u,\ u)-\binom{\omega}{\omega}\cdot\frac{1}{\delta(\mu)} = \mu^2\left\{\frac{U_1^2}{\mu_1(\mu-\mu_1)}+\frac{U_2^2}{\mu_2(\mu-\mu_2)}+\frac{\varphi(p,\ p)U_4^2}{\mu}\right\}.$$

Wie in 1) ergiebt sich hieraus

$$(17.) \quad \begin{cases} \varphi(u,\ u) = \dfrac{U_1^2}{\mu_1}+\dfrac{U_2^2}{\mu_2}+\varphi(p,\ p)U_4^2, \\ \omega(u,\ u) = U_1^2+U_2^2+U_3^2, \end{cases}$$

wobei

$$U_3^2 = \frac{\Phi(\omega,\ \omega)}{\delta_3}.$$

Ferner wird (cfr. Ableitung in 1)):

$$-\binom{\varphi}{x}\cdot\frac{1}{\delta(\mu)} = \frac{U_1X_1}{\mu-\mu_1}+\frac{U_2X_2}{\mu-\mu_2}+\frac{U_4X_4}{\mu}.$$

Berücksichtigt man die fundamentale Gleichung

$$-\binom{\varphi}{x}\cdot\mu = -\binom{\omega}{x}+u_x\Sigma\pm(\gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33}\gamma_{44})$$

oder

$$\frac{-\binom{\varphi}{x}\cdot\mu}{\delta(\mu)} = \frac{-\binom{\omega}{x}}{\delta(\mu)}+u_x,$$

so kann die Gleichung (18ª.) auch geschrieben werden

$$(18.)\qquad -\binom{\omega}{x}\cdot\frac{1}{\delta(\mu)}+u_x = \mu\frac{U_1X_1}{\mu-\mu_1}+\mu\frac{U_2X_2}{\mu-\mu_2}+U_4X_4;$$

hieraus ergiebt sich für $\mu=\infty$:

$$(19.)\qquad u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4 = U_1X_1+U_2X_2+U_4X_4+\frac{\binom{\omega}{x}}{-\delta_3},$$

worin

$$(19^a.)\qquad \frac{\binom{\omega}{x}}{-\delta_3} = \left(\tfrac{1}{2}\Phi'(x_1)\omega_1+\tfrac{1}{2}\Phi'(x_2)\omega_2+\tfrac{1}{2}\Phi'(x_3)\omega_3+\tfrac{1}{2}\Phi'(x_4)\omega_4\right):\delta_3 = X_3U_3.$$

Für $\mu_iX_i^2$, $U_i^2:\mu_i$ und U_iX_i $(i=1,2)$ erhält man dieselben Ausdrücke wie in 1).

3) $\delta_4=\delta_3=0$, $\delta_2\gtrless 0$.

Wenn die Determinante $\delta(\mu)$ nicht identisch verschwinden soll, so müssen nunmehr nach einem allgemeinen Theorem*) sämmtliche E_{ik} verschwinden. Infolgedessen wird $c_3\equiv 0$, und die Partialbruchzerlegung lautet

$$(20.)\qquad \begin{cases} \dfrac{c(\mu)}{\delta(\mu)} = -\dfrac{c_2}{\delta_2}+\dfrac{c(\mu_1)}{\delta_2.\mu_1}\cdot\dfrac{1}{\mu-\mu_1}+\dfrac{c_0}{\delta_1}\cdot\dfrac{1}{\mu} \\ \qquad\qquad = -\dfrac{c_2}{\delta_2}+\dfrac{\mu_1X_1^2}{\mu-\mu_1}+\dfrac{\tau X_4^2}{\delta_1}\cdot\dfrac{1}{\mu}, \end{cases}$$

wobei

$$\frac{c(\mu_1)}{\delta_2.\mu_1} = \mu_1X_1^2.$$

Werden U_1 und U_4 wie oben definirt, so erhält man aus (20.) durch die

---

*) Satz: Bedeutet ω eine definite Form von $u_1, u_2, \ldots, u_n$ und ist $\Sigma\pm\gamma_{11}\cdots\gamma_{nn}$ (die Determinante der Form $\varphi-\mu\omega$) von der Form $\Delta_{n-k}\mu^k+\Delta_{n-(k+1)}\mu^{k+1}+\cdots$, so muss auch in $\binom{x}{x}_{\gamma_{ik}}$ die Entwickelung nach aufsteigenden Potenzen von μ beginnen mit $D_{n-k}\mu^k$ (cfr. „Kegelsch.“ p. 68).

Substitution $x_i = \frac{1}{2}\varphi'(u_i)$

$$(21.) \qquad \frac{\gamma(\mu)}{\delta(\mu)} = -\frac{\gamma_2}{\delta_2} + \frac{U_1^2}{\mu_1(\mu-\mu_1)} + \frac{\varphi(p,\ p)U_4^2}{\mu}; \quad \frac{U_1^2}{\mu_1} = \frac{\gamma(\mu_1)}{\delta_2 . \mu_1},$$

und hieraus speciell (cfr. 1))

$$(22.) \qquad \varphi(u,\ u) = \frac{U_1^2}{\mu_1} - \varphi(p,\ p)U_4^2,$$

$$(22^a.) \qquad \omega(u,\ u) = U_1^2 - \left[\frac{c_2}{\delta_2}\right]_{x_i=\frac{1}{2}\omega'(u_i)}.$$

Nun ist für die Wurzel μ_1 der Gleichung $\delta(\mu) = 0$

$$\mu_1\varphi'(u_i^{(1)}) - \omega'(u_i^{(1)}) = 0,$$

wenn

$$X_1 \equiv u_1^{(1)}x_1 + u_2^{(1)}x_2 + u_3^{(1)}x_3 + u_4^{(1)}x_4$$

bezeichnet wird; andererseits hat man unendlich viele Ebenen, welche die Gleichungen

$$\varphi'(u_i) = 0$$

erfüllen; seien irgend zwei derselben, die auf einander senkrecht stehen, durch die Gleichungen

$$X_2 \equiv u_1^{(2)}x_1 + u_2^{(2)}x_2 + u_3^{(2)}x_3 + u_4^{(2)}x_4 = 0,$$
$$X_3 \equiv u_1^{(3)}x_1 + u_2^{(3)}x_2 + u_3^{(3)}x_3 + u_4^{(3)}x_4 = 0$$

und zwar in der Normalform gegeben, so erhält man hiernach

$$\omega(u,\ u) = U_1^2 + U_2^2 + U_3^2.$$

Zieht man andererseits die Relation (22ª.) in Betracht, so resultirt

$$(23.) \qquad \left|\frac{-c_2}{\delta_2}\right|_{x_i=\frac{1}{2}\omega'(u_i)} = U_2^2 + U_3^2$$

und hieraus

$$(23^a.) \qquad \frac{-c_2}{\delta_2} = X_2^2 + X_3^2,$$

und zwar auf unendlich viele Arten; ausserdem ist

$$(24.) \qquad \frac{\Phi(x,\ x)}{\delta_3} = X_3^2.$$

Analog (2.) erhält man auch hier

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = U_1X_1 + U_2X_2 + U_3X_3 + U_4X_4.$$

4) $\delta_4 = \delta_3 = \delta_2 = 0,\ \delta_1 \gtrless 0.$

Nun müssen nach dem in 3) angeführten Theorem sämmtliche Subdeterminanten zweiten Grades von $\Sigma\pm(e_{11}e_{22}e_{33}e_{44})$ verschwinden, mithin

$c_2 \equiv 0$ sein. Alsdann ist

$$(25.) \qquad \begin{cases} \varphi(p,\ p)\varphi(u,\ u)-\varphi^2(p,\ u) = 0, \\ \varphi(u,\ u) = \varphi(p,\ p).U_4^2, \end{cases}$$

wenn

$$U_4 = \frac{\varphi(p,\ u)}{\varphi(p,\ p)}.$$

Fixirt man irgend drei rechtwinkelig zu einander stehende Ebenen durch den Punkt $U_4 = 0$, deren Gleichungen $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$ in der Normalform gegeben seien, und definirt man die U_i $(i = 1, 2, 3)$ wie seither, so ergiebt sich

$$\omega(u,\ u) = U_1^2+U_2^2+U_3^2.$$

5) Grenzfläche im Unendlichen: $\delta(\mu) \equiv 0$ (cfr. II. $\varphi(p, p) = 0$).

Ist $\delta_4 = \delta_3 = 0$, aber c_3 nicht identisch gleich Null, so verschwinden nicht alle E_{ik}: es liegt eine nicht ausartende Grenzfläche im Unendlichen vor. Ist etwa

$$E_{44} \gtrless 0, \quad \text{d. h.} \quad p_4 \gtrless 0,$$

so substituire man

$$u_1 = v_1+\lambda p_1, \quad u_2 = v_2+\lambda p_2, \quad u_3 = v_3+\lambda p_3, \quad u_4 = \lambda p_4; \quad \lambda = \frac{v_4}{p_4}.$$

Dann sind $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, $v_3 = 0$, $v_4 \equiv u_4 = 0$ die Ecken eines neuen Coordinatentetraeders, von welchen $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, $v_3 = 0$ auf den Kanten $(\overline{41.})$, $(\overline{42.})$, $(\overline{43.})$ im Unendlichen liegen. Durch diese Substitutionen ergiebt sich

$$\varphi(u,\ u) = \varphi(v_1,\ v_2,\ v_3,\ 0)+\lambda.0+\lambda^2.0,$$
$$\omega(u,\ u) = \omega(v_1,\ v_2,\ v_3,\ 0).$$

φ und ω sind im neuen System nur von den drei Veränderlichen v_1, v_2, v_3 abhängig; mithin haben wir ein Problem der Ebene, und zwar der Ebene der drei Ecken $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, $v_3 = 0$.

II. $\varphi(p,\ p) = 0.$

1) $\delta_4 \gtrless 0$. Paraboloid.

Seien μ_1, μ_2 die Wurzeln der Gleichung $\mu^2\delta_4-\mu\delta_3+\delta_2 = 0$. Die Partialbruchzerlegung liefert

$$(26.) \qquad \frac{c(\mu)}{\delta(\mu)} = \frac{1}{\mu^2}\left(-\frac{c_0}{\delta_2}\right)-\frac{1}{\mu}\frac{c_0\delta_3-c_1\delta_2}{\delta_2^2}+\frac{c(\mu_1)}{\delta'(\mu_1)}\cdot\frac{1}{\mu-\mu_1}+\frac{c(\mu_2)}{\delta'(\mu_2)}\cdot\frac{1}{\mu-\mu_2}.$$

Setzt man

$$-\frac{c_0}{\delta_2} = \frac{X_4^2}{\sigma^2}, \quad \frac{c_0\delta_3-c_1\delta_2}{\delta_2^2} = \frac{2X_3X_4}{\sigma}, \quad \text{wobei} \quad \frac{-\delta_2}{\tau} = \sigma^2,$$

so wird

$$(27.)\qquad \frac{c(\mu)}{\delta(\mu)} = \frac{X_4^2}{\sigma^2}\cdot\frac{1}{\mu^2} - \frac{2X_3X_4}{\sigma}\cdot\frac{1}{\mu} + \frac{\mu_1X_1^2}{\mu-\mu_1} + \frac{\mu_2X_2^2}{\mu-\mu_2},$$

$$\mu_1X_1^2 = \frac{c(\mu_1)}{\delta'(\mu_1)}, \quad \mu_2X_2^2 = \frac{c(\mu_2)}{\delta'(\mu_2)}.$$

Den speciellen Werthen $\mu=\infty$ resp. $\mu=0$ entsprechen hiernach

$$(28.)\qquad \frac{\Phi(x,\ x)}{\Sigma\pm(e_{11}e_{22}e_{33}e_{44})} = \mu_1X_1^2+\mu_2X_2^2-\frac{2X_3X_4}{\sigma},$$

$$\Omega(x,\ x) = \tau X_4^2.$$

Ersetzt man nun die x_i durch $\frac{1}{2}\omega'(u_i)$ und nennt man die aus X_1, X_2, X_3 hierdurch hervorgehenden Ausdrücke resp. U_1, U_2, U_3, so gehen die X_i $(i=1,2,3)$ durch die Substitutionen $x_i=\frac{1}{2}\varphi'(u_i)$ über in $\frac{U_1}{\mu_1}$, $\frac{U_2}{\mu_2}$, $-\sigma U_4$, während X_4 übergeht in $-\sigma U_3$. Man erhält:

$$(29.)\qquad \frac{\gamma(\mu)}{\delta(\mu)} = \frac{U_3^2}{\mu^2} - \frac{2\sigma U_3U_4}{\mu} + \frac{U_1^2}{\mu_1(\mu-\mu_1)} + \frac{U_2^2}{\mu_2(\mu-\mu_2)},$$

mithin

$$-\frac{\gamma_0}{\delta_2} = U_3^2, \quad \frac{\gamma_0\delta_3-\gamma_1\delta_2}{\delta_2^2} = 2\sigma U_3U_4, \quad \frac{\gamma(\mu_i)}{\delta'(\mu_i)} = \frac{U_i^2}{\mu_i}, \qquad (i=1,2)$$

und hieraus die speciellen Darstellungen (cfr. (9.)):

$$(30.)\qquad \begin{cases} \varphi(u,\ u) = \dfrac{U_1^2}{\mu_1}+\dfrac{U_2^2}{\mu_2}-2\sigma U_3U_4, \\ \omega(u,\ u) = U_1^2+U_2^2+U_3^2. \end{cases}$$

Zur Berechnung der Producte U_iX_i erhält man aus $c(\mu):\delta(\mu)$ analog der Ableitung der Gleichung (12.):

$$(31.)\qquad \frac{\zeta(\mu)}{\delta(\mu)} = \frac{\mu^3\zeta_3-\mu^2\zeta_2+\mu\zeta_1-\zeta_0}{\mu^4\delta_4-\mu^3\delta_3+\mu^2\delta_2} = -\frac{1}{\mu^2}\frac{U_3X_4}{\sigma}+\frac{1}{\mu}(U_3X_3+U_4X_4)+\frac{X_1U_1}{\mu-\mu_1}+\frac{X_2U_2}{\mu-\mu_2},$$

woraus speciell für $\mu=\infty$:

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4 = U_1X_1+U_2X_2+U_3X_3+U_4X_4.$$

Andererseits ergiebt der Vergleich mit der Entwickelung

$$(32.)\qquad \frac{\zeta(\mu)}{\delta(\mu)} = \frac{1}{\mu^2}\left(\frac{-\zeta_0}{\delta_2}\right)-\frac{1}{\mu}\frac{\zeta_0\delta_3-\zeta_1\delta_2}{\delta_2^2}+\frac{\zeta(\mu_1)}{\delta'(\mu_1)}\cdot\frac{1}{\mu-\mu_1}+\frac{\zeta(\mu_2)}{\delta'(\mu_2)}\cdot\frac{1}{\mu-\mu_2}$$

die Werthe

$$U_1X_1 = \frac{\zeta(\mu_1)}{\delta'(\mu_1)}, \quad U_2X_2 = \frac{\zeta(\mu_2)}{\delta'(\mu_2)}, \quad U_3X_3+U_4X_4 = \frac{-1}{\delta_2^2}(\zeta_0\delta_3-\zeta_1\delta_2),$$

$$(32^a.)\qquad -\frac{U_3X_4}{\sigma} = -\frac{\zeta_0}{\delta_2} = -\frac{\tau p_x\varphi(u,p)}{\delta_2} = \frac{\varphi(u,\ p).p_x}{-\delta_2:\tau}, \quad U_3 = \frac{\varphi(p,\ u)}{-\sigma}.$$

Die Gleichungen für die Ebenen $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ und für die Ecken $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ sind hiermit gefunden.

Zur Bestimmung der Gleichungen für die Ecke $U_4 = 0$ resp. die Ebene $X_3 = 0$ bilde man

$$(33.)\quad \delta_2^2(U_3X_3+U_4X_4)X_4-\delta_2^2U_3X_3X_4 = -(\zeta_0\delta_3-\zeta_1\delta_2)X_4+\delta_2^2\frac{\varphi(p,u)}{\sigma}X_3X_4;$$

nun ist

$$(34.)\qquad \frac{\delta_2^2X_3X_4}{\sigma} = \tfrac{1}{2}(c_0\delta_3-c_1\delta_2),$$

mithin

$$(34^a.)\qquad \delta_2^2\sigma U_3U_4 = \tfrac{1}{2}(\gamma_0\delta_3-\gamma_1\delta_2)$$

und

$$(35.)\quad \delta_2^2U_4X_4^2 = -(\zeta_0\delta_3-\zeta_1\delta_2)X_4+\tfrac{1}{2}\varphi(p,\ u)(c_0\delta_3-c_1\delta_2).$$

Ebenso erhält man zur Bestimmung der Ebene $X_3 = 0$ ausser (34.) die Formel

$$(36.)\quad \sigma\delta_2^2X_3U_3^2 = (\zeta_0\delta_3-\zeta_1\delta_2)\varphi(p,\ u)-\tfrac{1}{2}(\gamma_0\delta_3-\gamma_1\delta_2)X_4.$$

2) $\delta_4 = 0$, $\delta_3 \gtrless 0$: Parabel $\left(\mu_2 = \infty,\ \mu_1 = \frac{\delta_2}{\delta_3}\right)$:

$$(37.)\quad \begin{cases} \dfrac{c(\mu)}{\delta(\mu)} = \dfrac{1}{\mu^2}\cdot\dfrac{-c_0}{\delta_2}-\dfrac{1}{\mu}\cdot\dfrac{c_0\delta_3-c_1\delta_2}{\delta_2^2}+\dfrac{c(\mu_1)}{\delta'(\mu_1)}\cdot\dfrac{1}{\mu-\mu_1}+\dfrac{c_3}{-\delta_3} \\ \qquad\quad = \dfrac{1}{\mu^2}\cdot\dfrac{X_4^2}{\sigma^2}-\dfrac{1}{\mu}\cdot\dfrac{2X_3X_4}{\sigma}+\dfrac{\mu_1X_1^2}{\mu-\mu_1}-X_2^2, \end{cases}$$

worin

$$\frac{-c_0}{\delta_2} = \frac{X_4^2}{\sigma^2}\quad(-\delta_2:\tau = \sigma^2),\quad \frac{c_0\delta_3-c_1\delta_2}{\delta_2^2} = \frac{2X_3X_4}{\sigma},\quad \frac{c_3}{\delta_3} = X_2^2 = \frac{\Phi(x,\ x)}{\delta_3},$$

$$\mu_1X_1^2 = \frac{c(\mu_1)}{\delta'(\mu_1)}.$$

Werden die U_i ebenso definirt wie im vorhergehenden Falle, so gehen durch die Substitutionen $x_i = \frac{1}{2}\varphi'(u_i)$ die X_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ über in $\frac{U_1}{\mu_1}$, 0, $-\sigma U_4$, $-\sigma U_3$, und man erhält infolge der beiden genannten Substitutionen

$$(38.)\qquad -\binom{\omega}{\omega}:\delta(\mu) = \frac{\mu_1U_1^2}{\mu-\mu_1}-U_2^2,$$

$$(38^a.)\qquad -\binom{\varphi}{\varphi}:\delta(\mu) = \frac{U_3^2}{\mu^2}-\frac{2\sigma U_3U_4}{\mu}+\frac{U_1^2}{\mu_1(\mu-\mu_1)},$$

sodass

$$-\frac{\gamma_0}{\delta_2} = U_3^2,\quad \frac{\gamma_0\delta_3-\gamma_1\delta_2}{\delta_2^2} = 2\sigma U_3U_4,\quad \frac{\gamma(\mu_1)}{\delta'(\mu_1)} = \frac{U_1^2}{\mu_1}.$$

Aus beiden folgt nach der Fundamentalrelation

$$(39.) \qquad \mu^2 \frac{-\binom{\varphi}{\varphi}}{\delta(\mu)} = \omega(u,\ u)+\mu\varphi(u,\ u)+\frac{-\binom{\omega}{\omega}}{\delta(\mu)}$$

die Identität

$$\mu\varphi(u,\ u)+\omega(u,\ u)-\binom{\omega}{\omega}\cdot\frac{1}{\delta(\mu)} = \mu^2\Big(\frac{U_3^2}{\mu^2}-\frac{2\sigma U_3U_4}{\mu}+\frac{U_1^2}{\mu_1(\mu-\mu_1)}\Big),$$

resp. die speciellen Darstellungen

$$\varphi(u,\ u)=\frac{U_1^2}{\mu_1}-2\sigma U_3U_4, \quad \omega(u,\ u)=U_1^2+U_2^2+U_3^2.$$

Aus $c(\mu):\delta(\mu)$ erhält man wie bei (12.):

$$\frac{\zeta(\mu)}{\delta(\mu)} = -\frac{1}{\mu^2}\frac{U_3X_4}{\sigma}+\frac{1}{\mu}(U_3X_3+U_4X_4)+\frac{U_1X_1}{\mu-\mu_1};$$

daraus folgt

$$(40.) \qquad \frac{-\mu\binom{\varphi}{x}}{\delta(\mu)} = \frac{-\binom{\omega}{x}}{\delta(\mu)}+u_x = \mu\Big(-\frac{1}{\mu^2}\frac{U_3X_4}{\sigma}+\frac{1}{\mu}(U_3X_3+U_4X_4)+\frac{U_1X_1}{\mu-\mu_1}\Big),$$

mithin für $\mu=\infty$:

$$u_x = U_1X_1+U_3X_3+U_4X_4+\underset{\text{für } \mu=\infty}{\overline{\binom{\omega}{x}:\delta(\mu)}};$$

worin

$$\underset{\text{für } \mu=\infty}{\overline{-\binom{\omega}{x}:\delta(\mu)}} = \frac{c_3(x,\ \omega)}{-\delta_3} = -U_2X_2.$$

Weiter ergeben sich analog 1):

$$(41.) \quad U_1X_1=\frac{\zeta(\mu_1)}{\delta'(\mu_1)}, \quad \frac{U_3X_4}{\sigma}=\frac{\zeta_0}{\delta_2}, \quad U_3=\frac{\varphi(p,\ u)}{-\sigma}, \quad U_3X_3+U_4X_4=-\frac{\zeta_0\delta_3-\zeta_1\delta_2}{\delta_2^2}$$

und für $\delta_2^2U_4X_4^2$ resp. $\sigma\delta_2^2X_3U_3^2$ *dieselben* Werthe wie in 1).

3) $\delta_4=\delta_3=0$, $\delta_2\gtrless 0$ ($\mu_2=\mu_1=\infty$, $c_3\equiv 0$): Punktepaar, bestehend aus einem endlichen und einem unendlich fernen Punkt.

Auf demselben Wege, wie im vorhergehenden Falle, erhält man folgende Formeln:

$$(42.) \quad \frac{c(\mu)}{\delta(\mu)}=\frac{1}{\mu^2}\frac{-c_0}{\delta_2}+\frac{1}{\mu}\frac{c_1}{\delta_2}-\frac{c_2}{\delta_2}=\frac{1}{\mu^2}\frac{X_4^2}{\sigma^2}-\frac{1}{\mu}\frac{2X_3X_4}{\sigma}-(X_1^2+X_2^2);$$

$$\frac{-c_0}{\delta_2}=\frac{X_4^2}{\sigma^2}, \quad \frac{c_1}{\delta_2}=\frac{-2X_3X_4}{\sigma}, \quad \frac{c_2}{\delta_2}=X_1^2+X_2^2 \text{ (auf unendlich viele Arten).}$$

Werden die U_i wieder wie oben (in II 1) und 2)) definirt, so gehen die X_i durch die Substitutionen $x_i = \frac{1}{2}\varphi'(u_i)$ über in 0, 0, $-\sigma U_4$, $-\sigma U_3$: es ergeben sich

$$(43.) \qquad -\binom{\omega}{\omega}:\delta(\mu) = -(U_1^2+U_2^2); \quad -\binom{\varphi}{\varphi}:\delta(\mu) = \frac{U_3^2}{\mu^2} - \frac{2\sigma U_3 U_4}{\mu}$$

resp. die speciellen Werthe

$$\varphi(u,\ u) = -2\sigma U_3 U_4, \quad \omega(u,\ u) = U_1^2+U_2^2+U_3^2.$$

Durch Polarenbildung (cfr. 2)) ergiebt sich weiter

$$(44.) \quad \begin{cases} u_x = U_3X_3+U_4X_4+\binom{\omega}{x}:\delta(\mu), \quad \underset{\text{für } \mu=\infty}{\binom{\omega}{x}:\delta(\mu)} = \dfrac{c_2(x,\ \omega)}{\delta_2} = U_1X_1+U_2X_2; \\ -\dfrac{U_3X_4}{\sigma} = \dfrac{\zeta_0}{\delta_2}, \quad U_3 = \dfrac{\varphi(p,\ u)}{-\sigma}, \quad U_3X_3+U_4X_4 = \dfrac{\zeta_1}{\delta_2}, \\ \delta_2 U_4X_4^2 = \zeta_1X_4+\frac{1}{2}\varphi(p,\ u)c_1, \quad \sigma\delta_2X_3U_3^2 = -\zeta_1\varphi(p,\ u)-\frac{1}{2}\gamma_1X_4. \end{cases}$$

Vierter Theil.

Bedingungen für Rotationsflächen II. Ordnung und II. Klasse und weitere analoge Ausartungen.

§ 1.

Flächen II. Ordnung.

Wir haben bisher angenommen, dass alle drei Wurzeln λ', λ'', λ''' (resp. im Falle der Paraboloide die beiden Wurzeln λ' und λ'') von einander verschieden seien; ist nun etwa $\lambda' = \lambda''$, so besteht *auch jetzt noch* nach dem Fundamentaltheorem 7 A) in den „Kegelsch." § 8 S. 67 die Transformation

$$(1.) \quad \begin{cases} f(x,\ x) = \lambda'(X_1^2+X_2^2)+\lambda'''X_3^2+zX_4^2, \\ \text{resp.} \\ f(x,\ x) = \lambda'(X_1^2+X_2^2)-2\varrho X_3X_4, \end{cases}$$

nur dass nunmehr $X_1 = 0$ und $X_2 = 0$ *irgend* zwei zu einander senkrechte, durch die Rotationsaxe gehende Ebenen sind. Nimmt man

$$\omega(u,\ u) = U_1^2+U_2^2+U_3^2$$

hinzu, dann ist nach einem Fundamentalsatze über Zwischenformen

$$(2.) \quad \begin{cases} \Psi \equiv \Psi(u,\ x) \equiv \frac{1}{4}\sum_1^4{}_i\,\omega'(u_i)f'(x_i) = \lambda'(U_1X_1+U_2X_2)+\lambda'''U_3X_3, \\ \text{resp.} \\ \Psi \equiv \Psi(u,\ x) \equiv \frac{1}{4}\sum_1^4{}_i\,\omega'(u_i)f'(x_i) = \lambda'(U_1X_1+U_2X_2)-\varrho U_3X_4. \end{cases}$$

Für den Fall der Mittelpunktsflächen folgt aus (2.):

$$(3.)\qquad \begin{cases} \Psi - \lambda' u_x = (\lambda''' - \lambda') U_3 X_3 - \lambda' U_4 X_4 \\ \text{oder} \\ (\lambda''' - \lambda') U_3 X_3 = \Psi - \lambda' u_x - \lambda' U_4 X_4 \end{cases}$$

zur Bestimmung sowohl von $U_3 = 0$ als auch von $X_3 = 0$*).

Wendet man den oben erwähnten Fundamentalsatz auf $f(x, x)$ und $\Psi(u, x)$ an, so erhält man

$$(4.)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\sum_1^4{}_i \Psi'(u_i) f'(x_i) = \lambda'^2 X_1^2 + \lambda''^2 X_2^2 + \lambda'''^2 X_3^2 = \omega(f_1, f_2, f_3, f_4) \equiv C, \\ \text{resp.} \qquad = \lambda'^2 X_1^2 + \lambda''^2 X_2^2 - \varrho^2 X_4^2 = \omega(f_1, f_2, f_3, f_4) \equiv C. \end{cases}$$

Nach Anwendung desselben Satzes auf C und $\omega(u, u)$ ergiebt sich weiter

$$(5.)\qquad \begin{cases} \Psi_1 \equiv \frac{1}{4}\sum_1^4{}_i \frac{\partial C_i}{\partial x_i} \cdot \omega'(u_i) \equiv \sum_1^4{}_i f'(\omega'(u_i)).\omega'(f'(x_i)) \\ \qquad = \lambda'^2 X_1 U_1 + \lambda''^2 X_2 U_2 + \lambda'''^2 X_3 U_3 \\ \text{resp.} \qquad = \lambda'^2 X_1 U_1 + \lambda''^2 X_2 U_2. \end{cases}$$

Nehmen wir noch hinzu die evidente Zwischenform

$$(6.)\qquad \begin{cases} u_x = U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 + U_4 X_4 \\ \text{und} \\ p_x = \qquad\qquad\qquad\qquad X_4, \end{cases}$$

so hat man bei fixirten Werthen der u_i vier lineare Formen der x_i; nämlich Ψ, Ψ_1, u_x und p_x, die durch die linearen Substitutionen (17.) in § 2 des zweiten Theiles, deren Determinante den Werth $r = \frac{1}{\sqrt{\tau}}$ hat, in die entsprechenden Formen rechter Hand übergehen. Es ist daher (analog (4.) in § 9 der „Kegelsch."):

$$(7.)\qquad \begin{cases} \begin{vmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} & \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} & \frac{\partial \Psi}{\partial x_4} \\ \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_4} \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{vmatrix} = r \begin{vmatrix} \lambda' U_1 & \lambda'' U_2 & \lambda''' U_3 & 0 \\ \lambda'^2 U_1 & \lambda''^2 U_2 & \lambda'''^2 U_3 & 0 \\ U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \qquad = r U_1 U_2 U_3 (\lambda' - \lambda'')(\lambda'' - \lambda''')(\lambda''' - \lambda') \\ \text{resp.} \qquad = r U_1 U_2 U_3 \lambda' \lambda'' (\lambda'' - \lambda'). \end{cases}$$

*) Für Tetraedercoordinaten resp. für schiefwinklige Coordinaten verfügt man, wenn $U_3 = 0$ bestimmt werden soll, über die beliebigen x_i in der Weise, dass $p_x = 0$ resp. $X_4 = 0$

Da auch für den Fall einer Doppelwurzel die Transformation nachgewiesen ist $\left(r^2 = \frac{1}{\tau}\right)$, also U_1, U_2 und U_3 nach Annahme einer bestimmten Transformation (unter unendlich vielen) fixirte Werthe besitzen, so muss für $\lambda^{(i)} = \lambda^{(k)}$ $(i, k = 1, 2, 3)$ die Contravariante linker Hand *identisch verschwinden* und *umgekehrt*.

$$\Sigma \pm \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2} u_3 p_4 \right) = 0$$

ist mithin nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass $f(x, x) = 0$ [auch im Falle $\varphi(p, p) = 0$] eine Rotationsfläche darstelle.

Um ein Kriterium für die Kugelfläche zu bekommen, bilde man für beliebige v_i die Determinante

$$(8.) \quad \left| \begin{array}{cccc} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} & \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} & \frac{\partial \Psi}{\partial x_4} \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{array} \right| = r \left| \begin{array}{cccc} \lambda' U_1 & \lambda'' U_2 & \lambda''' U_3 & 0 \\ V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\ U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

$$= r \{ V_3 U_1 U_2 (\lambda' - \lambda'') + V_1 U_2 U_3 (\lambda'' - \lambda''') + V_2 U_3 U_1 (\lambda''' - \lambda') \}.$$

Mithin ist

$\Sigma \pm \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} v_2 u_3 p_4 \right) = 0$ bei beliebigen v_i und u_i (resp. V_i und U_i)

nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass $f(x, x) = 0$ eine ***Kugelfläche*** darstellt.

§ 2.

Flächen II. Klasse.

Ist

$$\varphi(u, u) = \sum_1^4{}_i \sum_1^4{}_k e_{ik} u_i u_k = 0$$

die Gleichung einer Fläche II. Klasse, $\Phi(x, x) = \sum_1^4{}_i \sum_1^4{}_k E_{ik} x_i x_k$ die adjungirte Form von $\varphi(u, u)$, so lässt sich $\varphi(u, u)$, auch wenn eine mehrfache Wurzel

---

wird, dann ist die Gleichung des Punktes $U_3 = 0$ identisch mit

$$\Psi - \lambda' u_x = 0.$$

Setzt man für schiefwinkelige Coordinaten $x_4 = 0$, so hat man für beliebige x_1, x_2, x_3 die Gleichung des unendlich fernen Punktes, also die Richtung der Rotationsaxe.

Die Gleichung der Ebene $X_3 = 0$ wird gefunden mit Hülfe eines Werthsystems, das U_4 gleich Null macht.

μ_i vorliegt, in eine der beiden Formen bringen, entweder

$$(10.)\qquad \begin{cases} \varphi(u,\ u) = \dfrac{U_1^2}{\mu_1} + \dfrac{U_2^2}{\mu_2} + \dfrac{U_3^2}{\mu_3} + \varphi(p,\ p)U_4^2 \\ \text{oder} \\ \varphi(u,\ u) = \dfrac{U_1^2}{\mu_1} + \dfrac{U_2^2}{\mu_2} - 2\sigma U_3 U_4, \end{cases}$$

und

$$(10^a.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\Phi(x,\ x)}{\Sigma\pm(e_{11}e_{22}e_{33}e_{44})} = \mu_1 X_1^2 + \mu_2 X_2^2 + \mu_3 X_3^2 + \dfrac{1}{\varphi(p,\ p)} X_4^2, \\ \text{oder} \qquad\qquad = \mu_1 X_1^2 + \mu_2 X_2^2 - \dfrac{2X_3X_4}{\sigma}. \end{cases}$$

Bildet man nun unter Zuhülfenahme von

$$(11.)\qquad \begin{cases} p_x = X_4, \\ \text{und} \\ \omega(u,\ u) = U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 \end{cases}$$

die Formen

$$(11^a.)\qquad \begin{cases} \frac{1}{4}\sum_1^4{}_i \dfrac{\Phi'(x_i)}{\Sigma\pm(e_{11}e_{22}e_{33}e_{44})} \cdot \omega'(u_i) = \mu_1 U_1 X_1 + \mu_2 U_2 X_2 + \mu_3 U_3 X_3 \\ \text{resp.} \qquad\qquad = \mu_1 U_1 X_1 + \mu_2 U_2 X_2 - \dfrac{U_3 X_4}{\sigma}, \end{cases}$$

$$(12.)\qquad \begin{cases} \Phi_1 \equiv \dfrac{\Phi(\frac{1}{2}\omega'(u_1),\ \frac{1}{2}\omega'(u_2),\ \frac{1}{2}\omega'(u_3),\ \frac{1}{2}\omega'(u_4))}{\Sigma\pm(e_{11}e_{22}e_{33}e_{44})} = \mu_1 U_1^2 + \mu_2 U_2^2 + \mu_3 U_3^2 \\ \text{resp.} \qquad\qquad = \mu_1 U_1^2 + \mu_2 U_2^2 \end{cases}$$

sowie

$$(13.)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\sum_1^4{}_i \varphi'(u_i)p_i = \frac{1}{2}\sum_1^4{}_i \varphi'(p_i)u_i = \varphi(p,\ p)U_4 \\ \text{resp.} \qquad\qquad \varphi(p,\ u) = -\sigma U_3, \end{cases}$$

so erhält man für das System [(10.), (11.), (12.), (13.)], das den Substitutionen

$$u_i = u_i' U_1 + u_i'' U_2 + u_i''' U_3 + p_i U_4 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

unterworfen ist:

$$(14.)\qquad \frac{r}{16}\begin{vmatrix} \varphi'(u_1) & \varphi'(u_2) & \varphi'(u_3) & \varphi'(u_4) \\ \Phi_1'(u_1) & \Phi_1'(u_2) & \Phi_1'(u_3) & \Phi_1'(u_4) \\ \omega'(u_1) & \omega'(u_2) & \omega'(u_3) & \omega'(u_4) \\ \varphi'(p_1) & \varphi'(p_2) & \varphi'(p_3) & \varphi'(p_4) \end{vmatrix} = \varphi(p,\ p)U_1U_2U_3 \begin{vmatrix} \frac{1}{\mu_1} & \frac{1}{\mu_2} & \frac{1}{\mu_3} \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(14^a.)\qquad \begin{cases} = \dfrac{\varphi(p,\ p)U_1U_2U_3}{\mu_1\mu_2\mu_3}(\mu_2-\mu_1)(\mu_3-\mu_2)(\mu_1-\mu_3) \\ \qquad = r^2\Sigma\pm(e_{11}e_{22}e_{33}e_{44})U_1U_2U_3(\mu_2-\mu_1)(\mu_3-\mu_2)(\mu_1-\mu_3) \\ \text{resp.} \qquad = \sigma^2 U_1U_2U_3(\mu_2-\mu_1). \end{cases}$$

Das Verschwinden der Contravariante

$$\Sigma\pm(\varphi'(u_1)\Phi_1'(u_2)\omega'(u_3)\varphi'(p_4))$$

ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $\varphi(u, u) = 0$ ***eine Rotationsfläche*** darstelle. Tritt die Bedingung $\varphi(p, p) = 0$ hinzu, so ist die betr. Fläche ein Rotationsparaboloid.

Diese Bedingung geht in diejenige für Flächen II. Ordnung über, wenn man

$$e_{ik} = A_{ik} \quad \text{und} \quad \mu A = \lambda$$

setzt. Infolgedessen gehen nämlich

$$\varphi(u, u), \quad E_{ik}, \quad \Sigma\pm(e_{11}e_{22}e_{33}e_{44}), \quad \frac{\Phi(x, x)}{\Sigma\pm(e_{11}e_{22}e_{33}e_{44})}, \quad \Phi_1$$

über in

$$(15.) \qquad F(u, u), \quad A^2a_{ik}, \quad A^3, \quad \frac{A^2f(x, x)}{A^3}, \quad \frac{A^2f(\omega, \omega)}{A^3}$$

und

$$\Sigma\pm(\varphi'(u_1)\Phi_1'(u_2)\omega'(u_3)\varphi'(p_4)) \quad \text{in} \quad \Sigma\pm\left(F'(u_1)\frac{\frac{\partial f(\omega, \omega)}{\partial u_2}}{A}\omega'(u_3)F'(p_4)\right).$$

Multiplicirt man nun die letzte Determinante rechter Hand mit $\Sigma\pm(a_{11}a_{22}a_{33}a_{44})$:

$$\frac{r}{16}\begin{vmatrix} F'(u_1) & F'(u_2) & F'(u_3) & F'(u_4) \\ \frac{1}{A}\frac{\partial f(\omega, \omega)}{\partial u_1} & . & . & \frac{1}{A}\frac{\partial f(\omega, \omega)}{\partial u_4} \\ \omega'(u_1) & . & . & \omega'(u_4) \\ F'(p_1) & F'(p_2) & F'(p_3) & F'(p_4) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & . & . & a_{24} \\ a_{31} & . & . & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{r}{16}\begin{vmatrix} Au_1 & Au_2 & Au_3 & Au_4 \\ \frac{1}{A}\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} & . & . & \frac{1}{A}\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} & . & . & \frac{\partial \Psi}{\partial x_4} \\ Ap_1 & Ap_2 & Ap_3 & Ap_4 \end{vmatrix},$$

so geht

$$\frac{r}{16}\Sigma\pm(\varphi'(u_1)\Phi_1'(u_2)\omega'(u_3)\varphi'(p_4)) \quad \text{über in} \quad \frac{r}{16}\Sigma\pm\left(u_1\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2}\frac{\partial \Psi}{\partial x_4}p_4\right),$$

q. e. d.

Soll $\varphi(u, u) = 0$ eine ***Kugelfläche*** darstellen, so wird $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$.

μ_i vorliegt, in eine der beiden Formen bringen, entweder

$$(10.)\qquad \begin{cases} \varphi(u,\ u) = \dfrac{U_1^2}{\mu_1} + \dfrac{U_2^2}{\mu_2} + \dfrac{U_3^2}{\mu_3} + \varphi(p,\ p)U_4^2 \\ \text{oder} \\ \varphi(u,\ u) = \dfrac{U_1^2}{\mu_1} + \dfrac{U_2^2}{\mu_2} - 2\sigma U_3 U_4, \end{cases}$$

und

$$(10^a.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\Phi(x,\ x)}{\Sigma\pm(e_{11}e_{22}e_{33}e_{44})} = \mu_1 X_1^2 + \mu_2 X_2^2 + \mu_3 X_3^2 + \dfrac{1}{\varphi(p,\ p)} X_4^2, \\ \text{oder} \qquad\qquad = \mu_1 X_1^2 + \mu_2 X_2^2 - \dfrac{2X_3X_4}{\sigma}. \end{cases}$$

Bildet man nun unter Zuhülfenahme von

$$(11.)\qquad \begin{cases} p_x = X_4, \\ \text{und} \\ \omega(u,\ u) = U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 \end{cases}$$

die Formen

$$(11^a.)\qquad \begin{cases} \frac{1}{4}\sum_1^4{}_i \dfrac{\Phi'(x_i)}{\Sigma\pm(e_{11}e_{22}e_{33}e_{44})}\cdot\omega'(u_i) = \mu_1 U_1 X_1 + \mu_2 U_2 X_2 + \mu_3 U_3 X_3 \\ \text{resp.} \qquad\qquad = \mu_1 U_1 X_1 + \mu_2 U_2 X_2 - \dfrac{U_3 X_4}{\sigma}, \end{cases}$$

$$(12.)\qquad \begin{cases} \Phi_1 \equiv \dfrac{\Phi(\frac{1}{2}\omega'(u_1),\ \frac{1}{2}\omega'(u_2),\ \frac{1}{2}\omega'(u_3),\ \frac{1}{2}\omega'(u_4))}{\Sigma\pm(e_{11}e_{22}e_{33}e_{44})} = \mu_1 U_1^2 + \mu_2 U_2^2 + \mu_3 U_3^2 \\ \text{resp.} \qquad\qquad = \mu_1 U_1^2 + \mu_2 U_2^2 \end{cases}$$

sowie

$$(13.)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\sum_1^4{}_i \varphi'(u_i)p_i = \frac{1}{2}\sum_1^4{}_i \varphi'(p_i)u_i = \varphi(p,\ p)U_4 \\ \text{resp.} \qquad\qquad \varphi(p,\ u) = -\sigma U_3, \end{cases}$$

so erhält man für das System [(10.), (11.), (12.), (13.)], das den Substitutionen

$$u_i = u_i' U_1 + u_i'' U_2 + u_i''' U_3 + p_i U_4 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

unterworfen ist:

$$(14.)\qquad \frac{r}{16}\begin{vmatrix} \varphi'(u_1) & \varphi'(u_2) & \varphi'(u_3) & \varphi'(u_4) \\ \Phi_1'(u_1) & \Phi_1'(u_2) & \Phi_1'(u_3) & \Phi_1'(u_4) \\ \omega'(u_1) & \omega'(u_2) & \omega'(u_3) & \omega'(u_4) \\ \varphi'(p_1) & \varphi'(p_2) & \varphi'(p_3) & \varphi'(p_4) \end{vmatrix} = \varphi(p,\ p)U_1U_2U_3 \begin{vmatrix} \frac{1}{\mu_1} & \frac{1}{\mu_2} & \frac{1}{\mu_3} \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(14^a.)\qquad \begin{cases} = \dfrac{\varphi(p,\ p)U_1U_2U_3}{\mu_1\mu_2\mu_3}(\mu_2-\mu_1)(\mu_3-\mu_2)(\mu_1-\mu_3) \\ \qquad = r^2\Sigma\pm(e_{11}e_{22}e_{33}e_{44})U_1U_2U_3(\mu_2-\mu_1)(\mu_3-\mu_2)(\mu_1-\mu_3) \\ \text{resp.} \qquad = \sigma^2 U_1U_2U_3(\mu_2-\mu_1). \end{cases}$$

Das Verschwinden der Contravariante

$$\Sigma \pm (\varphi'(u_1)\Phi_1'(u_2)\omega'(u_3)\varphi'(p_4))$$

ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $\varphi(u, u) = 0$ ***eine Rotationsfläche*** darstelle. Tritt die Bedingung $\varphi(p, p) = 0$ hinzu, so ist die betr. Fläche ein Rotationsparaboloid.

Diese Bedingung geht in diejenige für Flächen II. Ordnung über, wenn man

$$e_{ik} = A_{ik} \quad \text{und} \quad \mu A = \lambda$$

setzt. Infolgedessen gehen nämlich

$$\varphi(u, u), \quad E_{ik}, \quad \Sigma \pm (e_{11}e_{22}e_{33}e_{44}), \quad \frac{\Phi(x, x)}{\Sigma \pm (e_{11}e_{22}e_{33}e_{44})}, \quad \Phi_1$$

über in

$$(15.) \qquad F(u, u), \quad A^2 a_{ik}, \quad A^3, \quad \frac{A^2 f(x, x)}{A^3}, \quad \frac{A^2 f(\omega, \omega)}{A^3}$$

und

$$\Sigma \pm (\varphi'(u_1)\Phi_1'(u_2)\omega'(u_3)\varphi'(p_4)) \quad \text{in} \quad \Sigma \pm \left(F'(u_1) \frac{\frac{\partial f(\omega, \omega)}{\partial u_2}}{A} \omega'(u_3) F'(p_4) \right).$$

Multiplicirt man nun die letzte Determinante rechter Hand mit $\Sigma \pm (a_{11}a_{22}a_{33}a_{44})$:

$$\frac{r}{16} \begin{vmatrix} F'(u_1) & F'(u_2) & F'(u_3) & F'(u_4) \\ \frac{1}{A}\frac{\partial f(\omega, \omega)}{\partial u_1} & \cdot & \cdot & \frac{1}{A}\frac{\partial f(\omega, \omega)}{\partial u_4} \\ \omega'(u_1) & \cdot & \cdot & \omega'(u_4) \\ F'(p_1) & F'(p_2) & F'(p_3) & F'(p_4) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \cdot & \cdot & a_{24} \\ a_{31} & \cdot & \cdot & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{r}{16} \begin{vmatrix} Au_1 & Au_2 & Au_3 & Au_4 \\ \frac{1}{A}\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \frac{1}{A}\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial \Psi}{\partial x_4} \\ Ap_1 & Ap_2 & Ap_3 & Ap_4 \end{vmatrix},$$

so geht

$$\frac{r}{16}\Sigma \pm (\varphi'(u_1)\Phi_1'(u_2)\omega'(u_3)\varphi'(p_4)) \quad \text{über in} \quad \frac{r}{16}\Sigma \pm \left(u_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2} \frac{\partial \Psi}{\partial x_4} p_4 \right),$$

q. e. d.

Soll $\varphi(u, u) = 0$ eine ***Kugelfläche*** darstellen, so wird $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$.

Nun ist identisch:

$$(16.)\quad \begin{cases} \frac{r}{8}\,\Sigma\pm(\varphi'(u_1)x_2\omega'(u_3)\varphi'(p_4)) \\ = \frac{\varphi(p,\,p)}{\mu_1\mu_2\mu_3}\{X_1U_2U_3\mu_1(\mu_2-\mu_3)+X_2U_3U_1\mu_2(\mu_3-\mu_1)+X_3U_1U_2\mu_3(\mu_1-\mu_2)\} \end{cases}$$

oder weil

$$\varphi(p,\,p) = r^2\Sigma\pm(e_{11}e_{22}e_{33}e_{44})\mu_1\mu_2\mu_3,$$

$$(17.)\quad \begin{cases} \frac{r}{8}\,\Sigma\pm(\varphi'(u_1)x_2\omega'(u_3)\varphi'(p_4)) = r^2\Sigma\pm(e_{11}e_{22}e_{33}e_{44}) \\ \qquad \{X_1U_2U_3\mu_1(\mu_2-\mu_3)+X_2U_3U_1\mu_2(\mu_3-\mu_1)+X_3U_1U_2\mu_3(\mu_1-\mu_2)\} \\ \qquad \text{bei willkürlichen } x_i \text{ resp. } X_i \text{ sowie } u_i \text{ resp. } U_i. \end{cases}$$

Mithin ist

$$(17^a.)\qquad \Sigma\pm(\varphi'(u_1)x_2\omega'(u_3)\varphi'(p_4)) \equiv 0 \quad \text{(bei willkürlichen } x_i \text{ und } u_i)$$

die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $\varphi(u, u) = 0$ eine Kugelfläche darstelle oder auch, weil $\Sigma\pm(e_{11}e_{22}e_{33}e_{44}) \gtrless 0$, für $x_i = \varphi'(v_i)$ bei willkürlichen v_i

$$(18.)\qquad \Sigma\pm(\varphi'(u_1)\varphi'(v_2)\omega'(u_3)\varphi'(p_4)) \equiv 0.$$

Ersetzt man in beiden Bedingungsgleichungen (17ª.) und (18.) die e_{ik} durch A_{ik} und darauf $\mu A = \lambda$, so gehen sie in die Bedingungsgleichung für die Kugelfläche II. Ordnung über (vgl. (8.) S. 325.)

Zusatz. Es möge die Bedingung dafür abgeleitet werden, dass eine Grenzfläche II. Klasse $\varphi(u, u) = 0$ ***einen Kreis*** darstelle.

Für eine Curve II. Klasse (Grenzfläche) ist $\varphi(u, u)$ nach der Hauptaxentransformation von der Form

$$(19.)\qquad \varphi(u,\,u) = \frac{U_1^2}{\mu_1} + \frac{U_2^2}{\mu_2} + kU_4^2.$$

Andererseits sei $\Phi(x, x) = \delta_3 X_3^2$, wobei $X_3^2 = 0$ die doppelt zu nehmende Ebene der Grenzfläche darstelle.

Eine geometrische Betrachtung ergiebt, dass im Falle eines Kreises $\varphi(u, u)$ von der Form ist:

$$(20.)\quad \varphi(u, u) \equiv c_0\varphi^2(p, u) + c_1\omega(u, u) + c_2\Phi\left(\tfrac{1}{2}\omega'(u_1), \tfrac{1}{2}\omega'(u_2), \tfrac{1}{2}\omega'(u_3), \tfrac{1}{2}\omega'(u_4)\right),$$

worin c_0, c_1 und c_2 Constanten bedeuten. Eine andere Form der Bedingung ist, dass folgende Determinante identisch verschwinde:

$$(21.)\quad \left\{ \begin{vmatrix} \varphi'(u_1) & \varphi'(u_2) & \varphi'(u_3) & \varphi'(u_4) \\ \varphi'(p_1) & \varphi'(p_2) & \varphi'(p_3) & \varphi'(p_4) \\ \omega'(u_1) & \omega'(u_2) & \omega'(u_3) & \omega'(u_4) \\ \dfrac{\partial \Sigma \Phi'\omega'}{\partial u_1} & \dfrac{\partial \Sigma \Phi'\omega'}{\partial u_2} & \dfrac{\partial \Sigma \Phi'\omega'}{\partial u_3} & \dfrac{\partial \Sigma \Phi'\omega'}{\partial u_4} \end{vmatrix} , \right.$$

$$\text{wobei}\quad \Sigma \Phi'\omega' = \sum_1^4{}_i \Phi'(x_i)\omega'(u_i) = \sum_1^4{}_i u_i \omega'(\Phi'(x_i)).$$

Das identische Verschwinden dieser Determinante (21.) im Falle eines Kreises ergiebt sich daraus, dass sie mit folgender Determinante bis auf einen nicht verschwindenden constanten Factor (Substitutionsdeterminante) übereinstimmt:

$$(22.)\quad \left\{ \begin{vmatrix} \dfrac{U_1}{\mu_1} & \dfrac{U_2}{\mu_2} & 0 & kU_4 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi(p,\ p) \\ U_1 & U_2 & U_3 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 X_3 & 0 \end{vmatrix} \right.$$

$$= \delta_3 \varphi(p,\ p) U_1 U_2 X_3 \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}\right) = \frac{\delta_3^2}{\tau} U_1 U_2 X_3 (\mu_2 - \mu_1).$$

Hieraus folgt: Das identische Verschwinden von

$$(23.)\qquad \Sigma \pm \left(\varphi'(u_1)\varphi'(p_2)\omega'(u_3)\frac{\partial \Sigma \Phi'(x_i)\omega'(u_i)}{\partial u_4}\right)$$

ist ***nothwendige*** und ***hinreichende*** Bedingung für die Ausartung der Grenzfläche $\varphi(u, u) = 0$ in einen ***Kreis***.

Nachtrag zu der Abhandlung „Ueber lineare Differentialgleichungen, deren Integrale nur einen singulären Punkt im Endlichen besitzen und im Unendlichen sich regulär verhalten“ (dieses Journal Band 105 S. 1 ff.).

(Von *Paul Günther*.)*)

In der Nr. IV der genannten Abhandlung (die im Folgenden als „Abh.“ citirt werden möge) wurde auf S. 28 ff. des Falles Erwähnung gethan, wo für eine lineare Differentialgleichung $n$ter Ordnung der daselbst untersuchten Art alle Coefficienten der im Exponenten eines determinirenden Factors $e^{G(x^{-1})}$ auftretenden ganzen rationalen Function $m$ten Grades $G(x^{-1})$ von x^{-1} endliche n-fache Wurzeln der betreffenden Ableitungsgleichungen (a. a. O. S. 11) sind, und eine Anzahl von Sätzen ausgesprochen, die sich theils auf diesen Fall im allgemeinen, theils auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung beziehen. Im Folgenden sollen die (seinerzeit bei der Drucklegung der Abh. aus äusserlichen Gründen weggelassenen) Beweise dieser, sowie einiger anderer Sätze gegeben und auf die Beziehungen dieser Sätze zu den Erörterungen der Nr. V der Abh. hingewiesen werden.

Die Bezeichnungen der Abh. werden durchweg beibehalten.

I.

Soll die Differentialgleichung (Abh. S. 5)

$$(1.) \qquad P(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + q_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + q_n(x)y = 0,$$

worin

$$q_i(x) = a_{ii}x^{-i} + a_{i,i+1}x^{-(i+1)} + \cdots + a_{i,n_i}x^{-n_i} \quad (a_{i,n_i} \neq 0;\ i = 1, 2, \ldots, n)$$

*) Aus nachgelassenen Aufzeichnungen (abgesehen von den einleitenden und einigen verbindenden Sätzen auf S. 337) dem Wortlaute nach ohne wesentliche Aenderungen herausgegeben von Herrn ***Ludwig Schlesinger*** in Klausenburg.

einen determinirenden Factor $e^{G(x^{-1})}$ besitzen, wo $G(x^{-1})$ eine ganze Function $m$ten Grades von x^{-1} bedeutet, so muss sie (vergl. Abh. S. 2) (1.) auf die folgende Form gebracht werden können:

$$(2.) \qquad x^{n(m+1)}y^{(n)}+x^{(n-1)(m+1)}p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_ny \;=\; 0,$$

wo p_i eine ganze rationale Function des Grades mi bedeutet.

Es mögen die Coefficienten von

$$G(x^{-1}) \;=\; A_mx^{-m}+A_{m-1}x^{-(m-1)}+\cdots+A_1x^{-1},$$

oder genauer die mit denselben durch die Gleichungen

$$v_i \;=\; -(m-i)A_{m-i} \qquad (i=0,\,1,\,\ldots,\,m-1)$$

verknüpften Grössen v_i endliche n-fache Wurzeln der betreffenden Ableitungsgleichungen sein. Dann ist also zunächst

$$F(0,\;v)=v^n+p_1(0)v^{n-1}+\cdots+p_n(0)=(v-v_0)^n,$$

es muss folglich $p_1(0)=-nv_0$, oder

$$v_0 \;=\; -\frac{1}{n}p_1(0)$$

sein. Die Gleichung (2.) geht durch die Substitution

$$y \;=\; e^{-\frac{1}{m}v_0x^{-m}}\cdot y_1$$

über in

$$(2^a.) \qquad \left\{\begin{array}{l} x^{n(m+1)}y_1^{(n)}+x^{(n-1)(m+1)}(nP_{11}+p_1)y_1^{(n-1)} \\ +x^{(n-2)(m+1)}(n_2P_{21}+(n-1)_1p_1P_{11}+p_2)y_1^{(n-2)} \\ +\cdots+(P_{n1}+p_1P_{n-1,1}+\cdots+p_n)y_1 \;=\; 0, \end{array}\right.$$

wo

$$P_{i1} \;=\; x^{i(m+1)}.e^{\frac{1}{m}v_0x^{-m}}\cdot\frac{d^ie^{-\frac{1}{m}v_0x^{-m}}}{dx^i},$$

$$(P_{11}=v_0, \quad P_{i1}(0)=v_0^i)$$

gesetzt ist.

Soll die Differentialgleichung (2ª.) einen determinirenden Factor $(m-1)$-ten Grades besitzen, dessen höchster Coefficient $A_{m-1}=-\frac{1}{m-1}v_1$ eine endliche n-fache Wurzel der betreffenden Gleichung ist, so muss (2ª.) auf folgende Form gebracht werden können:

$$(3.) \qquad x^{nm}y_1^{(n)}+x^{(n-1)m}p_{11}y_1^{(n-1)}+\cdots+p_{n1}y_1 \;=\; 0,$$

es wird also

$$\begin{aligned} nP_{11}+p_1 &= xp_{11}, \\ n_2P_{21}+(n-1)_1p_1P_{11}+p_2 &= x^2p_{21}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot

der betreffenden Gleichung ist

$$(4.) \qquad x^{n(m-1)}y_2^{(n)}+x^{(n-1)(m-1)}.p_{12}y_2^{(n-1)}+\cdots+p_{n2}y_2 = 0,$$

wo demnach

$$nP_{12}+p_{11} = xp_{12},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$P_{n2}+p_{11}P_{n-1,2}+\cdots+p_{n1} = x^n p_{n2}$$

ist, oder also, wie oben

$$p_{\lambda 2} = \left(\frac{p_{\lambda 1}}{x^\lambda}\right)_{x^{(\lambda-1)(m-1)}}+g_{(\lambda-1)(m-2)-1},$$
$$= \left(\frac{p_\lambda}{x^{2\lambda}}\right)_{x^{(\lambda-1)(m-2)}}+g_{(\lambda-1)(m-2)-1},$$

speciell

$$p_{12}(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2p_1(x)}{dx^2}\right)_0; \quad v_2 = -\frac{1}{n}\frac{1}{2}\left(\frac{d^2p_1(x)}{dx^2}\right)_0.$$

Durch Fortsetzung dieser Schlussweise erkennt man: soll auch der letzte Coefficient $A_1 = -v_{m-1}$ eine n-fache Wurzel der zu seiner Bestimmung dienenden algebraischen Gleichung sein, so gelangt man durch fortgesetzte Transformationen, bei denen sich der Reihe nach

$$v_3 = -\frac{1}{3!}\frac{1}{n}\left(\frac{d^3p_1(x)}{dx^3}\right)_0, \quad \ldots, \quad v_{m-2} = -\frac{1}{(m-2)!}\frac{1}{n}\left(\frac{d^{m-2}p_1(x)}{dx^{m-2}}\right)_0$$

ergiebt, zu einer Differentialgleichung

$$x^{2n}y_{m-1}^{(n)}+x^{2(n-1)}p_{1,m-1}^{\cdot}.y_{m-1}^{(n-1)}+\cdots+p_{n,m-1}.y_{m-1} = 0,$$

in welcher

$$p_{\lambda,m-1} = \left(\frac{p_\lambda}{x^{\lambda(m-1)}}\right)_{x^{\lambda-1}}+g_{\lambda-2}$$

ist (speciell $p_{1,m-1} = a_{11}x+a_{12}$), und es wird

$$p_{1,m-1}(0) = \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{d^{m-1}p_1(x)}{dx^{m-1}}\right)_0; \quad v_{m-1} = -\frac{1}{(m-1)!}\frac{1}{n}\left(\frac{d^{m-1}p_1(x)}{dx^{m-1}}\right)_0.$$

Die Differentialgleichung für y_{m-1} geht durch die Substitution

$$y_{m-1} = e^{-v_{m-1}x^{-1}}.y_m$$

über in

$$x^{2n}y_m^{(n)}+x^{2(n-1)}(nP_{1m}+p_{1,m-1})y_m^{(n-1)}+\cdots = 0;$$

hier ist

$$P_{im} = x^{2i}e^{v_{m-1}x^{-1}}\frac{d^ie^{-v_{m-1}x^{-1}}}{dx^i}, \quad P_{1m} = v_{m-1},$$

also

$$nP_{1m}+p_{1,m-1} = a_{11}x.$$

Wenn nun $n>2$, so lässt sich, wie die Herleitung zeigt, über die eventuell vorhandenen regulären Integrale der Gleichung für y_m (auf solche würde es ja für die Untersuchung der Normalintegrale der Gleichung (2.) ankommen) nichts Allgemeines weiter aussagen; nehmen wir aber $n=2$, betrachten also die Gleichung

$$(5.) \qquad x^4y_m''+x^3a_{11}y_m'+(P_{2m}+p_{1,m-1}P_{1m}+p_{2,m-1})y_m = 0,$$

so kann dieselbe nach dem Obigen folgendermassen geschrieben werden:

$$(5^a.) \qquad x^4y_m''+x^3a_{11}y_m'+[a_{22}x^2+g_1(x)]y_m = 0.$$

Hierin ist $g_1(0)=0$, da

$$P_{2m}(0)=v_{m-1}^2, \quad P_{1,m-1}=v_{m-1},$$
$$v_{m-1}^2+p_{1,m-1}(0)v_{m-1}+p_{2,m-1}(0) = 0$$

ist, also kommt

$$(5^b.) \qquad x^3y_m''+x^2a_{11}y_m'+(a_{22}x+g_0)y_m = 0.$$

Ist $g_0\neq 0$, so kann diese Gleichung kein reguläres Integral besitzen, denn ihre determinirende Function ist dann eine Constante, nämlich g_0; soll also $(5^b.)$ überhaupt ein reguläres Integral besitzen, so muss $g_0=0$ sein, dann aber hat diese Gleichung, welche nun die Form

$$(6.) \qquad y_m''+\frac{a_{11}}{x}y_m'+\frac{a_{22}}{x^2}y_m = 0$$

annimmt, nicht nur *ein* in der Umgebung von $x=0$ reguläres Integral, sondern sogar deren zwei, nämlich x^{r_1} und x^{r_2} oder x^{r_1} und $x^{r_1}\log x$, jenachdem die Wurzeln r_1, r_2 der Gleichung

$$r(r-1)+a_{11}r+a_{22} = 0$$

ungleich oder gleich sind. Damit ist die in der Abh. (Nr. IV, S. 29) aufgestellte Behauptung bewiesen.

Beispiel. Die gegebene Differentialgleichung sei:

$$y''+\left(\frac{a_{11}}{x}+\frac{a_{12}}{x^2}+\frac{a_{13}}{x^3}\right)y'+\left(\frac{a_{22}}{x^2}+\cdots+\frac{a_{26}}{x^6}\right)y = 0.$$

Nimmt man hier $m=2$, so wird

$$p_1=a_{11}x^2+a_{12}x+a_{13}, \quad p_2=a_{22}x^4+\cdots+a_{26},$$

und die zugehörige algebraische Gleichung lautet,

$$F(x,\ v)=v^2+[(a_{11}-3)x^2+a_{12}x+a_{13}]v+a_{22}x^4+\cdots+a_{26}=0.$$

Da $\nu_1 = 2 = m$ (vgl. Abh. S. 12), so kann man, auch wenn der erste Coefficient v_0 eine Doppelwurzel ist, dennoch v_0 und v_1 zugleich durch Reihenentwickelung aus $F(x, v) = 0$ allein finden. Es wird

$$v = -\tfrac{1}{2}[a_{13}+a_{12}x+(a_{11}-3)x^2]+\sqrt{\tfrac{1}{4}(a_{13}+\cdots)^2-(a_{22}x^4+\cdots)}.$$

Da v_0 eine Doppelwurzel $= -\frac{1}{2}a_{13}$ sein soll, ist $a_{13}^2-4a_{26}=0$, und man erhält als erste nothwendige Bedingung

$$a_{12}a_{13}-2a_{25} = 0.$$

Ist dieselbe erfüllt, so kommt (vgl. Abh. S. 28)

$$u = v_0+v_1x = -\tfrac{1}{2}a_{13}+\alpha x, \quad \alpha = -\frac{a_{12}}{2}+\sqrt{\frac{a_{12}^2}{4}+\frac{a_{13}}{2}(a_{11}-3)}.$$

Es wird also

$$G(x^{-1}) = \frac{a_{13}}{4}x^{-2}-\alpha x^{-1}, \quad P_1(x) = u = -\frac{a_{13}}{2}+\alpha x,$$

$$P_2(x) = \frac{a_{13}^2}{4}-\alpha a_{13}x+\left(\frac{3a_{13}}{2}+\alpha^2\right)x^2-2\alpha x^3,$$

folglich die Differentialgleichung für η:

$$x^3\eta''+(2\alpha+a_{12}+a_{11}x)x\eta'+(a_{23}-2\alpha+a_{11}\alpha+a_{22}x)\eta = 0.$$

Wenn hierin α zweiwerthig (d. h. v_1 eine einfache Wurzel der betreffenden Ableitungsgleichung) also $2\alpha+a_{12} \neq 0$ ist, so wird die determinirende Function vom ersten Grade, mithin der Exponent A (vgl. Abh. S. 22 unten) eindeutig bestimmt durch

$$(2\alpha+a_{12})A+a_{23}-2\alpha+a_{11}\alpha = 0;$$

ist aber auch v_1 eine Doppelwurzel, $2\alpha+a_{12}=0$, so kann kein reguläres Integral η existiren, wenn nicht auch

$$a_{23}+a_{12}-\frac{a_{11}a_{12}}{2} = 0$$

ist; dann aber sind sogar zwei reguläre Integrale vorhanden, weil sich die Differentialgleichung auf

$$\eta''+\frac{a_{11}}{x}\eta'+\frac{a_{12}}{x^2}\eta = 0$$

reducirt.

II.

Wir haben oben gezeigt, dass in der That (wie in der Abh. S. 29 behauptet wurde), wenn bei einer Differentialgleichung $n$ter Ordnung die

Coefficienten A_i sämmtlich n-fache Wurzeln der betreffenden Gleichungen sind, alsdann stets

$$v_h = -\frac{1}{n}\frac{1}{h!}\left(\frac{d^h p_1(x)}{dx^h}\right)_0$$

sein muss, und dass (wenigstens für $n = 2$) möglichenfalls die Differentialgleichung für

$$y_m = e^{-G(x^{-1})}.y$$

lauter in der Umgebung von $x = 0$ reguläre Integrale besitzt. Es soll nun umgekehrt bewiesen werden, dass, wenn die gegebene Differentialgleichung $P(y) = 0$ die letztere Eigenschaft besitzt, wenn also $P(y)$ nach der Bezeichnungsweise von Herrn *Thomé* (dieses Journal, Bd. 83 S. 91, Bd. 96 S. 209) ein normaler Differentialausdruck mit dem determinirenden Factor

$$e^{G(x^{-1})}$$

ist, alsdann stets die Grössen v_h auf die angegebene Weise bestimmt werden, und n-fache Wurzeln der betreffenden Ableitungsgleichungen sind.

Um dies einzusehen beachte man zunächst, dass die Differentialgleichung für y_m, die wir in der Form

$$\bar{P}(y_m) = e^{-G(x^{-1})} P(e^{G(x^{-1})}.y) = 0$$

schreiben wollen, ebenfalls wie $P(y) = 0$, der *Hamburger*schen Klasse angehören muss, da ihre Integrale wie die von $P(y) = 0$ im Endlichen nur den singulären Punkt $x = 0$ besitzen und im Unendlichen sich regulär verhalten. Da nun gleichzeitig die Gleichung $\bar{P} = 0$ lauter in der Umgebung von $x = 0$ reguläre Integrale besitzen soll, so kann sie nur die Form

$$(7.) \qquad x^n y_m^{(n)} + x^{n-1} p_{1m} y_m^{(n-1)} + \cdots + p_{nm} y_m = 0$$

haben, wo die Grössen $p_{im} = a_{ii}$ constant sind. Durch die Substitution

$$y_m = e^{v_{m-1} x^{-1}} y_{m-1}$$

geht (7.) über in

$$(8.) \qquad x^{2n} y_{m-1}^{(n)} + x^{2(n-1)} p_{1,m-1} y_{m-1}^{(n-1)} + \cdots + p_{n,m-1} y_{m-1} = 0,$$

wo

$$(8^a.) \qquad \begin{cases} p_{1,m-1} = n\,\Pi_{1m} + x p_{1m}, \\ p_{2,m-1} = n_2 \Pi_{2m} + (n-1)_1 x p_{1m} \Pi_{1m} + x^2 p_{2m}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{n,m-1} = \Pi_{nm} + x p_{1m} \Pi_{n-1,m} + \cdots + x^n p_{nm}, \end{cases}$$

wenn nämlich gesetzt wird

$$\Pi_{im}(x) = x^{2i} e^{-v_{m-1}x^{-1}} \frac{d^i e^{v_{m-1}x^{-1}}}{dx^i},$$

$$\Pi_{im}(0) = (-1)^i v_{m-1}^i.$$

Aus dem Gleichungssysteme (8ª.) folgt aber

$$p_{i,m-1}(0) = (-1)^i n_i v_{m-1}^i,$$

so dass v_{m-1} eine n-fache Wurzel der Gleichung

$$F_{m-1}(0, v) = v^n + p_{1,m-1}(0) v^{n-1} + \cdots + p_{n,m-1}(0)$$

ist.

In derselben Weise weiter schliessend erkennt man die Richtigkeit des einen Theiles der aufgestellten Behauptung, dass nämlich die v_h n-fache Wurzeln der betreffenden Ableitungsgleichungen sind; hieraus folgt aber auf Grund des in der Nr. I bewiesenen allgemeinen Satzes sofort auch die Richtigkeit des anderen Theiles, d. h. die Darstellbarkeit von v_h in der angegebenen Form.

Für $n = 2$ ergeben sich wie am Schlusse der Nr. V der Abh. (S. 34) gezeigt wurde, aus den hier allgemein hergeleiteten Resultaten, die Bedingungen für die Existenz logarithmischer Normalintegrale. Für $n > 2$ und eine beliebige lineare Differentialgleichung $Q(y) = 0$, deren Coefficienten in der Umgebung der singulären Stelle $x = a$ sich wie rationale Functionen verhalten, wurde a. a. O. (S. 30 ff.) nachgewiesen, dass man aus der Existenz eines Integrals der Form

$$(9.) \qquad y = (x-a)^r \sum_{i=1}^{p} e^{W_i} \sum_k \varphi_{ik} \log^k (x-a)$$

auf das Vorhandensein von Integralen der Form

$$v_i = (x-a)^r e^{W_i} \varphi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p;\ p \leqq n)$$

schliessen kann. Hieraus folgt, dass sich $Q(y)$ z. B. in die Form

$$Q(y) = A_1 B_1$$

setzen lässt, wo

$$B_1 = v_1 \frac{d}{dx} \frac{y}{v_1},$$

und die Integrale von $A_1 = 0$ die fundamentalen determinirenden Factoren

$$e^{W_1}, \quad e^{W_2}, \quad \ldots, \quad e^{W_p}$$

besitzen. Sind die sämmtlichen Integrale von $Q(y) = 0$ in der Form (9.) darstellbar, so ergiebt sich durch Fortsetzung dieses Schlussverfahrens, dass $Q(y)$ ein aus normalen Componenten zusammengesetzter Differentialausdruck ist, und zwar genügt jede Integralgruppe, der (Abh. S. 33) der fundamentale determinirende Factor e^{W_i} gemeinsam ist, einer Differentialgleichung mit normalem Differentialausdruck. Die Bedingungen für einen solchen kann man aufstellen und hat dann um die allgemeine Form für $Q(y)$ zu erhalten nur die Differentialgleichung zu bilden, die die Integrale einer Anzahl gegebener Differentialgleichungen vereinigt enthält.

Ueber die Existenz von Integralen bei Systemen partieller Differentialgleichungen.

(Von Herrn *Paul Stäckel* in Kiel.)

In seiner Abhandlung: *Ueber die Integrale partieller Differentialgleichungssysteme beliebiger Ordnung* (dieses Journal, Bd. 109. S. 261 bis 340 1892) hat Herr *Königsberger* die Frage nach der Existenz von Integralen bei Systemen partieller Differentialgleichungen beliebiger Ordnung behandelt und ist dabei zu folgenden Ergebnissen gelangt.

Bestehen zwischen s Functionen

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots \quad y_s$$

der r unabhängigen Veränderlichen

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_r$$

und ihren partiellen Ableitungen nach diesen Veränderlichen eben so viele Gleichungen:

$$(1.) \quad \begin{cases} F_1\left(x_1, \ldots, x_r;\ y_1, \ldots, y_s;\ \ldots, \dfrac{\partial^{\varrho_1+\varrho_2+\cdots+\varrho_r} y_k}{\partial x_1^{\varrho_1} \partial x_2^{\varrho_2} \ldots \partial x_r^{\varrho_r}}, \ldots\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_s\left(x_1, \ldots, x_r;\ y_1, \ldots, y_s;\ \ldots, \dfrac{\partial^{\varrho_1+\varrho_2+\cdots+\varrho_r} y_k}{\partial x_1^{\varrho_1} \partial x_2^{\varrho_2} \ldots \partial x_r^{\varrho_r}}, \ldots\right) = 0, \end{cases}$$

so kann dieses *Differentialsystem**) durch Einführung neuer abhängiger Veränderlicher in ein anderes verwandelt werden, das nur partielle Ableitungen erster Ordnung enthält und das daher ein *Differentialsystem erster Ordnung* heissen soll. Könnte man also die Frage nach der Existenz von Integralen für jedes beliebige Differentialsystem erster Ordnung beantworten, so wäre

*) Ebenso wie man eine Gleichung zwischen Differentialquotienten eine *Differentialgleichung* nennt, ebenso empfiehlt es sich, ein System solcher Gleichungen als ein *Differentialsystem* zu bezeichnen.

damit gleichzeitig dasselbe Problem für die Differentialsysteme höherer Ordnung gelöst.

Es sei nun ein Differentialsystem erster Ordnung vorgelegt:

$$(2.)\quad \begin{cases} F_1\left(x_1, \ldots, x_r;\ y_1, \ldots, y_s;\ \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial y_1}{\partial x_r}, \ldots, \dfrac{\partial y_s}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial y_s}{\partial x_r}\right) = 0, \\ \quad\ldots\ldots\ldots

gegeben, so soll gezeigt werden, dass, wenn $a_2, a_3, \ldots, a_r$ irgend ein Werthesystem von $x_2, x_3, \ldots, x_r$ bedeutet von der Eigenschaft, dass

1) die Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$ in der Umgebung dieses Werthesystems nach ganzen, positiven, steigenden Potenzen von

$$x_2-a_2, \quad x_3-a_3, \quad \ldots, \quad x_r-a_r$$

entwickelbar sind,

2) die linken Seiten der partiellen Differentialgleichungen (A.) in der Umgebung der Anfangswerthe

$$\text{(C.)} \quad \begin{cases} x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \quad \ldots, \quad x_r = a_r, \\ (y_1)_{a_1,\ldots,a_r} = \varphi_1(a_2, \ldots, a_r) = b_1, \ \ldots, \ (y_s)_{a_1,\ldots,a_r} = \varphi_s(a_2, \ldots, a_r) = b_s, \\ \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\right)_{a_1,\ldots,a_r} = \left(\frac{\partial \varphi_1(x_2, \ldots, x_r)}{\partial x_2}\right)_{a_1,\ldots,a_r} = b_{12}, \quad \ldots, \\ \left(\frac{\partial y_s}{\partial x_2}\right)_{a_1,\ldots,a_r} = \left(\frac{\partial \varphi_s(x_2, \ldots, x_r)}{\partial x_2}\right)_{a_1,\ldots,a_r} = b_{s2}, \\ \ldots\ldots\ldots\

3) die Functionaldeterminante

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}}, & \dfrac{\partial F_1}{\partial \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}}, & \cdots, & \dfrac{\partial F_1}{\partial \dfrac{\partial y_s}{\partial x_1}} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}}, & \dfrac{\partial F_2}{\partial \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}}, & \cdots, & \dfrac{\partial F_2}{\partial \dfrac{\partial y_s}{\partial x_1}} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial F_s}{\partial \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}}, & \dfrac{\partial F_s}{\partial \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}}, & \cdots, & \dfrac{\partial F_s}{\partial \dfrac{\partial y_s}{\partial x_1}} \end{vmatrix}$$

für die Anfangswerthe (C.) und (E.) von Null verschieden ist,

die partiellen Differentialgleichungen (A.) ein Integralsystem $y_1, y_2, \ldots, y_s$ besitzen, welches in der Umgebung von $x_1 = a_1,\ x_2 = a_2,\ \ldots,\ x_r = a_r$ nach positiven, ganzen, steigenden Potenzen von $x_1 - a_1,\ x_2 - a_2,\ \ldots,\ x_r - a_r$ fortschreitende Entwickelungen, also den Charakter ganzer Functionen besitzt und für $x_1 = a_1$ die willkürlich festgesetzten Functionalwerthe (B.) aller übrigen Variablen annimmt."

Herr *Königsberger* hat seinem Theoreme noch zwei andere Formen gegeben, die jedoch für die vorliegende Untersuchung nicht in Betracht kommen, da er auch bei ihnen ausdrücklich voraussetzt, dass es sich um Differentialsysteme erster Ordnung und $s$ter Klasse handelt.

Dass das Problem, die Existenz von Integralen für Differentialsysteme erster Ordnung zu beweisen, durch den Satz von Herrn *Königsberger* nicht in seiner vollen Allgemeinheit gelöst wird, zeigt die Bedingung 3), die nur dann erfüllt werden kann, wenn das System (A.) wirklich ein System $s$ter Klasse ist.

Diese Beschränkung ist wesentlicher, als man zunächst vermuthen wird. *Sie bewirkt, dass das Theorem von Herrn Königsberger nicht ausreicht, um die Sätze über Differentialsysteme höherer Ordnung zu beweisen, die von Cauchy, Sonja Kowalewska, Darboux und andern entwickelt worden sind,* und dieser Sachverhalt, auf dessen genauere Darlegung sogleich eingegangen werden soll, verdient um so mehr Beachtung, als er Herrn *Königsberger* entgangen zu sein scheint, der in der Einleitung zu seiner Abhandlung sich so äussert:

„Indem ich diese Untersuchungen zum Gegenstande der vorliegenden Arbeit mache, will ich bemerken, dass der Existenzbeweis der Integrale

partieller Differentialgleichungssysteme bekanntlich bereits durch die Arbeiten von *Cauchy, Sophie von Kowalewsky, Darboux* und *Poincaré* gegeben ist; ich halte es jedoch nicht für überflüssig, diesen Satz hier im Zusammenhange nochmals und vielleicht in übersichtlicherer Form zu beweisen, zumal da die vorliegende Untersuchung auf Betrachtungen und Methoden führt, die ich später häufig benutzen werde."

Vorgelegt sei, um das Wesen der Sache an einem einfachen Beispiele auseinanderzusetzen, eine partielle Differentialgleichung mit einer abhängigen und zwei unabhängigen Veränderlichen

$$(1'.) \qquad F\Big(x_1;\ x_2;\ y_1;\ \frac{\partial y_1}{\partial x_1},\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2};\ \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2},\ \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1 \partial x_2},\ \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_2^2}\Big) = 0.$$

Werden, wie es Herr *Königsberger* vorschreibt, als neue abhängige Veränderliche

$$y_2 = \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \quad y_3 = \frac{\partial y_1}{\partial x_2}$$

eingeführt, so findet man als zugehöriges Differentialsystem erster Ordnung:

$$(2'.) \quad \begin{cases} F_1 \equiv F_1\Big(x_1, x_2; y_1, y_2, y_3; \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_2}, \frac{\partial y_3}{\partial x_1}, \frac{\partial y_3}{\partial x_2}\Big) = 0, \\ F_2 \equiv \frac{\partial y_1}{\partial x_1} - y_2 = 0, \\ F_3 \equiv \frac{\partial y_1}{\partial x_2} - y_3 = 0 \end{cases}$$

und überzeugt sich sofort, dass die beiden Functionaldeterminanten (3.) in diesem Falle identisch verschwinden, dass also das Differentialsystem (2'.) kein System dritter Klasse ist. Mithin reicht der Satz von Herrn *Königsberger* nicht aus, um die Existenz von Integralen bei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit einer abhängigen und zwei unabhängigen Veränderlichen nachzuweisen.

Dass überhaupt ein Differentialsystem höherer Ordnung im allgemeinen auf ein Differentialsystem erster Ordnung führt, das der Bedingung 3) von Herrn *Königsberger* nicht genügt, ist leicht einzusehen. Sobald man nämlich genöthigt ist, zwei erste Ableitungen nach verschiedenen Variabeln als neue abhängige Veränderliche in (1.) einzuführen, also etwa

$$\frac{\partial y_\varkappa}{\partial x_1} = y_{s+1}, \quad \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_2} = y_{s+2}$$

zu setzen, so besteht in jeder der r Functionaldeterminanten

$$\frac{\partial(F_1, F_2, \ldots)}{\partial\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_a}, \frac{\partial y_2}{\partial x_a}, \ldots\right)} \qquad (a = 1, 2, \ldots, r)$$

mindestens eine Zeile aus lauter Nullen, und es werden daher alle diese Determinanten identisch verschwinden.

Die Untersuchungen von Herrn *Königsberger* lassen demnach keine unmittelbare Anwendung auf die allgemeine Theorie der Differentialsysteme höherer Ordnung zu. Es liegt jedoch nahe zu fragen, ob sie nicht durch geeignete Abänderungen für diesen Zweck brauchbar gemacht werden können. Zwei Wege bieten sich hier dar. Man könnte versuchen, die Zurückführung der Differentialsysteme höherer Ordnung auf Differentialsysteme erster Ordnung auf eine andere Art zu bewirken, als es von Herrn *Königsberger* geschieht, und dadurch zu erreichen, dass die zugehörigen Systeme erster Ordnung der Bedingung 3) genügen. Einfache Ueberlegungen zeigen jedoch, dass man dadurch nicht zu dem gewünschten Ziele gelangt, weil das Verfahren der Zurückführung, das Herr *Königsberger* anwendet, der Natur der Sache nach keiner wesentlichen Aenderung fähig ist. Mithin bleibt nur übrig, das zugehörige Differentialsystem erster Ordnung umzuformen, also zu ermitteln, ob es sich durch eine passend zu wählende Transformation der Form:

$$\text{(T.)} \qquad \begin{cases} x_a = \Phi_a(\xi_1, \ldots, \xi_r; \eta_1, \ldots, \eta_s), & (a = 1, 2, \ldots, r) \\ y_\varkappa = \Psi_\varkappa(\xi_1, \ldots, \xi_r; \eta_1, \ldots, \eta_s) & (\varkappa = 1, 2, \ldots, s) \end{cases}$$

in ein Differentialsystem erster Ordnung und $s$ter Klasse:

$$\text{(4.)} \qquad \begin{cases} G_1\left(\xi_1, \ldots, \xi_r; \eta_1, \ldots, \eta_s; \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_r}, \ldots, \frac{\partial \eta_s}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial \eta_s}{\partial \xi_r}\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G_s\left(\xi_1, \ldots, \xi_r; \eta_1, \ldots, \eta_s; \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_r}, \ldots, \frac{\partial \eta_s}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial \eta_s}{\partial \xi_r}\right) = 0 \end{cases}$$

überführen lässt.

Gewiss wird man in vielen Fällen durch eine solche Transformation (T.), bei der es übrigens genügt Φ_a und $\Psi_\varkappa$ als *lineare* Functionen ihrer Argumente anzunehmen, den gewünschten Zweck erreichen und damit die Tragweite des Theorems von Herrn *Königsberger* erheblich ausdehnen können. ***Allein es lässt sich zeigen, dass dieses Mittel gerade bei denjenigen***

Differentialsystemen erster Ordnung versagt, die aus allgemeinen Differentialsystemen höherer Ordnung entsprungen sind.

Es gilt nämlich der Lehrsatz, dass ***jedes Differentialsystem s-ter Klasse vollständig integrabel**) ist.* Zum Beweise beachte man, dass die Gleichungen (2.) wegen der Bedingung 3) nach den Grössen

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial y_s}{\partial x_1}$$

aufgelöst werden können. Auf diese Art möge sich ergeben:

$$(2^*.) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} = f_1\left(x_1, \ldots, x_r;\ y_1, \ldots, y_s;\ \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial y_1}{\partial x_r}, \ldots, \dfrac{\partial y_s}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial y_s}{\partial x_r}\right), \\ \cdots\cdots\cdots\

nach sich. Folglich ist das aus (1.) durch das Verfahren von Herrn *Königsberger* erhaltene *Differentialsystem erster Ordnung von s+p Gleichungen zwischen s+p unbekannten Functionen sicher nicht vollständig integrabel* und kann also auch nicht durch eine Transformation der Veränderlichen in ein Differentialsystem übergeführt werden, das die Bedingung 3) von Herrn *Königsberger* erfüllt und daher vollständig integrabel ist.

Aus diesen Auseinandersetzungen ist zu schliessen, dass die Frage nach der Existenz von Integralen bei Differentialsystemen *höherer* Ordnung nur dann auf dieselbe Frage für Differentialsysteme *erster* Ordnung zurückgeführt wird, wenn über die Anzahl der Gleichungen, aus denen das zugehörige Differentialsystem erster Ordnung besteht, keine beschränkende Voraussetzung gemacht wird, das heisst, wenn *diese Anzahl auch grösser sein darf als die Anzahl der unbekannten Functionen.*

Diese Frage zu beantworten, ist aber das Theorem von Herrn *Königsberger,* auch wenn man den Bereich seiner Gültigkeit durch eine allgemeine Transformation der Veränderlichen erweitert, durchaus nicht im Stande. Man wird vielmehr auf ein neues, überaus schwieriges Problem geführt, das neuerdings Herr *Riquier* mit Erfolg zu behandeln begonnen hat*).

Unter diesen Umständen scheint gegenwärtig die *directe* Untersuchung der Differentialsysteme höherer Ordnung, besonders wenn es sich um *eine* unbekannte Function von r Veränderlichen handelt, der allein gangbare Weg zu sein, und man wird so auf die Arbeiten von *Cauchy, Sonja Kowalewska* und *Darboux* zurückgeführt.

---

*) De l'existence des intégrales dans un système différentiel quelconque. Annales de l'École normale supérieure. Série 3, t. X, 1893, S. 65—86, 123—150, 167—181, 359—386; vergleiche auch mein Referat in dem Jahrbuche der Fortschritte der Mathematik, Bd. XXV. S. 590—594.

Sur la transformée d'*Euler*.

(Extrait d'une lettre de M. *S. Pincherle* à Bologne à M. *L. Schlesinger* à Clausembourg.)

Vous vous êtes occupé à plusieurs reprises, dans vos mémoires originaux et dans votre excellent „Handbuch der linearen Differentialgleichungen", de la transformation fonctionnelle, souvent employée dans l'étude des équations différentielles linéaires, que vous appelez *transformation d'Euler*. C'est pourquoi je pense que les quelques lignes qui suivent, où cette transformation est présentée d'une façon synthétique, ne vous paraîtront pas dénuées d'intérêt.

Je définis une opération distributive A_s par les équations symboliques suivantes, où D est le symbole de la dérivation ordinaire, A_s' est ce que j'ai appelé*) la dérivée fonctionnelle de A_s, c'est-à-dire $A(x\varphi)-xA(\varphi)$, et s un nombre quelconque:

$$(1.) \qquad DA_s = A_s D, \quad A_s' D = s A_s.$$

Il suit d'abord de là que A_s' est aussi permutable avec D, et qu'il en est de même des dérivées fonctionnelles successives A_s'', ..., $A_s^{(n)}$, ... de A_s; on déduit ensuite de (1.):

$$(2.) \quad A_s^{(n)} D^m = D^m A_s^{(n)} = (s-n+1)(s-n+2)\ldots(s-n+m) A^{(n-m)}.$$

Soit maintenant une expression (ou *forme*) différentielle linéaire de la classe de M. *Fuchs*,

$$F(\varphi) = \sum_{i=0}^{m} a_i(x) D^i \varphi,$$

où l'on peut supposer le polynôme entier en x, $a_i(x)$, du degré i; si ce degré était plus grand, $i+r$, on n'aurait qu'à poser $\varphi = D^r \psi$. On aura

$$A_s F(\varphi) = \sum_{i=0}^{m} A_s(a_i(x) D^i \varphi);$$

*) V. mon *Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif*, Math. Ann., Bd. 49, § 56.

mais l'on a*)

$$A_s(\alpha_i D^i) = \alpha_i A_s D^i + \frac{\alpha_i'}{1} A_s' D^i + \frac{\alpha_i''}{1.2} A_s'' D^i + \cdots \frac{\alpha_i^{(i)}}{i!} A_s^{(i)} D^i,$$

et, en appliquant la formule (2.):

$$A_s(\alpha_i D^i) = \alpha_i D^i A_s + s\alpha_i' D^{i-1} A_s + \frac{s(s-1)}{1.2} \alpha_i'' D^{i-2} A_s + \cdots + \frac{s(s-1)\ldots(s-i+1)}{1.2\ldots i} \alpha_i^{(i)} A_s.$$

Si donc l'on pose

$$F_s(\varphi) = \sum_{i=0}^{m} \left(\alpha_i D^i \varphi + s\alpha_i' D^{i-1} \varphi + \cdots \frac{s(s-1)\ldots(s-i+1)}{1.2\ldots i} \alpha_i^{(i)} \varphi \right),$$

on aura entre F et F_s la relation

$$A_s F = F_s A_s, \quad \text{ou} \quad F_s = A_s F A_s^{-1};$$

F_s est donc la transformée de F par A_s. L'équation $F_s = 0$ appartient, comme $F = 0$, à la classe de M. *Fuchs;* elle a les mêmes points singuliers, etc. On remarque facilement que les transformations A_s, pour les diverses valeurs de s, forment un groupe à un paramètre, et que l'on a $A_s A_t = A_{s+t}$, avec toutes ses conséquences. La transformation infinitésimale de ce groupe est une opération K définie par les équations symboliques

$$DK = KD, \quad DK' = 1.$$

L'opération A_s pourrait parfaitement s'indiquer par D^s, c'est-à-dire être regardée comme une dérivation d'indice quelconque. Si pour l'opération A_s on veut une expression analytique, on pourra partir de la formule déjà citée**), et en cherchant le développement de $A_s(e^x \varphi)$ en série de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(x) D^n \varphi$, dont on déterminera les coefficients $\lambda_n(x)$ par les équations (1.) au moyen de la méthode des coefficients indéterminés, on obtiendra:

$$A_s(e^x \varphi) = e^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s(s-1)\ldots(s-n+1)}{1.2\ldots n} D^n \varphi.$$

A cette série on peut, comme je l'ai montré dans des exemples analogues***), en substituer d'autres, convergentes dans un champ de fonctions plus étendu.

Une autre expression analytique pour l'opération A_s est donnée par

---

*) Mém. cité, § 61, formule (18).
**) Mémoire cité, § 61.
***) Mémoire cité, § 85.

l'intégrale définie

$$A(\varphi) = \int_{(l)} \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{s+1}}, \tag{3.}$$

où la ligne d'intégration l est prise en sorte que la partie finie, dans l'intégration par parties, soit nulle. En effet, on vérifie immediatément que l'opération (3.) satisfait aux équations symboliques (1.). On retombe ainsi sur l'expression ordinaire de la transformation d'*Euler,* celle que vous donnez dans le douzième *Abschnitt* de votre traité.

Le théorème du § 233 de votre ouvrage s'obtient comme conséquence immédiate de la théorie générale des opérations adjointes, que j'ai donnée tout récemment*) à un point de vue synthétique. D'après cette note, si on indique par $\overline{A}$ l'opération adjointe de l'opération distributive A, on a, (f, φ) étant une opération distributive par rapport aux deux fonctions arbitraires f et φ:

$$(A(f),\ \varphi) = (f,\ \overline{A}(\varphi));$$

on a encore

$$\overline{D} = -D, \quad (\overline{A})' = -(\overline{A'}), \quad (\overline{ABC\ldots}) = \ldots \overline{C}\,\overline{B}\,\overline{A};$$

on a aussi que si F est une expression (forme) différentielle linéaire, $\overline{F}$ est son adjointe au sens de *Lagrange.* Au moyen de ces propriétés, on voit sans peine que si A_s est une transformation d'*Euler,* son adjointe $\overline{A}_s$ satisfait aux équations symboliques (1.) et ne diffère par conséquent de A_s que par un facteur constant. Cela posé, de $F_s = A_s F A_s^{-1}$ on déduit

$$\overline{F}_s = \overline{A}_s^{-1} \overline{F} \overline{A}_s,$$

mais $A_s = c A_s$, donc $\overline{F} = A_s \overline{F}_s A_s^{-1}$, c'est-à-dire:

„la transformée d'*Euler* de l'adjointe de la transformée d'*Euler* d'une forme différentielle linéaire est l'adjointe de cette forme"; c'est là votre théorème.

---

*) Sull' operazione aggiunta, Rendiconti della R. Accademia delle scienze di Bologna, 17. Aprile 1898.

GENERAL
UNIV. OF
31 JAN

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

von

L. Fuchs.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 119.

Heft I.

Ausgegeben den 3. Januar.

Berlin,
S.W. Anhaltstrasse 12.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

1898.

Jährlich circa 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band M. 12.—.

Hierzu 1 Beilage von R. Friedländer & Sohn in Berlin.

Verlag von B. F. Voigt in Weimar.

Elementarbuch der

Differential- und Integralrechnung

mit zahlreichen Anwendungen aus der Analysis, Geometrie, Mechanik, Physik etc.

Bearbeitet von

Fr. Autenheimer.

Vierte verbesserte Auflage.

Mit 157 Abbildungen.

Geh. 9 Mark.

Vorrätig in allen Buchhandlungen.

Gustav E. Stechert, New-York, 9 East 16. Street.

(**London:** 2 Star Yard, Carey Str. — **Paris:** 76 Rue de Rennes. —
Leipzig: Hospitalstr. 10)

sucht vollständige Exemplare und einzelne Bände von:

Mathematische Annalen
Crelle's Journal f. Mathematik
Astronomische Nachrichten.

Gustav E. Stechert kauft ganze Bibliotheken und einzelne Werke.

Crelle's Journal
für die reine und angewandte Mathematik.

Vom Crelle'schen Journal habe ich einige wenige Exemplare durch Nachdruck ergänzt und offerire die Serie

Band 1—100 brosch. für M. 1600.—.

Der angewandte Nachdruck besteht in einem unmittelbaren Uebertragen des Originaldrucks mit absoluter Treue auf einen lithogr. Stein, von welchem mit Steindruckfarbe — wie bei der Lithographie — die Abdrücke genommen werden, so dass eine Beschädigung des benutzten Papieres bei diesem Nachdruckverfahren völlig ausgeschlossen ist. Dieser Druck steht daher dem Typendruck durchaus nicht nach; es erhöht sich sogar noch die Haltbarkeit der nachgedruckten Exemplare durch die verwendete bessere Druckfarbe.

Jede Buchhandlung ist in den Stand gesetzt zu obigem Preise zu liefern.

Einzelne Bände der Serie 1—100 können nicht abgegeben werden.

Von Band 101 und folgende stehen einzelne Bände à M. 12.— zu Diensten.

Berlin. Die Verlagshandlung
Georg Reimer.

Baumgärtner's Buchhandlung, Leipzig.

Durch **jede Buchhandlung** zu beziehen:

Die Geometrie der Lage.

Vorträge von Prof. Dr. **Th. Reye,** ord. Professor an der Universität Strassburg.

Abt. II (3. Aufl.). Mit 26 Textfiguren. Broch. 9 Mk., in Halbfranz gebunden 11 Mk.

Abt. III (neu). Broch. 6 Mk., in Halbfranz gebunden 8 Mk.

Bereits früher erschien:

Abt. I (3. Aufl.). Mit 92 Textfiguren. Broch. 7 Mk., in Halbfranz gebunden 9 Mk.

Aus einer Besprechung von Guido Hauck: „Unserem Verfasser gebührt das Verdienst, das System jenes grossen Geometers (Staudt) von seinen Einseitigkeiten befreit und dadurch nicht nur schmackhaft, sondern vor allem für die Weiterförderung der Wissenschaft nutzbar gemacht zu haben. Diese hat denn auch in den letzten Dezennien eine überaus fruchtbare Weiterentwickelung erfahren, an welcher der Verfasser durch seine bahnbrechenden Arbeiten in hervorragender Weise beteiligt war. Es sei dabei namentlich auf den Ausbau der Liniengeometrie hingewiesen .... Das auch bereits ins Französische und Italienische und jetzt auch ins Englische übersetzte Werk stellt in dieser seiner neuen Auflage das vollständigste Lehrbuch der neueren Geometrie dar."

Unterrichtsbriefe für das

SELBST-STUDIUM

der gesamten ***Elektrotechnik*** und des ***Maschinenbauwesens*** sowie ***Hoch- und Tiefbauwesens.*** **System Karnack-Hachfeld.** Redigiert von O. Karnack (Direktor Müller, Technikum Frankenhausen-Kyffh.) und Regierungsbaumeister Alexander.

Das System **Karnack-Hachfeld** zerfällt in nachfolgende 7 Werke, von denen jedes für sich vollständig abgeschlossen ist:

1. Elektrotechn. Schule
2. Der Maschinenbauer
3. Der Werkmeister
4. Der Monteur, Vorarbeiter u. Maschinist
5. Der Polier
6. Der Bauunternehmer
7. Der Tiefbautechniker

Vorstehende 7 Werke werden in Lieferungen à 60 Pfennige

Diese 7 rühmlichst bekannten, brauchbarsten und besten Werke ihrer Art, welche, keinerlei besondere Vorkenntnisse voraussetzend, jedem strebsamen Techniker eine ausgezeichnete Gelegenheit geben, ohne den Besuch einer technischen Fachschule sich voll und ganz dasjenige Wissen und Können anzueignen, dessen ein Techniker bedarf, behandeln in sehr leicht verständlicher klarer, einfacher mustergültiger Darstellung **alle Gebiete der gesamt. Elektrotechnik beziehungsweise d. gesamten Maschinenbaues oder d. gesamt. Hochbaues sowie des gesamt. Tiefbaues.** Das Studium dieser Werke giebt jedem strebsamen Techniker eine ausgezeichnete bisher noch nicht gebotene Gelegenheit, ohne besonderen Aufwand an Geld und ohne seine berufliche Thätigkeit unterbrechen zu müssen, sich diejenigen Kenntnisse in überraschend leichter Weise aneignen zu können, deren er bedarf, um innerhalb seines Berufes die höchsten Ziele zu erreichen. **Wer sich in das Studium dieser Briefe vertieft und an der Hand dieses auf Grund reichster Erfahrung planmässig angelegten Lehrmittels von Stufe zu Stufe fortschreitet, wird sich gediegene Kenntnisse auf allen Gebieten der Elektrotechnik bezw. des Maschinenbaues oder des Hochbaues oder des Tiefbaues erwerben und unstreitig die schönsten und vorteilhaftesten Erfolge erzielen.** Die Direktion eines Technikums, dessen Abgangsprüfungen unter Aufsicht eines Staatsbeamten stattfinden, wird alljährlich einen nur wenige Wochen umfassenden Kursus einrichten, welcher dazu dienen soll, eine Wiederholung d. gesamt., in unseren Unterrichtsbriefen gebotenen Lehrstoffs vorzunehmen. Nach Beendigung dieses Kursus kann der Techniker an dieser Lehranstalt **die Fachprüfung ablegen** und erhält nach erfolgreicher Prüfung ein **Reifezeugnis.**

Zu beziehen durch jede Buchhandlung. Werbung um Bonness & Hachfeld, Leipzig und Potsdam.

Preis-Ermässigung.

E. Budde,

Allgemeine Mechanik der Punkte

und

starren Systeme.

Ein Lehrbuch für Hochschulen.

Zwei Bände.

Früherer Preis 23 Mark.

Ermässigter Preis 15 Mark.

Verlag von **Georg Reimer** in Berlin.

Band 119. Heft I.
Inhaltsverzeichniss.

R. Fuchs. Ueber die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale als Functionen eines Verzweigungspunktes. . . . . Seite 1

L. Königsberger. Ueber die Principien der Mechanik. (Fortsetzung der Arbeit aus Band 118 Seite 275—350.) . . . . . — 25

B. Igel. Zur Theorie der Zweitheilung elliptischer Functionen. . . . . — 50

H. v. Mangoldt. Ueber eine Anwendung der *Riemann*schen Formel für die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze. . . . . — 65

F. Schottky. Ueber die neun Schnittpunkte zweier ebenen Curven dritter Ordnung. . . . . — 72

A. Gutzmer. Zum Existenzbeweise des Integrals einer linearen homogenen Differentialgleichung von *Paul Günther*. . . . . — 82

Ernst Christian Julius Schering †. . . . . — 86

Sendungen von Beiträgen für das Journal erbittet die Redaction **ausschliesslich** unter der Adresse:

An die Redaction des Journals für die reine und angewandte Mathematik, Verlagsbuchhandlung von Georg Reimer. Berlin S.W., Anhaltstrasse 12.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

von

L. Fuchs.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 119.

Heft II.

Ausgegeben den 29. April.

Berlin,
S.W. Anhaltstrasse 12.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1898.

Jährlich circa 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band M. 12.—.

Hierzu 1 Beilage von Otto Meissners Verlag in Hamburg.

Verlag von **Louis Nebert** in Halle a. S.

Soeben erschien:

Elementare Theorie
der analytischen Funktionen
einer complexen Veränderlichen

von Prof. **J. Thomae.**

Zweite erweiterte u. umgearb. Auflage.

gr. 4°. geh. 9 Mark.

In empfehlende Erinnerung bringen wir folgende anerkannt hervorragende Werke:

Geometrie der Lage

von

Dr. G. H. Chr. von Staudt.

M. 4.—.

Beiträge hierzu

Heft I. II. III. à M. 2.70.

Vom gleichen Verfasser erschien:

Von den reellen und imaginären Halbmessern der Kurven und Flächen II. Ordnung.

M. 1.20.

Verlag der **Friedr. Korn**schen **Buchhandlung in Nürnberg.**

Verlag von **Ferdinand Schöningh** in **Paderborn.**

Einführung in die Grundlagen der Geometrie.

Von

Dr. Wilhelm Killing,

Professor an der Akademie zu Münster.

Zweiter Band.

Mit 8 Figuren im Text.

VI und 361 S. gr. 8. M. 7,00.

Früher ist erschienen:

Erster Band.

Mit 40 Figuren im Text.

X und 357 S. gr. 8. M. 7,00.

Verlag von **Georg Reimer** in Berlin,
zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Jahrbuch
über die
Fortschritte der Mathematik
begründet von
Carl Ohrtmann.
Im Verein mit anderen Mathematikern
und unter besonderer Mitwirkung der Herren
Felix Müller und **Albert Wangerin**
herausgegeben von
Emil Lampe.
Band XXVI.
Jahrgang 1895.
(In 3 Heften.)
Heft I: M. 13.50; Heft II: M. 6.40; Heft III: M. 11.40.

Unterrichtsbriefe für das

SELBST-STUDIUM

der gesamten ***Elektrotechnik*** und des ***Maschinenbauwesens*** sowie ***Hoch-*** und ***Tiefbauwesens.*** **System Karnack-Hachfeld.** Redigiert von O. Karnack (Direktor Müller, Technikum Frankenhausen-Kyffh.) und Regierungsbaumeister Alexander.

Das System **Karnack-Hachfeld** zerfällt in nachfolgende 7 Werke, von denen jedes für sich vollständig abgeschlossen ist:

1. Elektrotechn. Schule
Grundwissen. Handbuch zur Ausbildung von Elektrotechnikern
Maschinenbauschule
2. Der Maschinenbauer
3. Der Werkmeister 4. Der Monteur, Vorarbeiter u. Maschinist
Baugewerbeschule
5. Der Polier 6. Der Bauhandwerksmeister 7. Der Tiefbautechniker

Vorstehende 7 Werke versenden in Lieferungen à 60 Pfennige

Diese 7 rühmlichst bekannten, brauchbarsten und besten Werke ihrer Art, welche, keinerlei besondere Vorkenntnisse voraussetzend, jedem strebsamen Techniker eine ausgezeichnete Gelegenheit geben, **ohne den Besuch einer technischen Fachschule sich voll und ganz dasjenige Wissen und Können anzueignen, dessen ein Techniker** bedarf, behandeln in sehr leicht verständlicher klarer, einfacher mustergültiger Darstellung **alle Gebiete der gesamt. Elektrotechnik beziehungsweise d. gesamten Maschinenbaues oder d. gesamt. Hochbaues sowie des gesamt. Tiefbaues.** Das Studium dieser Werke giebt jedem strebsamen Techniker eine ausgezeichnete bisher noch nicht gebotene Gelegenheit, ohne besonderen Aufwand an Geld und ohne seine berufliche Thätigkeit unterbrechen zu müssen, sich diejenigen Kenntnisse in überraschend leichter Weise aneignen zu können, deren er bedarf, um innerhalb seines Berufes die höchsten Ziele zu erreichen. Wer sich in das Studium dieser Briefe vertieft und an der Hand dieses auf Grund reichster Erfahrung planmässig angelegten Lehrmittels von Stufe zu Stufe fortschreitet, wird sich gediegene Kenntnisse auf allen Gebieten der Elektrotechnik bezw. des Maschinenbaues oder des Hochbaues oder des Tiefbaues erwerben und unstreitig die schönsten und vorteilhaftesten Erfolge erzielen. Die Direktion eines Technikums, dessen Abgangsprüfungen unter Aufsicht eines Staatsbeamten stattfinden, wird alljährlich einen nur wenige Wochen umfassenden Kursus einrichten, welcher dazu dienen soll, eine Wiederholung d. gesamt., in unseren Unterrichtsbriefen gebotenen Lehrstoffs vorzunehmen. Nach Beendigung dieses Kursus kann der Techniker an dieser Lehranstalt **die Fachprüfung ablegen** und erhält nach erfolgreicher Prüfung ein **Reifezeugnis.**

Zu beziehen durch jede Buchhandlung. Werbeschrift gratis
Bonness & Hachfeld, Leipzig und Potsdam.

Preis-Ermässigung.

E. Budde,
Allgemeine Mechanik
der Punkte
und
starren Systeme.
Ein Lehrbuch
für Hochschulen.
Zwei Bände.
Früherer Preis 23 Mark.
Ermässigter Preis 15 Mark.

Verlag von **Georg Reimer**
in Berlin.

Band 119. Heft II.

Inhaltsverzeichniss.

G. Wallenberg. Ueber nichtlineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung. . . . . Seite 87

K. Hensel. Ueber die Zurückführung der Divisorensysteme auf ihre reducirte Form. (Zweite Abhandlung.) . . . . . — 114

L. W. Thomé. Ueber lineare Differentialgleichungen mit mehrwerthigen algebraischen Coefficienten. (Zweite Abhandlung.) . . . . . — 131

H. Hancock. Canonical forms for the unique representation of ***Kronecker***'s modular systems. . . . . — 148

L. Baur. Ueber die Verzweigung der dreiblätterigen ***Riemann***schen Flächen. — 171

Sendungen von Beiträgen für das Journal erbittet die Redaction **ausschliesslich** unter der Adresse:

An die Redaction des Journals für die reine und angewandte Mathematik, Verlagsbuchhandlung von Georg Reimer. Berlin S.W., Anhaltstrasse 12.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

von

L. Fuchs.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 119.

Heft III.

Ausgegeben den 9. Juni.

Berlin,
S.W. Anhaltstrasse 12.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

1898.

Jährlich circa 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band M. 12.—.

In empfehlende Erinnerung bringen wir folgende anerkannt hervorragende Werke:

Geometrie der Lage

von

Dr. G. H. Chr. von Staudt.

M. 4.—.

Beiträge hierzu

Heft I. II. III. à M. 2.70.

Vom gleichen Verfasser erschien:

Von den reellen und imaginären Halbmessern der Kurven und Flächen II. Ordnung.

M. 1.20.

Verlag der Friedr. Kornschen Buchhandlung in Nürnberg.

Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik.

Vom Crelle'schen Journal habe ich einige wenige Exemplare durch Nachdruck ergänzt und offerire die Serie

Band 1—100 brosch. für M. 1600.—.

Der angewandte Nachdruck besteht in einem unmittelbaren Uebertragen des Originaldrucks mit absoluter Treue auf einen lithogr. Stein, von welchem mit Steindruckfarbe — wie bei der Lithographie — die Abdrücke genommen werden, so dass eine Beschädigung des benutzten Papieres bei diesem Nachdruckverfahren völlig ausgeschlossen ist. Dieser Druck steht daher dem Typendruck durchaus nicht nach; es erhöht sich sogar noch die Haltbarkeit der nachgedruckten Exemplare durch die verwendete bessere Druckfarbe.

Jede Buchhandlung ist in den Stand gesetzt zu obigem Preise zu liefern.

Einzelne Bände der Serie 1—100 können nicht abgegeben werden.

Von Band 101 und folgende stehen einzelne Bände à M. 12.— zu Diensten.

Berlin.

Die Verlagshandlung

Georg Reimer.

Verlag von **Georg Reimer** in Berlin,
zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Namenregister

nebst einem Sach-Ergänzungsregister
zu den

Fortschritten der Physik

herausgegeben von
der physikalischen Gesellschaft zu Berlin
Bd. XXI (1865) bis XLIII (1887)
unter Berücksichtigung der in den Bänden I—XX
enthaltenen Autorennamen.

Bearbeitet von
Prof. Dr. B. Schwalbe,
Direktor des Dorotheenst. Realgymn. zu Berlin.

I. Hälfte (Bogen 1—40). Preis M. 30.—.
II. Hälfte (Bogen 41—69). Preis M. 24.—.

Unterrichtsbriefe für das

SELBST-STUDIUM

der gesamten ***Elektrotechnik*** und des ***Maschinenbauwesens*** sowie ***Hoch- und Tiefbauwesens.*** **System Karnack-Hachfeld.** Redigiert von O. Karnack (Direktor Müller, Technikum Frankenhausen-Kyffh.) und Regierungsbaumeister Alexander.

Das System **Karnack-Hachfeld** zerfällt in nachfolgende 7 Werke, von denen jedes für sich vollständig abgeschlossen ist:

1. Elektrotechn. Schule
Handbuch zur Ausbildung von Elektrotechnikern
Maschinenbauschule
2. der Maschinenbauer
3. der Werkmeister f. d. Maschinenbau, Vorarbeiter u. Maschinist
Baugewerbeschule
5. d. Polier 6. d. Bauunternehmer 7. der Tiefbautechniker

Vorstehende 7 Werke erscheinen in Lieferungen à 60 Pfennige

Diese 7 rühmlichst bekannten, brauchbarsten und besten Werke ihrer Art, welche, keinerlei besondere Vorkenntnisse voraussetzend, jedem strebsamen Techniker eine ausgezeichnete Gelegenheit geben, **ohne den Besuch einer technischen Fachschule sich voll und ganz dasjenige Wissen und Können anzueignen, dessen ein Techniker** bedarf, behandeln in sehr leicht verständlicher klarer, einfacher mustergültiger Darstellung **alle Gebiete der gesamt. Elektrotechnik beziehungsweise d. gesamten Maschinenbaues oder d. gesamt. Hochbaues sowie des gesamt. Tiefbaues.** Das Studium dieser Werke giebt jeden strebsamen Techniker eine ausgezeichnete bisher noch nicht gebotene Gelegenheit, ohne besonderen Aufwand an Geld und ohne seine berufliche Thätigkeit unterbrechen zu müssen, sich diejenigen Kenntnisse in überraschend leichter Weise aneignen zu können, deren er bedarf, um innerhalb seines Berufes die höchsten Ziele zu erreichen. Wer sich in das Studium dieser Briefe vertieft und an der Hand dieses auf Grund reichster Erfahrung planmässig angelegten Lehrmittels von Stufe zu Stufe fortschreitet, wird sich gediegene Kenntnisse auf allen Gebieten der Elektrotechnik bezw. des Maschinenbaues oder des Hochbaues oder des Tiefbaues erwerben und unstreitig die schönsten und vorteilhaftesten Erfolge erzielen. Die Direktion eines Technikums, dessen Abgangsprüfungen unter Aufsicht eines Staatsbeamten stattfinden, wird alljährlich einen nur wenige Wochen umfassenden Kursus einrichten, welcher dazu dienen soll, eine Wiederholung d. gesamt., in unseren Unterrichtsbriefen gebotenen Lehrstoffs vorzunehmen. Nach Beendigung dieses Kursus kann der Techniker an dieser Lehranstalt **die Fachprüfung ablegen** und erhält nach erfolgreicher Prüfung ein **Reifezeugnis.**

Zu beziehen durch jede Buchhandlung. Verlag von Bonness & Hachfeld, Leipzig und Potsdam.

Preis-Ermässigung.

E. Budde,
Allgemeine Mechanik
der Punkte
und
starren Systeme.
Ein Lehrbuch
für Hochschulen.

Zwei Bände.

— Früherer Preis 23 Mark. —

Ermässigter Preis 15 Mark.

Verlag von **Georg Reimer**
in Berlin.

Band 119. Heft III.

Inhaltsverzeichniss.

K. Hensel. Ueber die elementaren arithmetischen Eigenschaften der reinen Modulsysteme zweiter Stufe. . . . . Seite 175

H. Kühne. Die Uebertragung eines geometrischen Lehrsatzes auf Mannigfaltigkeiten von gerader Ordnung als Beispiel der Anwendung einer schiefen Determinante. . . . . — 186

J. Horn. Ueber das Verhalten der Integrale von Differentialgleichungen bei der Annäherung der Veränderlichen an eine Unbestimmtheitsstelle. . . — 196

Ph. Brückel. Zusammenstellung der Formeln des Herrn *S. Gundelfinger* zum Hauptaxenproblem der Flächen zweiter Ordnung und zweiter Klasse bei Zugrundelegung von projectiven Coordinaten. . . . . — 210

E. Jahnke. Ueber ein allgemeines aus Thetafunctionen von zwei Argumenten gebildetes Orthogonalsystem und seine Verwendung in der Mechanik. . — 234

W. Heymann. Ueber die Differentialgleichung $\varphi(x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\psi(x)y\frac{dy}{dx}$ $+\chi(x)y^2+\theta(x)=0$. . . . . — 253

Francesco Brioschi †. . . . . — 259

Preisaufgabe der Fürstlich *Jablonowski*schen Gesellschaft zu Leipzig für das Jahr 1901. . . . . — 260

Sendungen von Beiträgen für das Journal erbittet die Redaction **ausschliesslich** unter der Adresse:

An die Redaction des Journals für die reine und angewandte Mathematik, Verlagsbuchhandlung von Georg Reimer. Berlin S.W., Anhaltstrasse 12.

GENERAL LIBRARY,
UNIV. OF MICH.
30 SEP 1898

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

von

L. Fuchs.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 119.

Heft IV.

Ausgegeben den 7. September.

Berlin,
S.W. Anhaltstrasse 12.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

1898.

Jährlich circa 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band M. 12.—.

Hierzu eine Beilage von Johann Ambrosius Barth in Leipzig.

Verlag von **Louis Nebert** in Halle a. S.

Thomae, Prof. Dr. J., **Elementare Theorie der analytischen Funktionen einer complex. Veränderlichen. Zweite erweiterte Auflage.** gr. 4°. geheftet 9 Mark.

Enneper, Prof. Dr. A., **Elliptische Funktionen. Theorie und Geschichte.** Akademische Vorträge. **Zweite Auflage.** Neu bearbeitet und herausgegeben von Prof. Dr. **Felix Müller.** Lex.-8. geh. 18 Mark.

Thomae, Prof. Dr. J., **Die Kegelschnitte in rein projectiver Behandlung.** gr. 8°. geh. 6 Mark.

Thomae, Prof. Dr. J., **Abriss e. Theorie d. Funktionen e. complexen Veränderlichen u. der Thetafunktionen. Dritte,** erheblich vermehrte **Auflage.** gr. 4. geh. 10 Mark.

Thomae, Prof. Dr. J., **Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale.** gr. 4. geh. 2 Mark 80 Pf.

Thomae, Prof. Dr. J., **Sammlung von Formeln, welche bei Anwendung der elliptischen und Rosenhain'schen Funktionen gebraucht werden.** gr. 4. geh. 3 Mark.

Thomae, Prof. Dr. J., **Ueber eine specielle Klasse Abel'scher Funktionen.** 2 Teile. gr. 4. geh. 9 Mark.

Thomae, Prof. Dr. J., **Ueber eine Funktion, welche einer linearen Differential- u. Differenzen-Gleichung IV. Ordn. Genüge leistet.** gr. 4. geh. 1 Mark 50 Pf.

Repetitorium der analytischen Geometrie. gr. 8. geh. 1 Mark 20 Pf.

Hofmann, Dr. F., **Methodik der stetigen Deformation von zweiblättrigen Riemann'schen Flächen** Ein Uebungsbuch für den geometrischen Teil der Funktionentheorie. gr. 8. geh. 2 Mark.

Rulf, Prof. W., **Elemente der projektivischen Geometrie.** gr. 8. geh. 2 Mark 50 Pf.

Beau, Dr. O., **Analytische Untersuchungen im Gebiete der trigonometrischen Reihen und der Fourier'schen Integrale. Zweite** verb. u. verm. **Auflage.** gr. 4. geh. 5 Mark 50 Pf.

Odstrčil, Prof. Dr. J., **Kurze Anleitung zum Rechnen mit den (Hamilton'schen) Quaternionen.** gr. 8. geh. 2 Mark 25 Pf.

Hochheim, Prof. Dr. A., **Kâfî fîl Hisâb** (Genügendes über Arithmetik) **des Abu Bekr Muhammed Ben Alhusein Alkarkhî.** 3 Hefte. gr. 4. geh. 3 Mark 90 Pf.

Hochheim, Dr. A., **Ueber die Differentialcurven der Kegelschnitte.** gr. 8. geh. 3 Mark.

Hochheim, Dr. A., **Ueber Pole u. Polaren d. parabol. Curven III. Ordn.** gr. 4. geh. 1 Mark.

Langer, Dr. P., **Die Grundprobleme der Mechanik.** Eine kosmologische Skizze. gr. 8. geh. 1 Mark 80 Pf.

Frege, Dr. G., **Begriffsschrift.** Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. gr. 8. geh. 3 Mark.

Radicke, A., **Die Recursionsformeln für die Berechnung der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen.** gr. 8. geh. 1 Mark 20 Pf.

Schobloch, Dr. A., **Ueber Beta- und Gammafunktionen.** gr. 4. geh. 60 Pf.

Dronke, Dr. A., **Einleitung in die höhere Algebra.** gr. 8. geh. 4 Mark 50 Pf.

Günther, Prof. Dr., **Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie.** gr. 8. geh. 12 Mark.

Günther, Prof. Dr., **Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen.** gr. 8. geh. 12 Mark.

Arnold Bergstraesser's Hofbuchhandlung in Darmstadt

sucht

Crelle's Journal f. reine u. angew. Mathematik

Band 7. 10. 12. Angeboten werden **Band 14. 17. 19.—28.**

Offerten sowie etw. Austauschvorschläge direct erbeten.

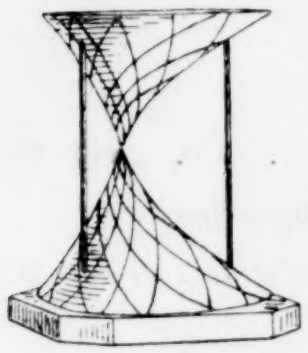
Verlag von Modellen für den höheren mathematischen Unterricht von **L. Brill** in **Darmstadt.**

Durch obige Verlagshandlung ist zu beziehen:

Nachtrag zur Siebenzehnten Serie.

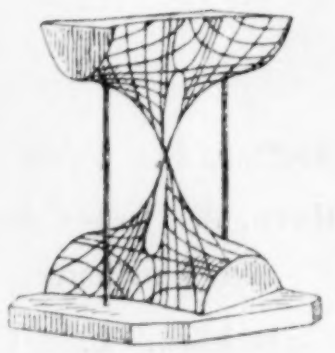
Mathematische Modelle

angefertigt im mathematischen Institut der k. technischen Hochschule zu München.



Modelle zur Functionentheorie

angefertigt auf Veranlassung von Prof. Dr. **Dyck**.



Nr. 5. Orthogonalsysteme auf der Kugel, ausgeführt (1891) von Assistent *J. Kleiber*. Die Modelle geben quadratische Einteilungen auf der Kugel, a. u. b. durch zwei aufeinander senkrechte Kreissysteme mit zwei getrennten bezw. zusammenfallenden Polen, c. durch zwei Schaaren von aufeinander senkrechten Loxodromen.

Preis der 3 Mod. mit schwarzgefärbt. Linien **34.50 Mk.,** ohne Schwarzfärbg. **27.50 Mk.**

Nr. 6. Die den regulären Polyedern entsprechenden regulären Gebietseinteilungen auf der Kugel. Die Mod. geben: a. den Tetraedertypus, b. den Oktaedertypus und c. den Ikosaedertypus. — **Preis der 3 Mod.** mit schwarzgefärbt. Linien **20.70 Mk.,** ohne Schwarzfärbg. **17.50 Mk.**

Modelle zur Flächentheorie

angefertigt unter Leitung von Prof. Dr. Dyck und Prof. Dr. Finsterwalder
von Prof. **A. Sucharda** in Prag.

Nr. 7. Mod. für die verschied. Typen kon. Knotenpkte. mit Angabe des Verlaufes der parabol. Curve u. d. Haupttangentencurven in der Umgebung dieser Punkte. — **Preis zus. 75 Mk.**

Modelle zur mathematischen Physik

angefertigt auf Veranlassung von Prof. Dr. F. Klein in Göttingen
von Oberlehrer Dr. **Schellenberg** in Mülheim a. d. R.

Nr. 8. Mod. zur Darstellung der Gestaltsänderungen einer schwingenden Saite (Fortpflanzung stehender Wellen), und zwar a. für die gezupfte, b. für die angeschlagene Saite. — **Preis für 8a 16 Mk., für 8b 20 Mk.**

Nr. 9. Mod. z. Theorie d. Wärmeströmg. in einem Stabe (2 Mod.) **u. in einem Ringe** (1 Mod.). — **Preis für 9a 16 Mk., 9b 18 Mk., 9c 20 Mk.** Für Emballage und Verpackung kommen bei dem compl. Nachtrag 12 Mk. in Anrechnung.

Den sämtlichen Modellen ist ein erläuternder Text beigegeben.

Nachtrag zur Neunten Serie.

Von dem bisher gelieferten **glatten** Modell der **Römischen Fläche von Steiner** (Fläche 4. Ord. mit drei Doppelgeraden, die sich in einem Punkte treffen) ist in der Folge auch ein Abguss beziehbar, auf dem von Rektor Dr. Fink in Tübingen eine Anzahl von **Haupttangentencurven** eingetragen ist. — **Preis 10 Mk.** (Kat.-Nr. 72a.)

Nachtrag zur Zwanzigsten Serie.

Modelle der geschlossenen Schraubenflächen.

a. **Die gerade geschlossene Schraubenfläche** (Wendelfläche), bei der die Erzeugenden die Schraubenaxe senkrecht treffen; b. **Die schiefe geschlossene Schraubenfläche,** bei der die Erzeugenden die Schraubenaxe schief treffen. — **Preis für jedes der beiden Modelle 30 Mk.,** excl. Emballage und Versendungskosten.

Alle Modelle können im In- u. Auslande direct v. d. Verlagshdlg. bezogen werden.

Band 119. Heft IV.

Inhaltsverzeichniss.

Heffter, L. Ueber *Abel*sche Gruppen. . . . . Seite 261

Horn, J. Ueber das Verhalten der Integrale von Differentialgleichungen bei der Annäherung der Veränderlichen an eine Unbestimmtheitsstelle. . . — 267

Saalschütz, L. Ueber rationale Auflösungen der Functionalgleichung $C\psi(n)\psi(n+1)+(A''n+B'')\psi(n+1)-(A'(n+1)+B')\psi(n)+(A'-A'')=0$. — 291

Brückel, Ph. Zusammenstellung der Formeln des Herrn *S. Gundelfinger* zum Hauptaxenproblem der Flächen zweiter Ordnung und zweiter Klasse bei Zugrundelegung von projectiven Coordinaten. . . . . — 313

Günther, P. Nachtrag zu der Abhandlung „Ueber lineare Differentialgleichungen, deren Integrale nur einen singulären Punkt im Endlichen besitzen und im Unendlichen sich regulär verhalten“ (dieses Journal Band 105 S. 1 ff.). . . . . — 330

Stäckel, P. Ueber die Existenz von Integralen bei Systemen partieller Differentialgleichungen. . . . . — 339

Pincherle, S. Sur la transformée d'*Euler*. (Extrait d'une lettre de M. *S. Pincherle* à Bologne à M. *L. Schlesinger* à Clausembourg.) . . . . . — 347

Sendungen von Beiträgen für das Journal erbittet die Redaction **ausschliesslich** unter der Adresse:

An die Redaction des Journals für die reine und angewandte Mathematik, Verlagsbuchhandlung von Georg Reimer. Berlin S.W., Anhaltstrasse 12.